

Valuación de Derivados Financieros

Teoría y Aplicación

Autor: Lic. Ricardo Gabriel Amarilla

Fecha: Marzo 2025

Amarilla, Ricardo Gabriel

Bases actuariales de las inversiones y las financiaciones : opciones y derivados financieros / Ricardo Gabriel Amarilla ; Compilación de Ricardo Gabriel Amarilla. - 1a ed - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ricardo Gabriel Amarilla, 2024.

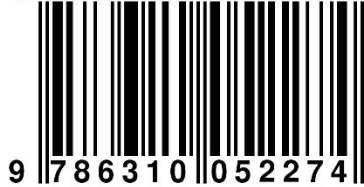
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-631-00-5227-4

1. Análisis de Riesgo. 2. Finanzas. 3. Administración Financiera. I. Título.
CDD 657.3

ISBN 978-631-00-5227-4



Primera Edición, Septiembre 2024

No se permite la reproducción total o parcial de este material, ni su almacenamiento en un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio, electrónico, mecánico, fotocopias u otros métodos, sin permiso previo por escrito del autor.

Su infracción esta penada por las leyes 11.723 y 25.446 de la República Argentina

@2024, Ricardo Amarilla

Todos los derechos reservados

Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723

Índice

Dedicatoria.....	6
Agradecimientos.....	6
Parte I: Teoría.....	7
Capítulo 1: SWAP DE DIVISAS Y TASAS DE INTERÉS.....	8
SWAP DE DIVISAS.....	9
SWAP DE TASAS.....	14
Capítulo 2: FORWARD RATE AGREEMENT (FRA).....	22
ESTRUCTURA TEMPORAL DE LA TASA DE INTERÉS.....	23
FORWARD RATE AGREEMENT: DEFINICIÓN DE FRA.....	25
DEFINICIÓN DE OVER-THE-COUNTER.....	25
MECANISMO DE FUNCIONAMIENTO DEL CONTRATO FRA.....	26
ESTRATEGÍAS DE ARBITRAJE EN CONTRATOS FRA.....	29
VALUACIÓN DEL CONTRATO FRA.....	34
Capítulo 3: CONTRATOS A PLAZO Y FUTUROS SOBRE DIVISAS.....	50
OPORTUNIDADES DE ARBITRAJE EN CONTRATOS A FUTURO SOBRE DIVISAS.....	52
CONTRATOS A PLAZO Y FUTUROS SOBRE ÍNDICES BURSÁTILES.....	54
OPORTUNIDADES DE ARBITRAJE EN CONTRATOS A FUTURO SOBRE DIVISAS.....	55
CONTRATOS A PLAZO Y FUTUROS SOBRE ACCIÓN QUE NO PAGA DIVIDENDOS.....	56
OPORTUNIDADES DE ARBITRAJE EN CONTRATOS A FUTURO SOBRE ACCIÓN QUE NO PAGA DIVIDENDOS.....	56
VALOR DE CONTRATO A PLAZO.....	59
Capítulo 4: LIMITES SUPERIORES, LIMITES INFERIORES Y CALL-PUT PARITY.....	62
ACCIONES QUE NO PAGAN DIVIDENDOS.....	63
ACCIONES QUE PAGAN DIVIDENDOS.....	82
ACCIONES QUE PAGAN UN RENDIMIENTO DE DIVIDENDO CONOCIDO.....	87
OPCIONES SOBRE FUTUROS.....	92
OPCIONES SOBRE ÍNDICES BURSÁTILES.....	94
OPCIONES SOBRE DIVISAS.....	95
Capítulo 5: VALUACIÓN DE OPCIONES: ARBOLES BINOMIALES.....	96
PARAMETROS FUNDAMENTALES.....	97
SUPUESTOS.....	97
ÁRBOL BINOMIAL DE UN PASO.....	97

VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA	97
ÁRBOL BINOMIAL DE DOS PASOS EN TIEMPO DISCRETO	104
VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA	104
ÁRBOL BINOMIAL DE UN PASO	107
VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE VENTA PUT	107
ÁRBOL BINOMIAL DE DOS PASOS EN TIEMPO DISCRETO	111
VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE VENTA	111
SIMULACIÓN DE OPCIONES	113
ÁRBOL BINOMIAL DE DOS PASO: SIMULACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA CALL	119
CARTERA QUE SIMULA EL COMPORTAMIENTO DEL CALL EN POSICIÓN LONG	123
ESTRATEGIAS DE ARBITRAJE EN UNA OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL	131
SIMULACIÓN DE UNA OPCIÓN DE VENTA PUT	136
ESTRATEGIAS DE ARBITRAJE DE UNA OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT	146
DIFERENCIA ENTRE SIMULACIÓN(Replica) Y COBERTURA CON OPCIONES	153
VALUACIÓN DE OPCIONES SOBRE OTROS ACTIVOS POR EL MÉTODO DE ÁRBOLES BINOMIALES ...	161
TIPOS DE OPCIONES	161
ECUACIONES PARA OBTENER LAS PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO SEGÚN EL TIPO DE OPCIÓN	161
EJEMPLOS	163
VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE VENTA SOBRE UN ÍNDICE BURSÁTIL.....	163
VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE VENTA SOBRE UNA DIVISA	165
VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA SOBRE FUTUROS	167
VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA CALL SOBRE UNA DIVISA.....	169
OPCIONES SOBRE FUTUROS.....	177
VALUACIÓN DE OPCIONES SOBRE FUTUROS	177
VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA SOBRE FUTUROS	181
PRECIO DE FUTUROS COMO UN ACTIVO QUE PROPORCIONA UN RENDIMIENTO	187
ESTRATEGIAS DE ARBITRAJE EN UNA OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL SOBRE FUTUROS	188
VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE VENTA SOBRE FUTUROS	194
ESTRATEGIAS DE ARBITRAJE EN UNA OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT SOBRE FUTUROS	198
MÁS EJEMPLOS.....	205
Capítulo 6: VALUACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS.....	222
OPCIÓN DE VENTA AMERICANA PUT	223
Capítulo 7: MODELOS DE ESTRUCTURA TEMPORAL DE TASA DE INTERES.....	249

MODELOS.....	250
SUPUESTOS.....	251
EL MODELO THE BLACK-DERMAN-TOY.....	252
EL MODELO DE HO-LEE.....	263
EJEMPLO DEL USO DEL MODELO BLACK-DERMAN-TOY	265
EJEMPLO DEL USO DEL MODELO BLACK-DERMAN-TOY	280
EL CAP COMO UN PORTAFOLIO DE CAPLET	285
EL FLOOR COMO UN PORTAFOLIO DE FLOORLET	291
EJEMPLO DEL USO DEL MODELO BLACK-DERMAN-TOY	295
CAPLET	311
Capítulo 8: Valuación de derivados. Ejercitación	322
Capitulo 9: Risk Management aplicaciones de estrategias con contratos forward y futuros	371
Parte II: Práctica.....	402
Práctica: Ejercitación - Enunciados.....	403
Bibliografía	440

Dedicatoria

A mi sobrina Martina, futura Actuarial, y para Ruth por tu gran apoyo.

Agradecimientos

A Rodrigo del Rosso, Tomas Lanzilotta, Dario Francese y a todos aquellos los que me hacen llegar sus palabras de agradecimientos.

Parte I: Teoría

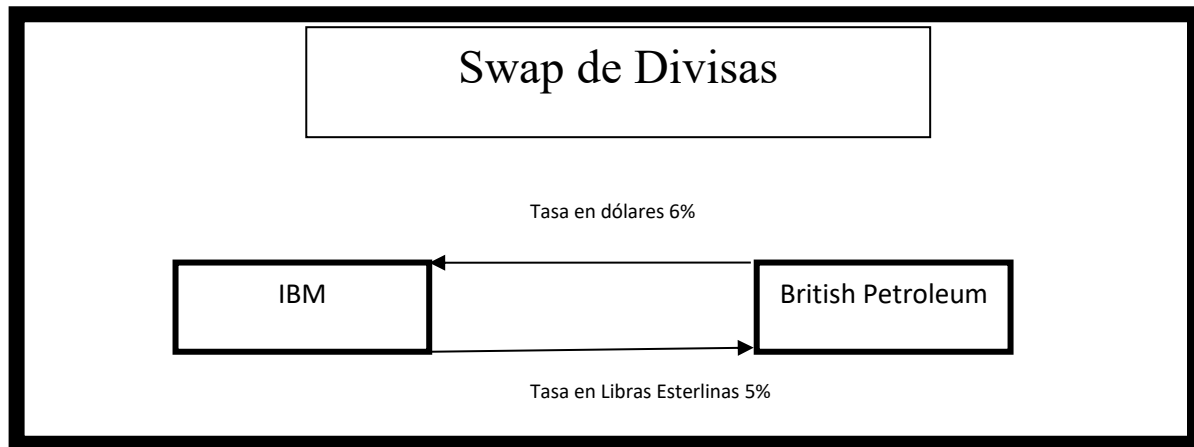
Capítulo 1: SWAP DE DIVISAS Y TASAS DE INTERÉS

SWAP DE DIVISAS

Transformación de pasivos

Fijo-Fijo

Intercambiar el principal y los pagos de intereses en una moneda por el principal y los pagos de intereses de otra moneda.



Las tasas son ambas fijas por eso el término Fijo-Fijo

Fijo-Variable

Los principales se determinan en cada moneda, y en general son equivalentes usando los tipos de cambio. Se intercambian al inicio y al final.

	A	B
US. Dólares (tasas variables)	LIBOR+0,5%	LIBOR+1%
Dólares canadienses (tasa fija)	5%	6,5%

Ganancia total

Diferencia entre tasas variables en dólares U.S.

$$tasa\ variable_B - tasa\ variable_A = LIBOR + 1\% - (LIBOR + 0,5\%) = 0,5\%$$

Diferencia entre tasas fijas en dólares canadienses

$$tasa\ fija_B - tasa\ fija_A = 6,5\% - 5\% = 1,5\%$$

Hay que restar las diferencias sin importar el tipo de moneda o que existe alguna especie de equivalencia

$$\Delta tasa\ fija - \Delta tasa\ variable = 1\%$$

Esta es la ganancia total

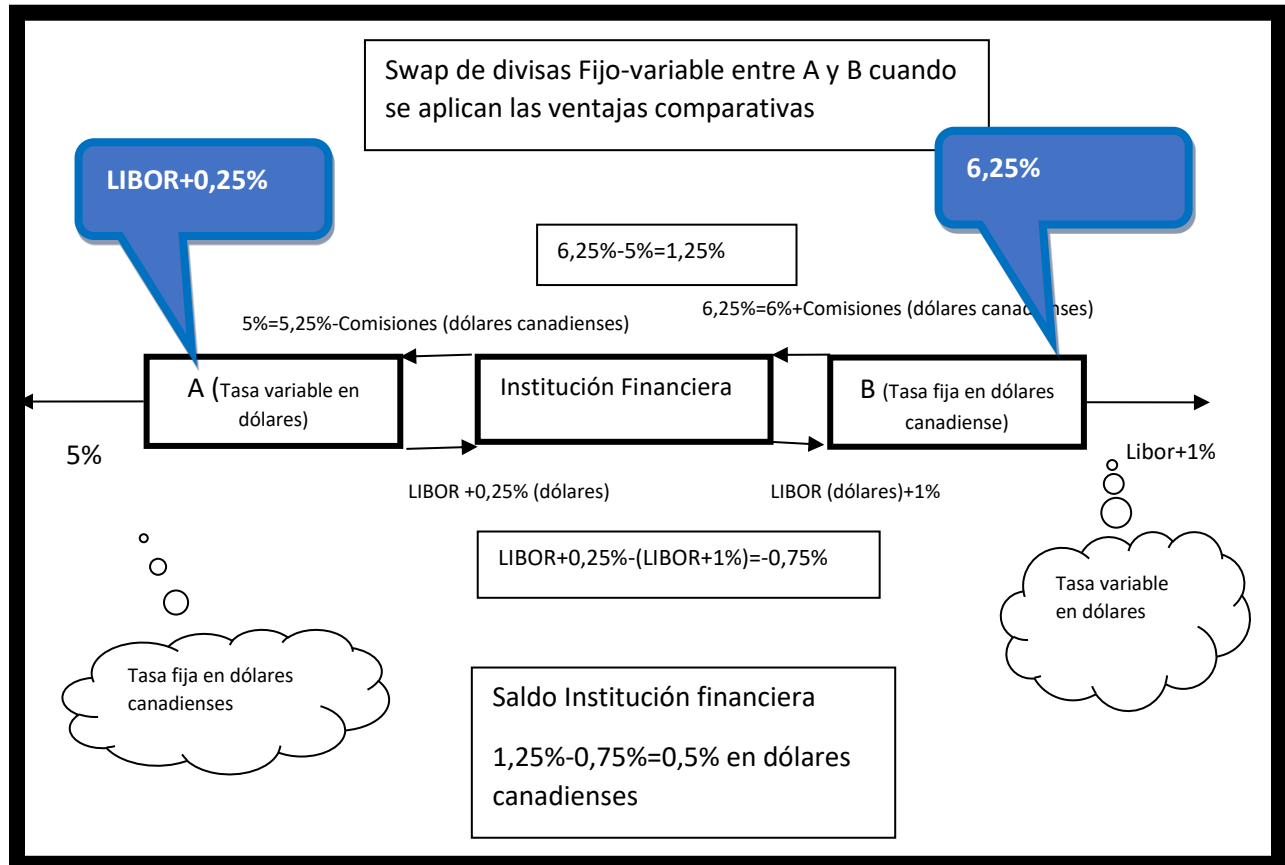
Institución financiera

Spread=50 pb=0,5%

Ganancia Neta

$$\text{Ganancia total-spread}=1\%-0,5\%=0,5\%$$

Cada parte se lleva iguales proporciones 0,25%.



Tasa fija en dólares canadienses que paga B en el swap

Hay que tomar la tasa de mercado

$$tasa\ fija_B = 6,5\%$$

Y restarle la ganancia neta

$$tasa\ fija\ Swap_B = 6,5\% - 0,25\% = 6,25\%$$

Tasa variable en dólares U.S. que paga A en el swap

Hay que tomar la tasa de mercado

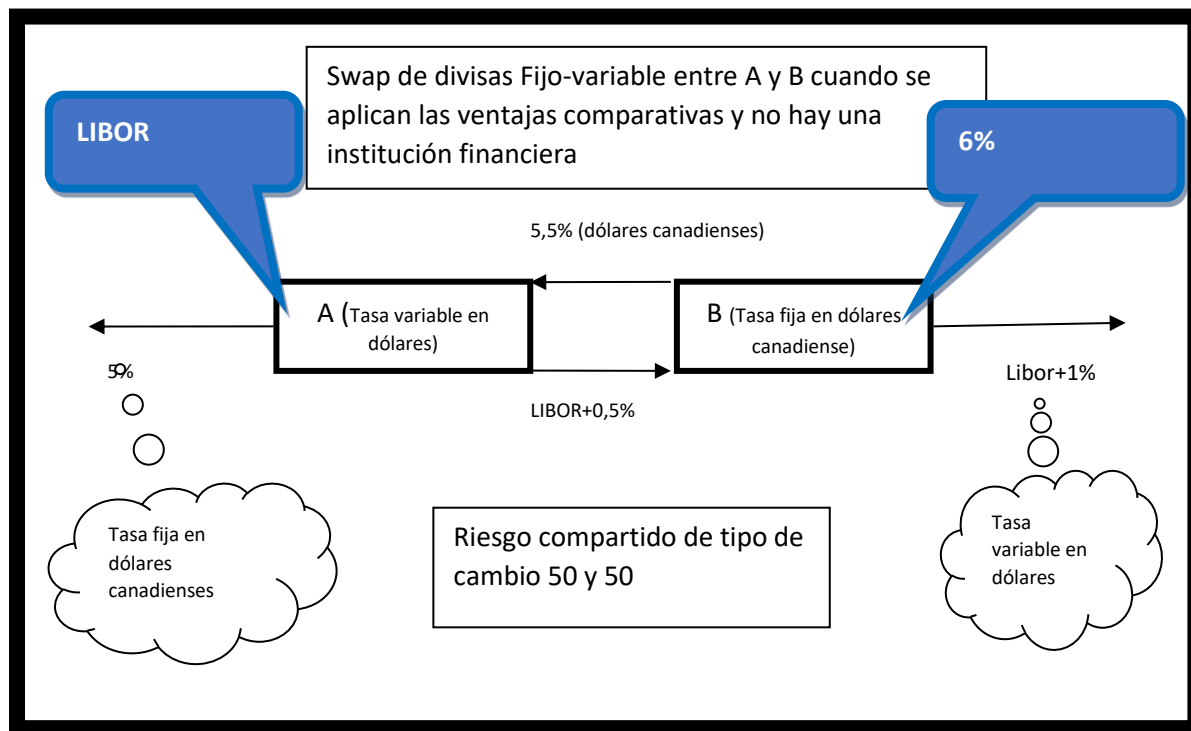
$$tasa\ variable_A = LIBOR + 0,5\%$$

Y restarle la ganancia neta

$$tasa\ variable\ Swap_A = LIBOR + 0,5\% - 0,25\% = LIBOR + 0,25\%$$

La institución financiera puede hacer frente a algún tipo de riesgo de tipo de cambio que lo cubre con un contrato a término.

Sin Institución financiera



Ahora la ganancia total se reparte en partes iguales 0,5% para cada empresa.

Tasa fija en dólares canadienses que paga B en el swap

Hay que tomar la tasa de mercado

$$tasa\ fija_B = 6,5\%$$

Y restarle la parte de la ganancia total que le corresponde

$$tasa\ fija\ Swap_B = 6,5\% - 0,5\% = 6\%$$

Tasa variable en dólares U.S. que paga A en el swap

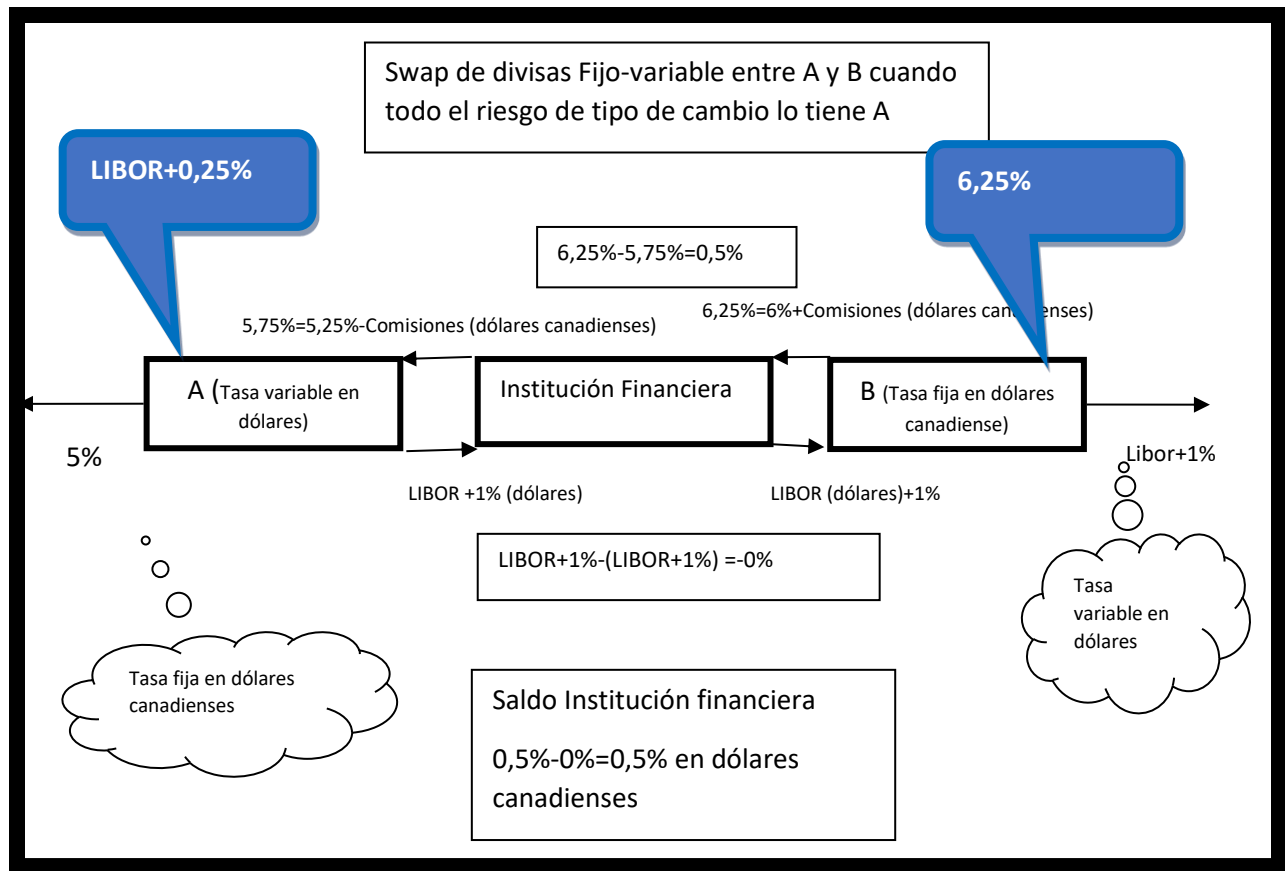
Hay que tomar la tasa de mercado

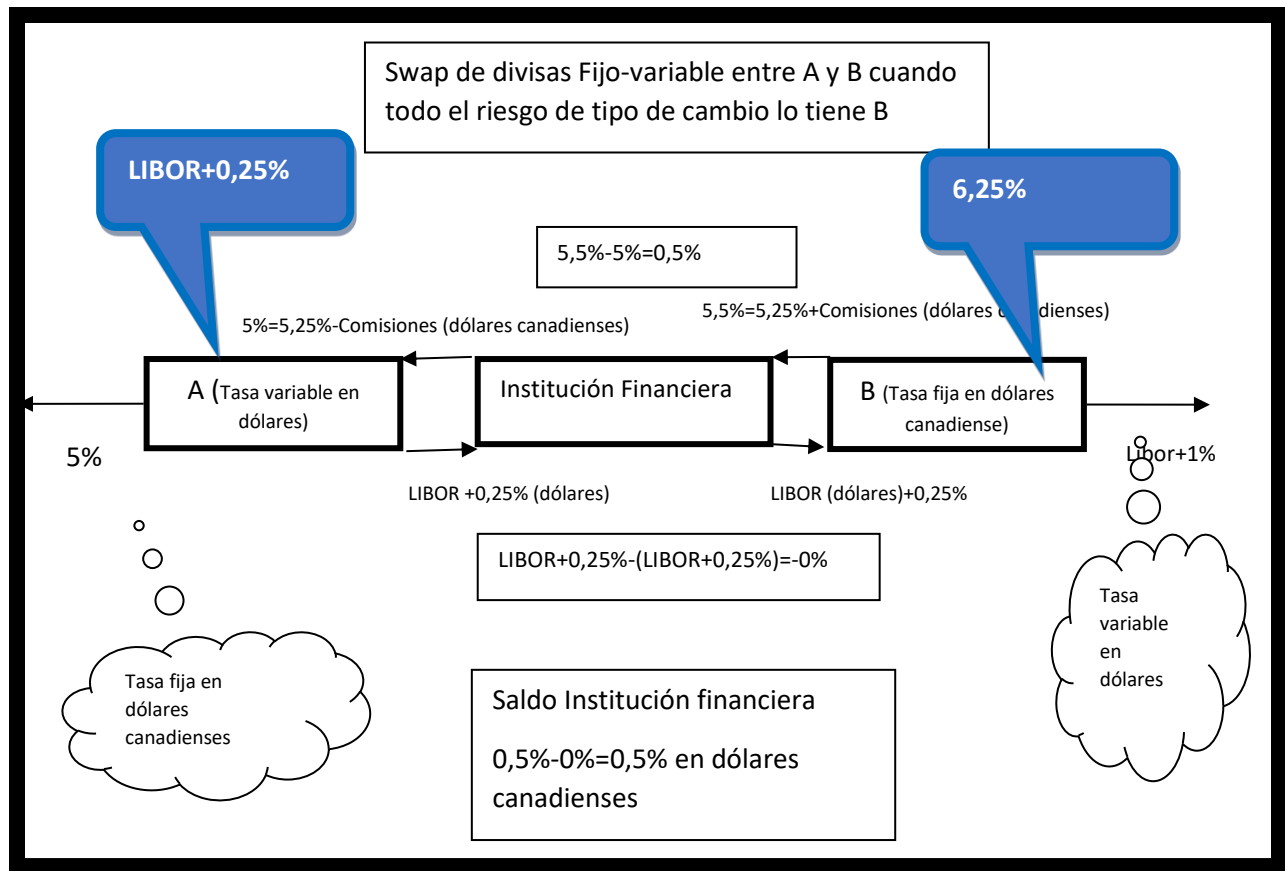
$$tasa\ variable_A = LIBOR + 0,5\%$$

Y restarle la parte de la ganancia total que le corresponde

$$tasa\ variable\ Swap_A = LIBOR + 0,5\% - 0,5\% = LIBOR$$

Riesgo de tipo de cambio con institución financiera



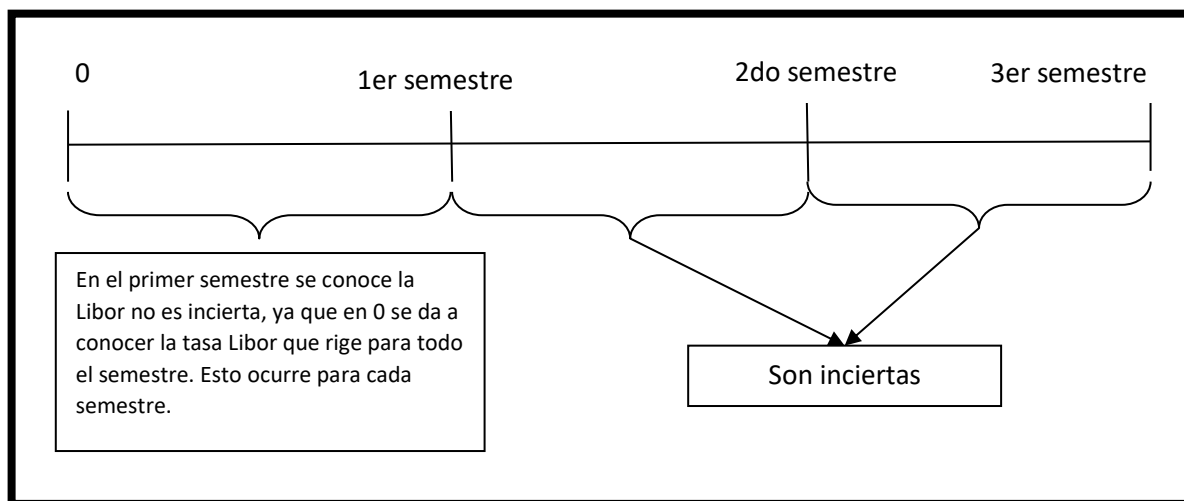


SWAP DE TASAS

Transformación de Pasivos

	Ventajas comparativas	
	Tasa Fija	Tasa Variable
Microsoft	4%	Libor a seis meses+0.3%
Intel	5.2%	Libor a seis meses+1%

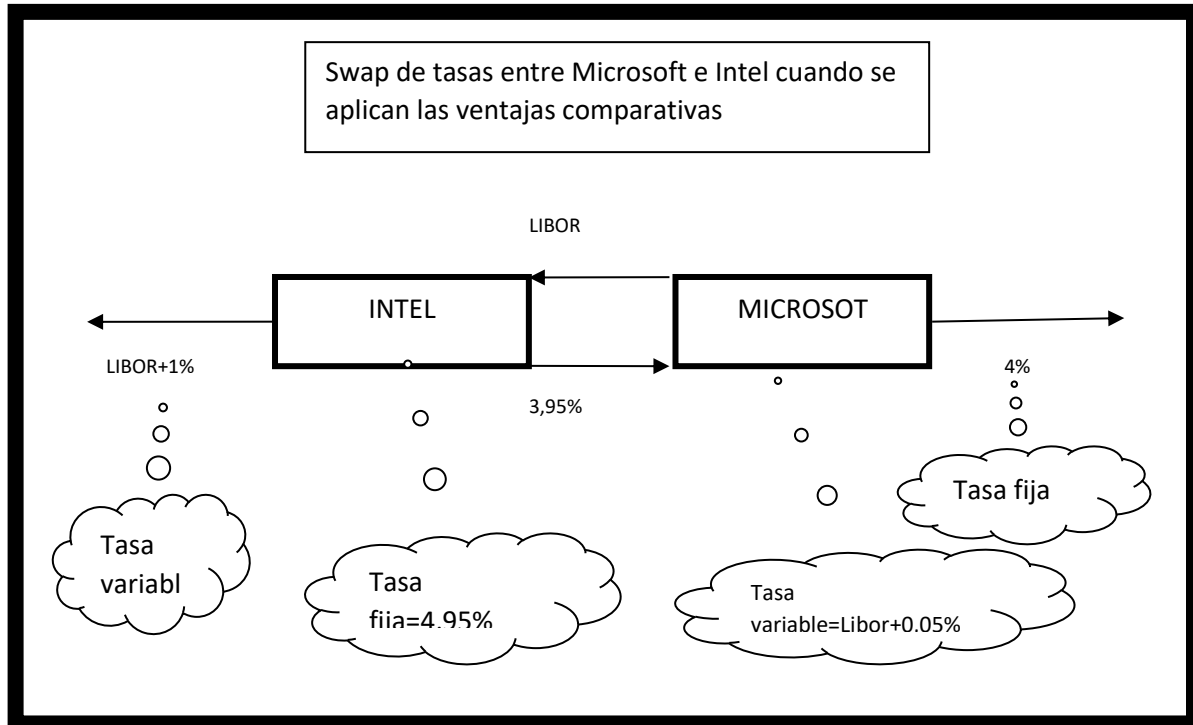
No se pueden comparar para una misma empresa $[Tasa\ fija] vs [Tasa\ variable]$ para determinar qué mercado es mejor que otro para tomar un préstamo. Esto último ocurre porque la tasa Libor a seis meses es incierta y se conoce al inicio de cada periodo en que actúa para ese mismo periodo, pero para los otros periodos es incierta.



Si alguna empresa toma un crédito buscaría poder comparar en que mercado le conviene obtener dicho crédito, si en el de tasas fijas o el de tasas variables. También es cierto que depende de la expectativa acerca de cómo evolucionará la Libor a seis meses.

A priori no se puede decir con certeza que la tasa fija es mejor que la variable para una sola empresa.

Pero al existir este problema debe buscar alguna referencia de comparación para tomar la decisión por ello se utiliza el método de las ventajas comparativas.



Característica del pago	Microsoft	Intel
Pago del préstamo	(4%)	(Libor+1%)
Paga al swap	(Libor)	(3,95)
Recibe del swap	3,95%	Libor
Resultado neto	(Libor+0,05)	(4,95)

¿Cómo se forma el Swap y sus tasas?

Microsoft

Paga tasa fija y su preferencia es tasa variable.

- Si la tasa variable que se logra con el Swap es mayor que la que obtendría en el mercado dado su calificación de riesgo no acepta el acuerdo.

Luego para aceptar el swap debe ocurrir que

$$[Tasa\ variable_{Swap}] - [Tasa\ variable_{Microsoft-Mercado}] < 0$$

$$[Tasa\ variable_{Swap}] < [Tasa\ variable_{Microsoft-Mercado}]$$

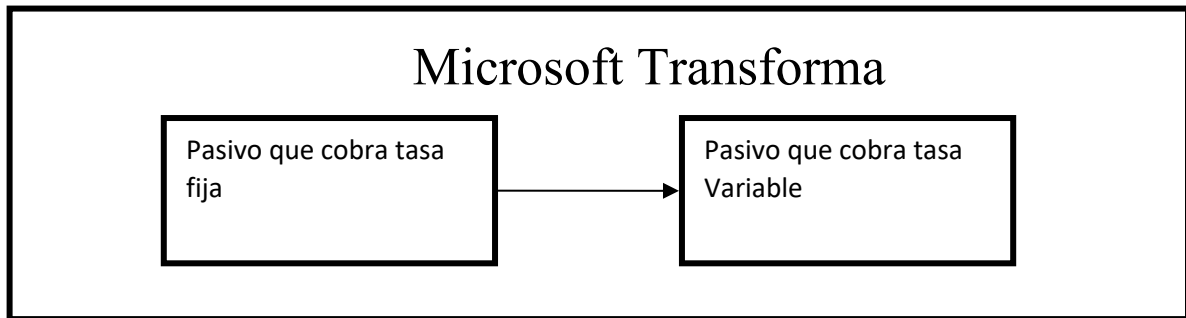
- Si la tasa variable que se logra con el swap es peor que la tasa fija que obtendría en el mercado no realiza el acuerdo.

Luego para aceptar el swap debe ocurrir que

$$[Tasa\ variable_{Swap}] - [Tasa\ fija_{Microsoft-Prestamo}] < 0$$

$$[Tasa\ variable_{Swap}] < [Tasa\ fija_{Microsoft-Prestamo}]$$

Esto Microsoft no lo puede determinar a priori. Esto depende de las preferencias



En el ejemplo

$$[Tasa\ variable_{swap}] < [Tasa\ variable_{Microsoft-Mercado}]$$

$$[Tasa\ variable_{swap}] < [Libor + 0.3\%]$$

Microsoft paga

$$Tasa\ variable_{swap} = Libor + 0,05\%$$

<i>Tasa variable_{swap}</i>	<i>Tasa variable_{Microsoft-Mercado}</i>
Libor + 0,05%	Libor + 0,3%

Se cumple y paga 0.25% menos que lo que lo haría en el mercado

Intel

Para variable y su preferencia es fija.

- Si la tasa fija que se logra con el Swap es mayor que la que obtendría en el mercado dado su calificación de riesgo no acepta el acuerdo.

Luego para aceptar el swap debe ocurrir que

$$[Tasa\ Fija_{swap}] - [Tasa\ Fija_{Intel-Mercado}] < 0$$

$$[Tasa\ Fija_{swap}] < [Tasa\ Fija_{Intel-Mercado}]$$

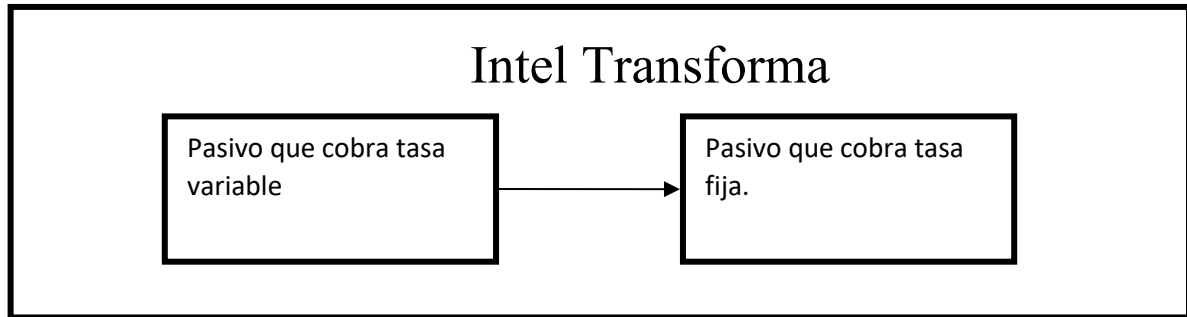
- Si la tasa fija que se logra con el swap es peor que la tasa variable que obtendría en el mercado no realiza el acuerdo.

Luego para aceptar el swap debe ocurrir que:

$$[Tasa\ fija_{swap}] - [Tasa\ variable_{Intel-Prestamo}] < 0$$

$$[Tasa\ fija_{swap}] < [Tasa\ variable_{Intel-Prestamo}]$$

Esto Intel no lo puede determinar a priori.



En el ejemplo

$$[Tasa Fija_{Swap}] < [Tasa Fija_{Intel-Mercado}]$$

$$[Tasa fija_{Swap}] < [5,2\%]$$

Intel paga

$$Tasa fija_{Swap} = 4,95\%$$

Se cumple y paga 0.25% menos que lo que lo haría en el mercado

Ganancia total

<i>Tasa fija_{Swap}</i>	<i>Tasa fija_{Intel-Mercado}</i>
4,95%	5,2%

$$[Tasa fija_{Intel}] - [Tasa fija_{Microsoft}]$$

-

$$[Tasa variable_{Intel}] - [Tasa variable_{Microsoft}]$$

Ganancia total

En el ejemplo

$$([5,2\%] - [4\%]) = 1,2\%$$

-

$$([Libor + 1\%] - [Libor + 0,3\%]) = 0,7\%$$

Ganancia total=0,5%

La ganancia se la reparten en partes iguales o sea que cada empresa se paga 0,25% por debajo de lo que pagaría en el mercado. A mismo valor del préstamo para ambas empresas

Otra manera de ver lo mismo

$$[Tasa fija_{Intel}] - [Tasa variable_{Intel-Préstamo}]$$

$$\begin{array}{c}
 + \\
 \frac{[Tasa\ variable_{Microsoft}] - [Tasa\ fija_{Microsoft_Prestamo}]}{Ganancia\ total}
 \end{array}$$

$$([5,2\%] - [Libor + 1\%]) = -Libor + 4,2\%$$

$$+$$

$$([Libor + 0,3\%] - [4\%]) = Libor - 3,7\%$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{Ganancia\ total = 0,5\%}{Ganancia\ de\ Intel}
 \end{array}$$

$$[Tasa\ fija_{Intel}] - [Tasa\ variable_{Intel-Prestamo}]$$

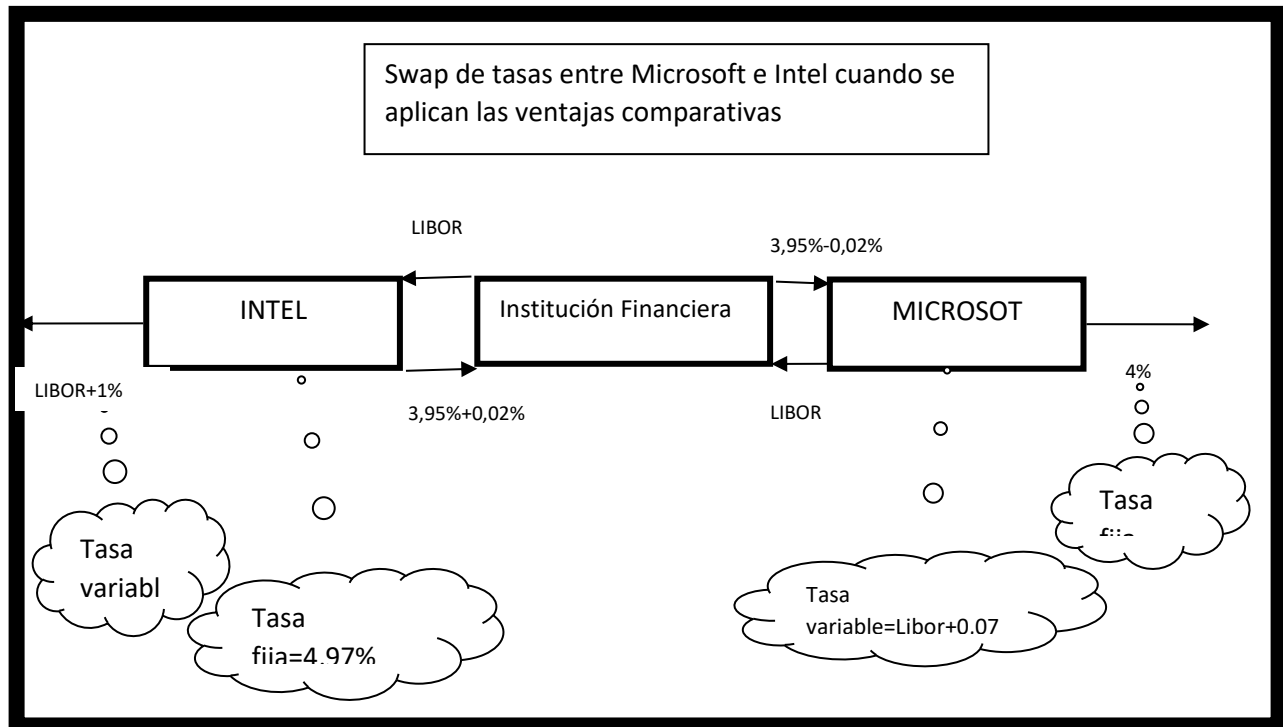
Toma un préstamo a tasa variable, es decir, $Tasa\ variable_{Intel-Prestamo}$ por un determinado valor. Pero tuvo la opción de hacerlo a la tasa fija $Tasa\ fija_{Intel}$ al mismo valor del préstamo. Para saber cuánto ganó hay que hacer la diferencia la cual es todo valor de la tasa fija por sobre la tasa variable.

Para Microsoft es lo contrario, es decir

$$[Tasa\ variable_{Microsoft}] - [Tasa\ fija_{Microsoft_Prestamo}]$$

Si sumamos ambas ganancias obtenemos la ganancia total.

Institución Financiera



Ganancia total

$$([5,2\%] - [Libor + 1\%]) = -Libor + 4,2\%$$

+

$$([Libor + 0,3\%] - [4\%]) = Libor - 3,7\%$$

$$\text{Ganancia total} = 0,5\%$$

Ganancia total neta

$$\text{Ganancia total} = 0,5\% - \text{Comisión total} = 0,04\% = 0,46\%$$

Se reparte en partes iguales que genera una ganancia de 0,23% para cada empresa.

Característica del pago	Microsoft	Intel
Pago del préstamo	(4%)	(Libor+1%)
Paga al swap	(Libor)	(3,95+Comisión=0,02%)=(3,97%)
Recibe del swap	3,95%-Comisión=0,02%=3,93%	Libor
Resultado neto	(Libor+0,07%)	(4,97%)

Ganancia	Microsoft		Intel	
	<i>Tasa variable</i> _{Swap}	<i>Tasa variable</i> _{Microsoft–Mercado}	<i>Tasa fija</i> _{Swap}	<i>Tasa fija</i> _{Intel–Mercado}
	Libor+0,07%	Libor+0,3%	4,97%	5,2
Resultado	0,23%		0,23%	
Ganancia total	0,46%+Comisión total(=4%)=0,5%			

Transformación de un Activo

Transformar un activo que gana una tasa de interés fija en un activo que gana una tasa de interés variable.

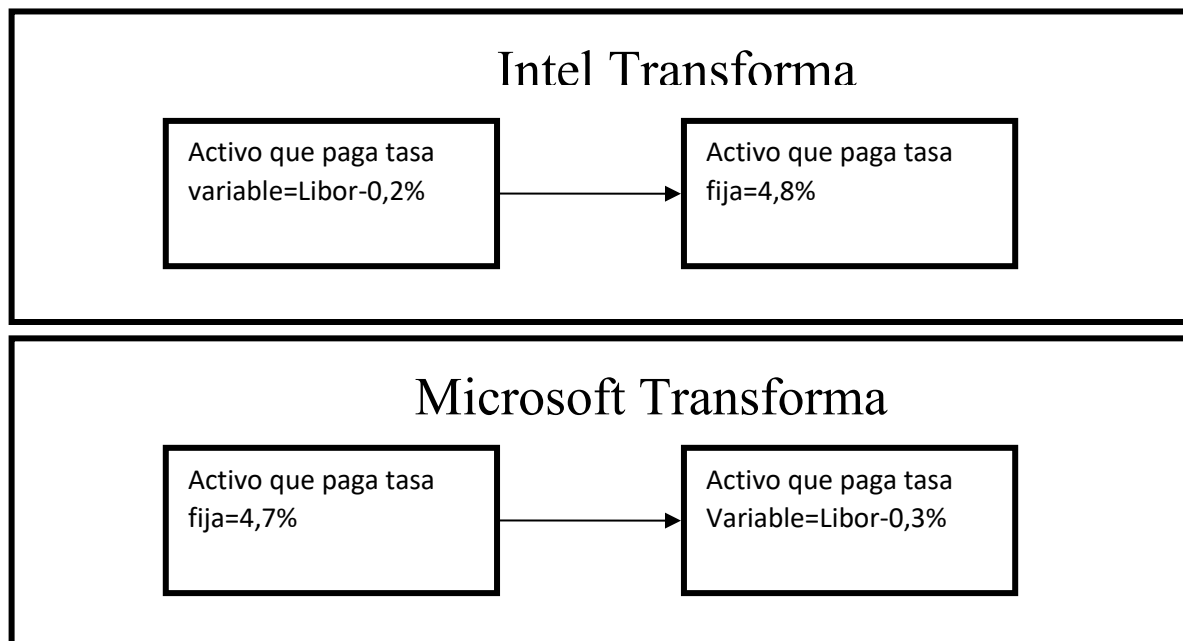
Característica del pago	Microsoft	Intel
Pago del bono	4,7%	Libor-0,2%
Paga al swap	(5%)	(Libor)
Recibe del swap	Libor	5%
Resultado neto	Libor-0,3%	4,8%

Nocional Ventajas comparativas

100 mm Tasa Fija Tasa Variable

Microsoft 4,7% Libor a seis meses-0.3%

Intel 4.6% Libor a seis meses-0,2%



Ganancia	Microsoft		Intel	
	<i>Tasa variable</i> _{Swap}	<i>Tasa variable</i> _{Microsoft-Mercado}	<i>Tasa fija</i> _{Swap}	<i>Tasa fija</i> _{Intel-Mercado}
	Libor-0,3%	Libor-0,1%	4,97%	5,2
Resultado	0,23%		0,23%	
Ganancia total	0,46%+Comisión total(=4%)=0,5%			

Capitulo 2:FORWARD RATE AGREEMENT (FRA)

ESTRUCTURA TEMPORAL DE LA TASA DE INTERÉS EN EL MOMENTO $t = 0$

PRECIO DE BONOS CERO CUPÓN

PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	PRECIO DE BONO CERO CUPÓN CON VALOR NOMINAL 1\$ $P(0; t)$	FACTOR DE DESCUENTO $FD_t = P(0; t)$
1	$P(0; 1)$	FD_1
2	$P(0; 2)$	FD_2
3	$P(0; 3)$	FD_3
4	$P(0; 4)$	FD_4
5	$P(0; 5)$	FD_5
6	$P(0; 6)$	FD_6

Donde el cero indica que el precio es para el momento $t = 0$. Por lo tanto $P(0; 6)$ es el precio hoy de un BONO CERO CUPÓN con VALOR NOMINAL de 1\$ y vencimiento en 6 años.

$$P(0; 6) = \frac{1\$}{1 + i_c(0; 6; 6)} = FD_6$$

Donde FD indica FACTOR DE DESCUENTO

DEFINICIÓN DE TASAS DE INTERÉS CERO CUPÓN

Es la tasa de interés que se ganaría sobre un bono que no ofrece cupones

Tomemos el BONO CERO CUPÓN que vence en 6 años. Tenemos que $i_c(0; 6; 6)$ es la tasa de rendimiento del bono para todo el periodo lo que se indica con los dos primeros valores el cero y el seis dentro del corchete.

TASA EFECTIVA ANUAL O SHORT RATE

Es la tasa de interés efectiva anual que surgen de las tasas cero

Por equivalencia de tasas sabemos que

$$i_c(0; 6; 1) = (1 + i_c(0; 6; 6))^{\frac{1}{6}} - 1$$

Como vemos el valor 1 indica que un BONO CERO CUPÓN con vencimiento dentro de 6 años tiene un rendimiento efectivo anual de $i_c(0; 6; 1)$

EL RENDIMIENTO EFECTIVO DE DEL PERIODO

$$i_c(0; 6; 6)$$

EL RENDIMIENTO EFECTIVO ANUAL O SHORT RATE

$$i_c(0; 6; 1)$$

Esto ocurre con cada uno de los bonos.

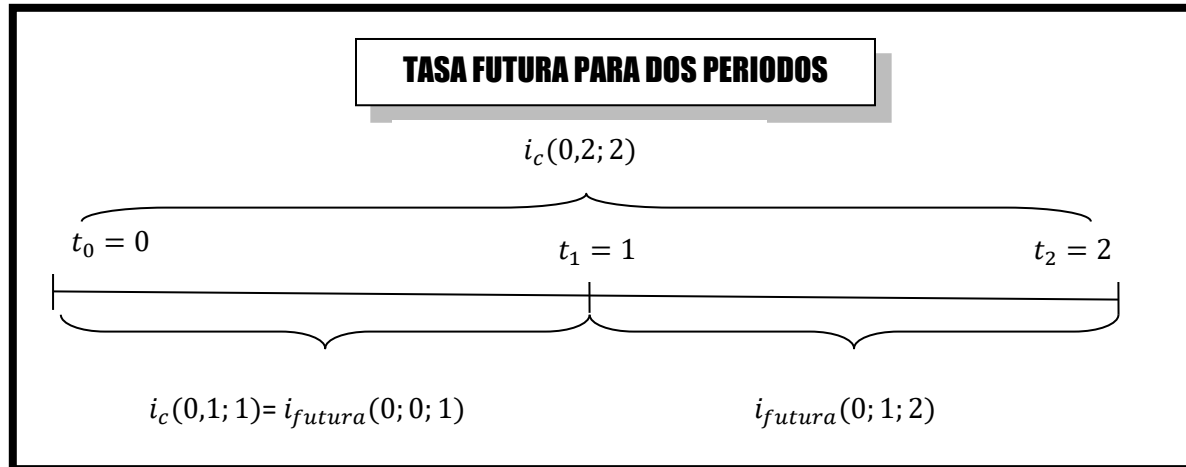
PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	SHORT RATES	TASAS CERO CUPÓN
1	$i_c(0; 1; 1)$	$i_c(0; 1; 1)$
2	$i_c(0; 2; 1)$	$i_c(0; 2; 2)$

3	$i_c(0; 3; 1)$	$i_c(0; 3; 3)$
4	$i_c(0; 4; 1)$	$i_c(0; 4; 4)$
5	$i_c(0; 5; 1)$	$i_c(0; 5; 5)$
6	$i_c(0; 6; 1)$	$i_c(0; 6; 6)$

Las TASAS CEROS conforman LA CURVA YIELD

DEFINICIÓN DE TASA FORWARD

Tasa de interés para un periodo futuro que está implícita en las tasas cero de hoy.



$$(1 + i_c(0,2;2)) = (1 + i_c(0,1;1)) \cdot (1 + i_f(0;1;2))$$

Ya que

$$i_c(0,1;1) = i_f(0;0;1)$$

Luego obtenemos

$$(1 + i_c(0,2;2)) = (1 + i_f(0;0;1)) \cdot (1 + i_f(0;1;2))$$

También tenemos que

$$i_f(0;1;2) = \frac{(1 + i_c(0,2;2))}{(1 + i_c(0,1;1))} - 1$$

PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	SHORT RATES $i_c(0; t; 1)$	TASAS CERO CUPÓN $i_c(0; t; t)$	TASA FORWARD $i_{futura}(0; t-1; t)$
1	$i_c(0; 1; 1)$	$i_c(0; 1; 1)$	$i_{futura}(0; 0; 1)$
2	$i_c(0; 2; 1)$	$i_c(0; 2; 2)$	$i_{futura}(0; 1; 2)$
3	$i_c(0; 3; 1)$	$i_c(0; 3; 3)$	$i_{futura}(0; 2; 3)$
4	$i_c(0; 4; 1)$	$i_c(0; 4; 4)$	$i_{futura}(0; 3; 4)$
5	$i_c(0; 5; 1)$	$i_c(0; 5; 5)$	$i_{futura}(0; 4; 5)$
6	$i_c(0; 6; 1)$	$i_c(0; 6; 6)$	$i_{futura}(0; 5; 6)$

Las TASAS FORWARD son conocidas y calculadas hoy en $t = 0$ y son aquellas tasas que eliminan oportunidades de arbitraje entre el mercado de colocación de fondos y toma de préstamos.

VOLATILIDADES DE LOS RENDIMIENTO YIELD

Para completar la ETTI necesitamos las estimaciones de las volatilidades de los rendimientos de los BONOS CERO CUPÓN anualizadas

CUADRO DE LA ETTI EN EL MOMENTO $t = 0$

PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	SHORT RATES $i_c(0; t; 1)$	TASAS CERO CUPÓN $i_c(0; t; t)$	TASA FORWARD $i_{futura}(0; t - 1; t)$	VOLATILIDADES DE LOS RENDIMIENTOS YIELD
1	$i_c(0; 1; 1)$	$i_c(0; 1; 1)$	$i_{futura}(0; 0; 1)$	$\sigma(0; 1; 1)$
2	$i_c(0; 2; 1)$	$i_c(0; 2; 2)$	$i_{futura}(0; 1; 2)$	$\sigma(0; 2; 1)$
3	$i_c(0; 3; 1)$	$i_c(0; 3; 3)$	$i_{futura}(0; 2; 3)$	$\sigma(0; 3; 1)$
4	$i_c(0; 4; 1)$	$i_c(0; 4; 4)$	$i_{futura}(0; 3; 4)$	$\sigma(0; 4; 1)$
5	$i_c(0; 5; 1)$	$i_c(0; 5; 5)$	$i_{futura}(0; 4; 5)$	$\sigma(0; 5; 1)$
6	$i_c(0; 6; 1)$	$i_c(0; 6; 6)$	$i_{futura}(0; 5; 6)$	$\sigma(0; 6; 1)$

LA ETTI A LO LARGO DEL TIEMPO

La ETTI no es estática por el contrario es dinámica por lo cual en cada momento del tiempo tendremos una ETTI

$$ETTI_0, ETTI_1, \dots, ETTI_T$$

Como todos los bonos pueden ser replicados con BONOS CERO CUPÓN tenemos resumidos el mercado de crédito en la ETTI bajo algunos supuestos.

FOWARD RATE AGREEMENT: DEFINICIÓN DE FRA

Es un acuerdo OTC (OVER -THE- COUNTER) que establece que se aplicará cierta tasa de interés al adquirir un préstamo o prestar determinado principal durante un periodo futuro específico. El supuesto subyacente al contrato es que es que adquirir un préstamo o prestar se realiza normalmente a la tasa LIBOR.

DEFINICIÓN DE OVER-THE-COUNTER

No todas las negociaciones se realizan en bolsas de valores, ya que, lo que se conoce como mercado OTC (no inscripto en la bolsa), es una alternativa importante a las bolsas. Este mercado consiste en una red de agentes de bolsa, vinculados por teléfono y computadora, que no se reúnen físicamente. Las transacciones se realizan por teléfono. A menudo las instituciones financieras están preparadas para actuar como CREADORES DE MERCADO de los instrumentos que se negocian con mayor frecuencia. Esto significa que siempre están preparados para cotizar un precio de demanda (un precio al que están dispuestos a comprar) como un precio de oferta (un precio al que están dispuestos a vender)

Por lo común, las transacciones OTC son mucho mayores que las del mercado negociado en la bolsa. Una ventaja importante de este mercado es que los términos de un contrato no necesitan ser los que se especifican en una bolsa de valores. Los participantes del mercado tienen la libertad de negociar cualquier acuerdo que sea mutuamente atractivo. Una desventaja es que, por lo común, en una transacción OTC, hay algún RIESGO DE CREDITO (es decir hay un pequeño riesgo de incumplimiento de contrato). Por el contrario las BOLSA DE VALORES se han organizado para eliminar prácticamente todo riesgo de crédito

MECANISMO DE FUNCIONAMIENTO DEL CONTRATO FRA

Pasamos a definir las siguientes variables

Las siguientes son TASAS NOMINALES ANUALES con capitalización para el periodo ENTRE T_1 y T_2

TASA DE INTERÉS ACORDADA EN EL FRA

$$R_K$$

TASA DE INTERÉS LIBOR A PLAZO PARA EL PERIODO ENTRE T_1 y T_2 CALCULADA HOY

$$R_f$$

TASA DE INTERÉS REAL LIBOR QUE SE OBSERVA EN EL MERCADO EN LA FECHA T_1 PARA EL PERIODO ENTRE T_1 y T_2

$$R_M$$

EL PRINCIPAL SUBYACENTE DEL CONTRATO

$$L$$

Si ocurre que

$$\overline{T_2 - T_1} = 0,5$$

Las TASAS NOMINALES ANUALES capitalizan cada seis meses

Si ocurre que

$$\overline{T_2 - T_1} = 0,25$$

Las TASAS NOMINALES ANUALES capitalizan cada tres meses

TASAS DE INTERÉS EFECTIVAS PARA EL PERIODO ENTRE T_1 y T_2

TASA DE INTERÉS EFECTIVA FRA

$$i_{FRA}(0; T_1; T_2) = R_K \times (T_2 - T_1)$$

TASA DE INTERÉS A PLAZO

$$i_f(0; T_1; T_2) = R_f \times (T_2 - T_1)$$

TASA DE INTERÉS DE MERCADO

$$i_c(T_1; T_2; \overline{T_2 - T_1}) = R_M \times (T_2 - T_1)$$

POSICIÓN SHORT O VENDIDA EN UN CONTRATO FRA

Considere un acuerdo de interés futuro en el que la empresa X acuerda prestar a la empresa Y durante el periodo entre T_1 y T_2 .

Normalmente, la empresa X ganaría la tasa R_M , la cual es desconocida hoy, con el préstamo LIBOR. El FRA significa que ganará R_K . Hay tres escenarios posibles:

1. $R_M = R_K$
2. $R_M > R_K$
3. $R_M < R_K$

SI OCURRE EL ESCENARIO $R_M = R_K$

Como la TASA DE INTERÉS DE MERCADO es igual a la TASA FRA no hay compensación por parte de CONTRATO FRA.

SI OCURRE EL ESCENARIO $R_M > R_K$

Como la TASA DE INTERÉS DE MERCADO es mayor a la TASA FRA la empresa X obtiene una PERDIDA del CONTRATO FRA.

PERDIDA DEL CONTRATO FRA PARA LA EMPRESA X

$$R_K - R_M$$

SI OCURRE EL ESCENARIO $R_M < R_K$

Como la TASA DE INTERÉS DE MERCADO es menor a la TASA FRA la empresa X obtiene una GANANCIA del CONTRATO FRA.

GANANCIA DEL CONTRATO FRA PARA LA EMPRESA X

$$R_K - R_M$$

La tasa de interés de mercado R_M se conoce y se establece en el momento T_1 y se paga en el momento T_2 . Por lo tanto la tasa de interés adicional genera un flujo de efectivo para la empresa X en el momento T_2 igual a

$$L \times (R_K - R_M) \times (T_2 - T_1)$$

Generalmente, los FRAs se liquidan en la fecha T_1 en vez de en la fecha T_2 . Entonces, el pago debe descontarse de la fecha T_2 a la T_1 . Para la empresa X el pago en la fecha T_1 es

$$\frac{L \times (R_K - R_M) \times (T_2 - T_1)}{1 + R_M \times (T_2 - T_1)}$$

POSICIÓN LONG O COMPRA EN UN CONTRATO FRA

Analizaremos a la empresa Y

SI OCURRE EL ESCENARIO $R_M = R_K$

Como la TASA DE INTERÉS DE MERCADO es igual a la TASA FRA no hay compensación por parte de CONTRATO FRA.

SI OCURRE EL ESCENARIO $R_M > R_K$

Como la TASA DE INTERÉS DE MERCADO es mayor a la TASA FRA la empresa Y obtiene una GANANCIA del CONTRATO FRA.

GANANCIA DEL CONTRATO FRA PARA LA EMPRESA X

$$R_M - R_K$$

SI OCURRE EL ESCENARIO $R_M < R_K$

Como la TASA DE INTERÉS DE MERCADO es menor a la TASA FRA la empresa Y obtiene una PERDIDA del CONTRATO FRA.

PERDIDA DEL CONTRATO FRA PARA LA EMPRESA X

$$R_M - R_K$$

La tasa de interés de mercado R_M se conoce y se establece en el momento T_1 y se paga en el momento T_2 . Por lo tanto la tasa de interés adicional genera un flujo de efectivo para la empresa Y en el momento T_2 igual a

$$L \times (R_M - R_K) \times (T_2 - T_1)$$

Generalmente, los FRAs se liquidan en la fecha T_1 en vez de en la fecha T_2 . Entonces, el pago debe descontarse de la fecha T_2 a la T_1 . Para la empresa Y el pago en la fecha T_1 es

$$\frac{L \times (R_M - R_K) \times (T_2 - T_1)}{1 + R_M \times (T_2 - T_1)}$$

POSICIÓN TOMADA EN UN CONTRATO FRA	PAYOFFS DEL FRA	COBERTURA
POSICIÓN COMPRADORA EN UN FRA O LONG	SE COBRA LA DIFERENCIA SI LA TASA SPOT ES SUPERIOR A LA PACTADA. $L \times (R_{\text{MERCADO}} - R_{\text{FRA}}) \times (T_2 - T_1)$	MERCADO DE CRÉDITO
POSICIÓN VENDEDORA EN UN FRA O SHORT	SE COBRA LA DIFERENCIA SI LA TASA SPOT ES INFERIOR A LA PACTADA. $L \times (R_{\text{MERCADO}} - R_{\text{FRA}}) \times (T_2 - T_1)$	MERCADO DE DEPOSITO

OTRA INTERPRETACIÓN DEL CONTRATO FRA

Si tomamos ambos payoffs tanto de la POSICIÓN LONG como de la POSICIÓN SHORT

POSICIÓN SHORT

$$L \times (R_K - R_M) \times (T_2 - T_1)$$

POSICIÓN LONG

$$L \times (R_M - R_K) \times (T_2 - T_1)$$

El CONTRATO FRA puede ser interpretado como un acuerdo en el que la empresa X recibirá intereses sobre el principal entre T_1 y T_2 a la tasa fija de R_K y pagara intereses a la tasa de mercado real de R_M . La empresa Y pagará intereses sobre el principal entre T_1 y T_2 a la tasa fija R_K y recibirá intereses a la tasa R_M .

PRECIO DE “NO ARBITRAJE” DE UN CONTRATO FRA

$$R_f = R_K$$

O también

$$R_f \times (T_2 - T_1) = R_K \times (T_2 - T_1)$$

$$i_f(0; 1; 2) = i_{fra}(0; 1; 2)$$

Cuando esto no se cumple hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje

ESTRATEGÍAS DE ARBITRAJE EN CONTRATOS FRA

t	$i_{futura}(0; t - 1; t)$
1	25%
2	30%

Es decir que la tasa de contado $i_c(0, 1; 1) = 35\%$ y la tasa forward entre 1 y 2 es del 30%.

CONDICIONES DEL FRA

Supongamos que se pacta una tasa para el periodo $\overline{t_1 t_2}$ del 31%.

$$i_{fra}(0; 1; 2) > i_f(0; 1; 2)$$

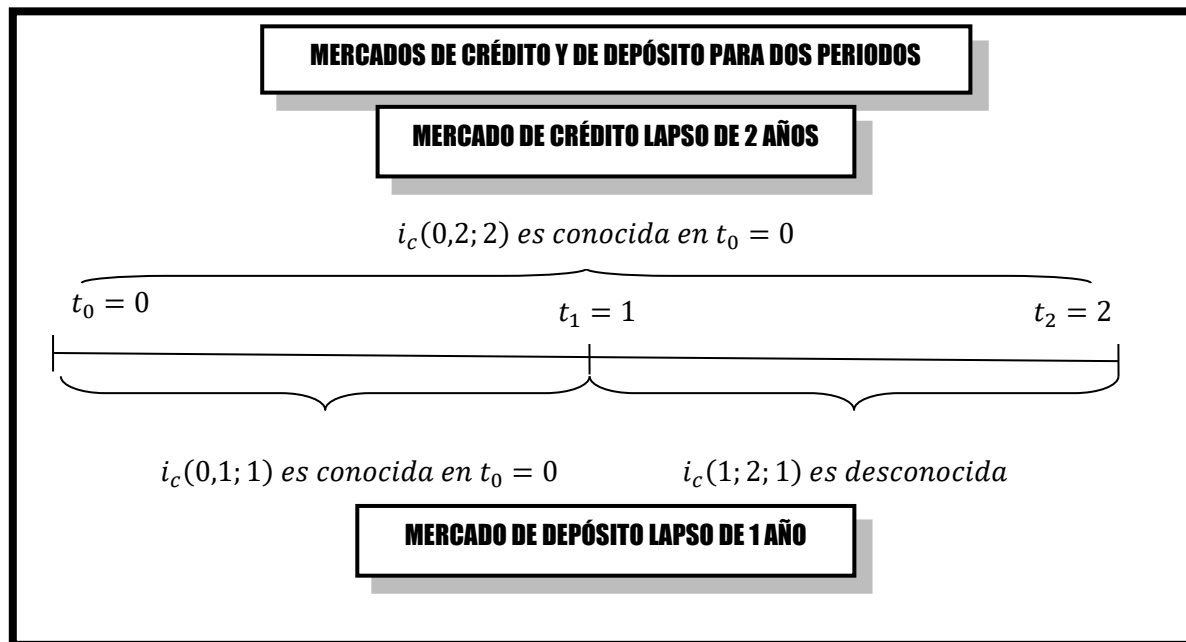
Por lo tanto hay oportunidades de arbitraje y así obtener una ganancia libre de riesgo sin colocar capital alguno.

MERCADO DE COLOCACIÓN DE FONDOS

Se deposita a un año y cobra la tasa $i_c(0, 1; 1) = 35\%$ la cual es conocida en $t = 0$ y se puede volver a colocar fondos en $\overline{t_1 t_2}$ pero esta tasa es incierta en $t = 0$ o sea $i_c(1, 2; 1) = ?$. Es implica que sólo es posible hacer depósitos a un año y no a otro plazo

MERCADO DE TOMA DE FONDOS O PRÉSTAMOS

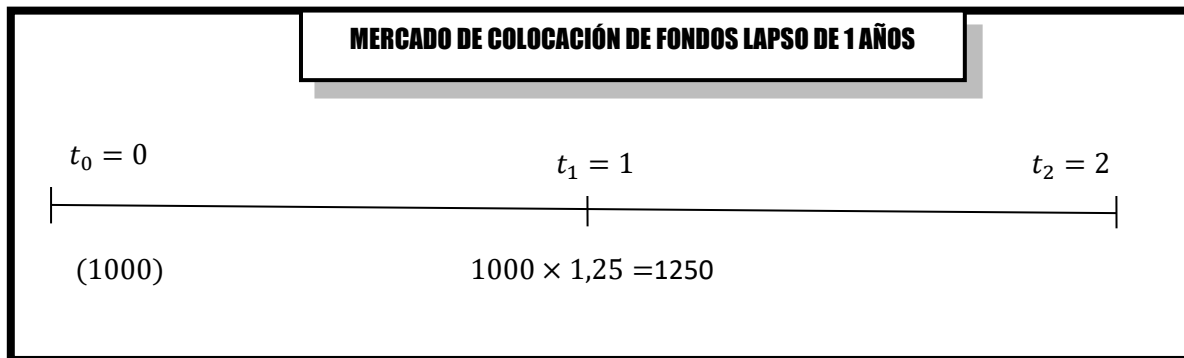
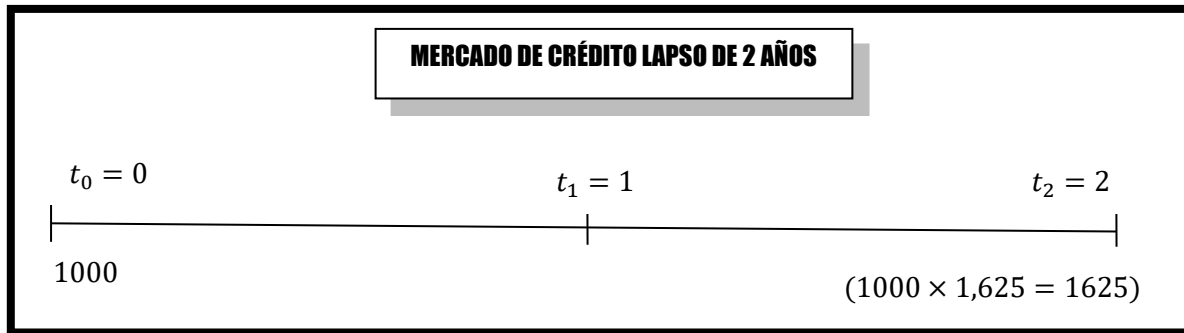
Es a dos años y la tasa que cobra es la $i_c(0, 2; 2)$ la cual es conocida en $t = 0$. Esto implica que se puede sacar un crédito solo a dos años y no a otro plazo



$$(1 + i_c(0, 2; 2)) = (1 + i_f(0; 0; 1)) \cdot (1 + i_f(0; 1; 2)) = 1,25 \times 1,3 = 1,625$$

Luego

$$i_c(0,2; 2) = 0,625$$



Los pasos a realizar son estos en $t = 0$

1. Tomar 1000\$ de préstamo con un costo de $i_c(0,2; 2) = 0,625$ a 2 años
2. Depositar los 1000\$ a 1 año a una rentabilidad de $i_c(0,1; 1) = 0,25$
3. Aseguró la tasa incierta entre $\overline{t_1 t_2}$ con la realización de un FRA que tiene un costo de cero la realización del contrato. Tomando una posición vendedora para compensar la caída de la rentabilidad.

EL SALDO EN $t = 0$ ES IGUAL A CERO

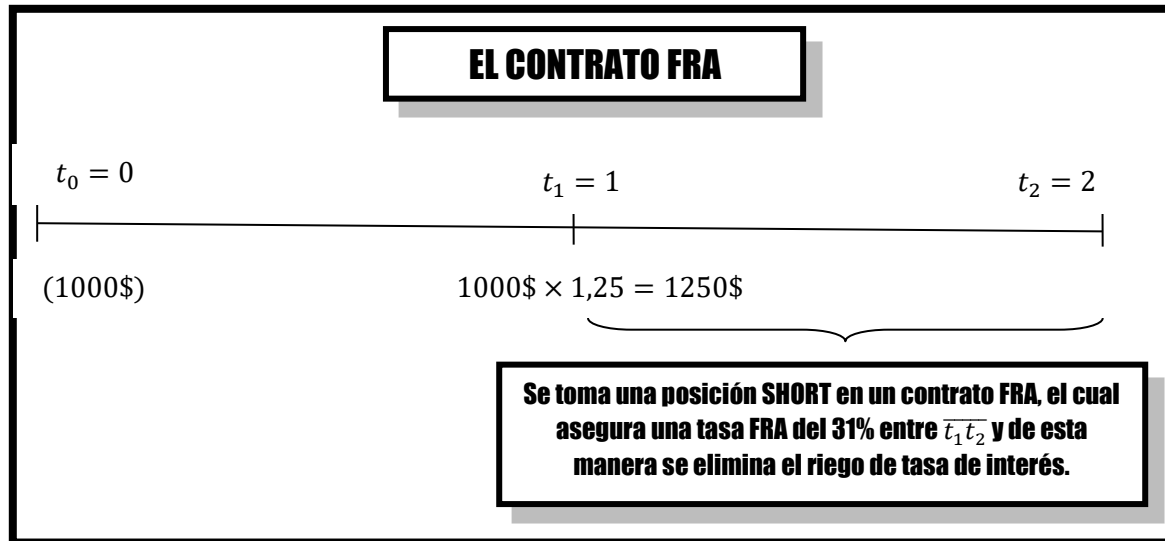
Después de 1 año.....

En $t = 1$

1. Cobro el depósito de 1250\$ que realice en $t = 0$.
2. Deposito los 1250\$ a la tasa de mercado $i_c(1,2; 1)$ la cual ya es conocida para el periodo $\overline{t_1 t_2}$.

EL SALDO EN $t = 1$ ES IGUAL A CERO

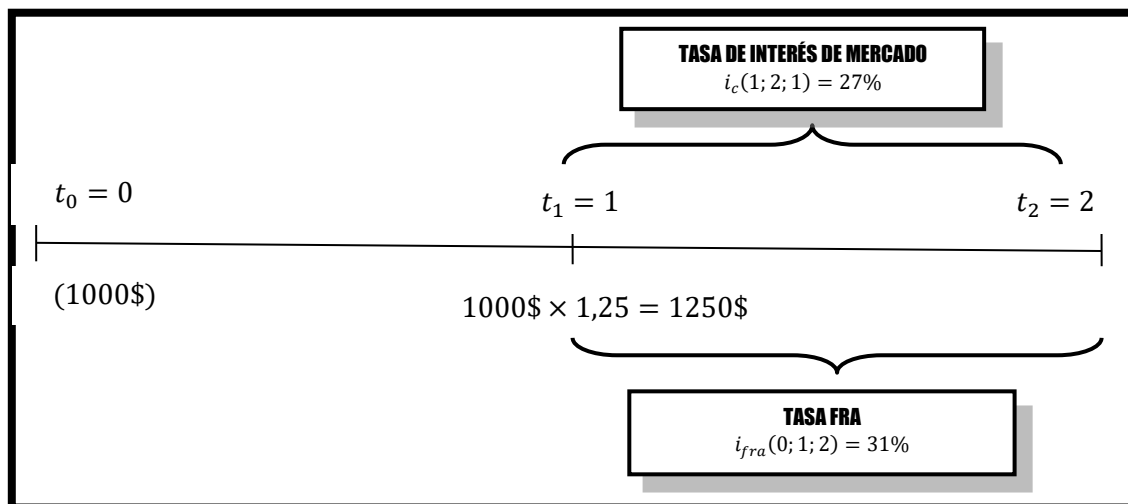
Cabe aclarar que aquí se da a conocer la verdadera tasa de contado $i_c(1,2; 1)$ del periodo $\overline{t_1 t_2}$, pero independientemente del valor que tomé la tasa va a existir una ganancia por arbitraje.

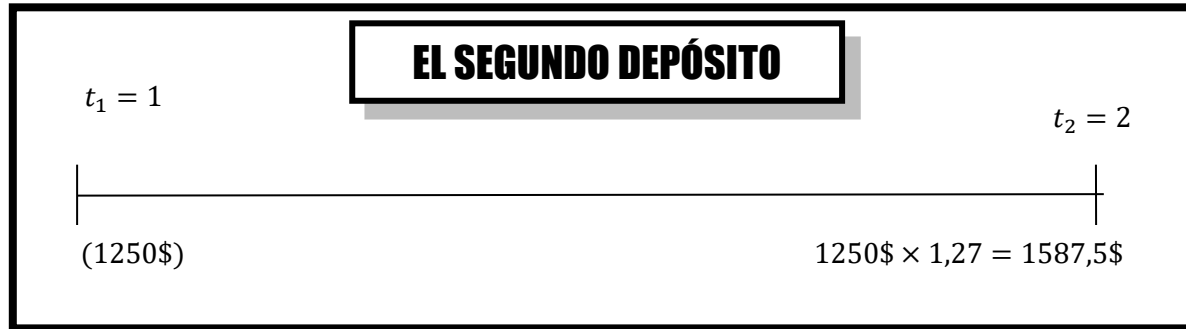


ESCENARIO 1

$$i_c(1, 2; 1) < i_{fra}(0, 1; 2)$$

Si $i_c(1, 2; 1)$ resulta ser del 27%. El contrato FRA compensa por la diferencia





Después de 1 año.....

En $t = 2$

1. Cobro deposito 1587,5\$
2. Pago préstamo 1625\$
3. Compensa la pérdida el FRA

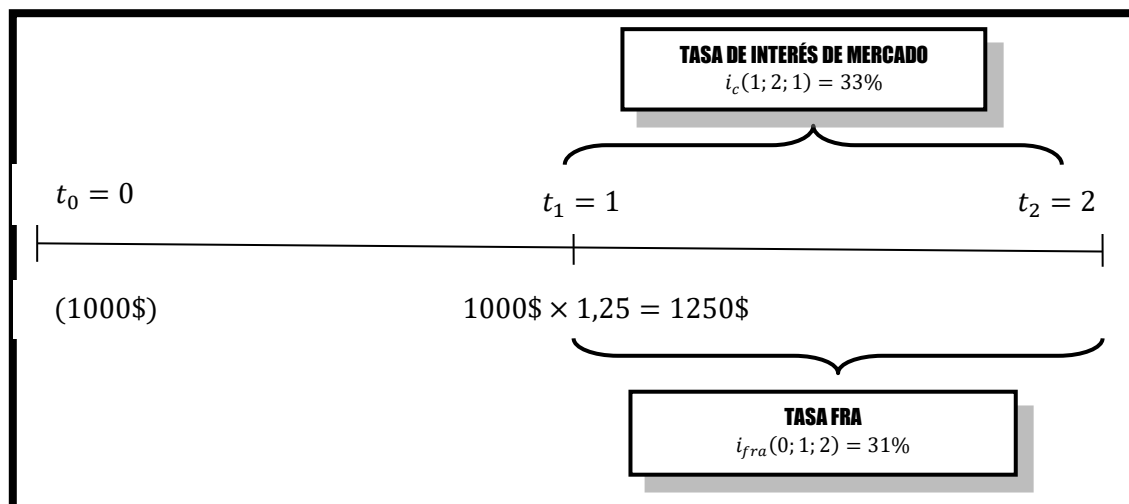
$$1250\$ \times (31\% - 27\%) = 50\$$$

Saldo al final del periodo es de 12,5\$ que es la ganancia por arbitraje, que cumple la condición de ser segura y no se coloca capital alguno. Es segura porque es independiente de la tasa real de contado incierta para el periodo $\overline{t_1 t_2}$.

ESCENARIO 2

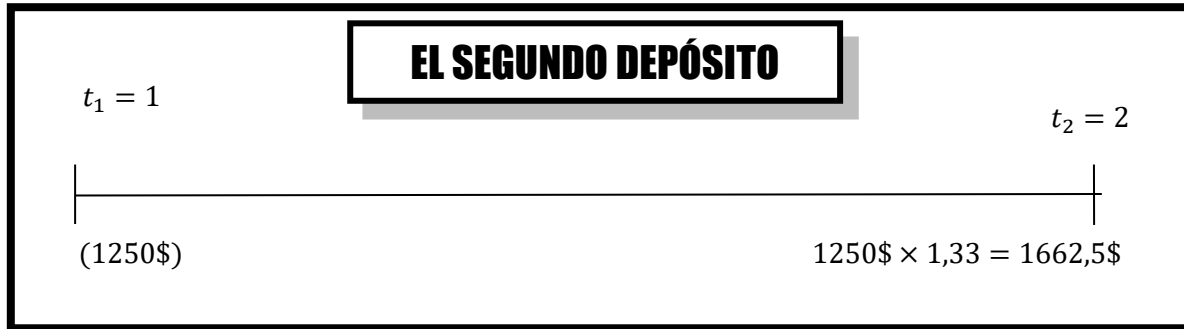
$$i_c(1, 2; 1) > i_{fra}(0, 1; 2)$$

Si la tasa de interés de mercado $i_c(1, 2; 1)$ resulta ser del 33%. El contrato FRA nos obliga a pagar la diferencia.



Después de 1 año.....

En $t = 2$



1. Cobro deposito 1662,5\$
2. Pago préstamo 1625\$
3. El pago que se debe realizar por el FRA

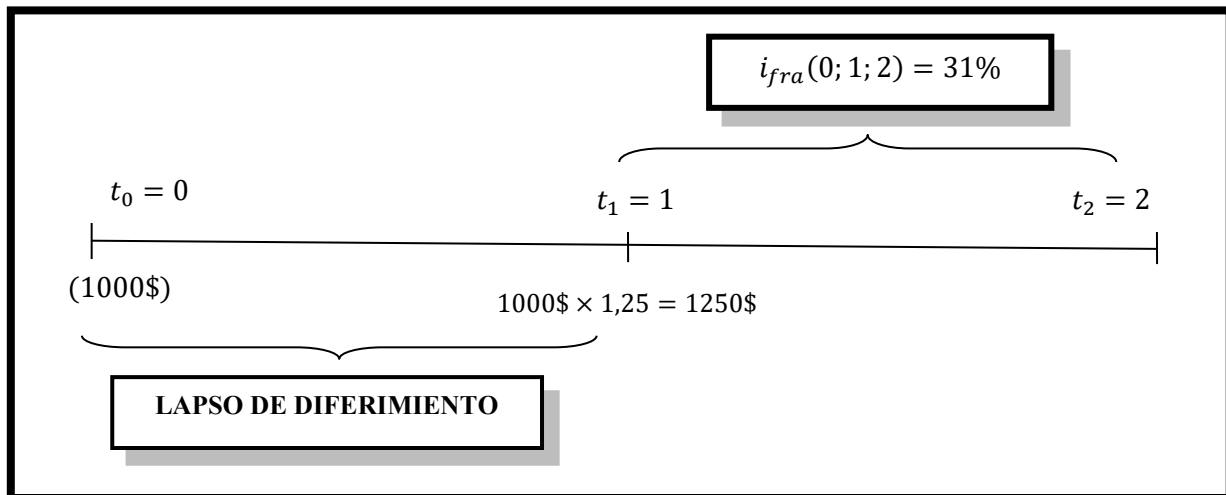
$$1250\$ \times (31\% - 33\%) = -25\$$$

Saldo al final del periodo es de 12,5\$ que es la ganancia por arbitraje, que cumple la condición de ser segura y no se coloca capital alguno. Es segura porque es independiente de la tasa real de contado incierta para el periodo $\overline{t_1 t_2}$.

Con esto se demuestra que sin importar cual valor tome la variable aleatoria $i_c(1,2; 1)$ la ganancia por arbitraje es siempre de 12,5\$.

LAPSO DE DIFERIMIENTO

El FRA tiene un diferimiento en el ejemplo es de 1 periodo



COMPARACIÓN DE LOS MERCADOS

Si hay dos mercados y con un horizonte de inversión de 2 años como en el ejemplo

Mercado 1	Mercado 2
A DOS AÑOS	A UN AÑO
$(1 + i_c(0,2;2)) = 1,625$	$(1 + i_c(0,1;1)) \times (1 + i_{fra}(0;1;2)) = 1,6375$
62,5%	63,75%
Tasa más baja	Tasa más alta
TIPO DE OPERACIÓN QUE CONVIENE REALIZAR	TIPO DE OPERACIÓN QUE CONVIENE REALIZAR
PRESTAMO	DEPÓSITO

El mercado de bonos y el mercado de FRA están conectados.

MERCADO DE BONOS		MERCADO DE FRA
t	$i_{futura}(0; t-1; t)$	31%
1	25%	
2	30%	

VALUACIÓN DEL CONTRATO FRA

El valor de un contrato FRA es igual a cero si

$$i_f(0; 1; 2) = i_{fra}(0; 1; 2)$$

$$R_f = R_K$$

VALUACIÓN EN TIEMPO DISCRETO

VALOR DE UN CONTRATO FRA EN POSICIÓN LONG

Se realizan dos CONTRATOS FRA para el mismo periodo pero se realizaron en distintas fechas, suponemos que actuaron las fuerzas opuestas de mercado entre oferta y demanda con lo cual se esfumaron las oportunidades de arbitraje en ambas fechas.

CONDICIONES DEL CONTRATO FRA REALIZADO EN EL MOMENTO t_0

Se toma un POSICIÓN LONG en un CONTRATO FRA en el momento $t_0 = 0$ y se pacta una tasa $i_{fra}(0; 2; 3)$ para el periodo $\overline{t_2 t_3}$

CONDICIÓN DE NO ARBITRAJE

$$i_{fra}(0; 2; 3) = i_{futura}(0; 2; 3)$$

Para el cálculo de $i_f(0; 2; 3)$ se utiliza la ETTI de t_0 .

Pasa un año.....

En t_1 (nuevo hoy)

CONDICIONES DEL CONTRATO FRA REALIZADO EN EL MOMENTO t_1

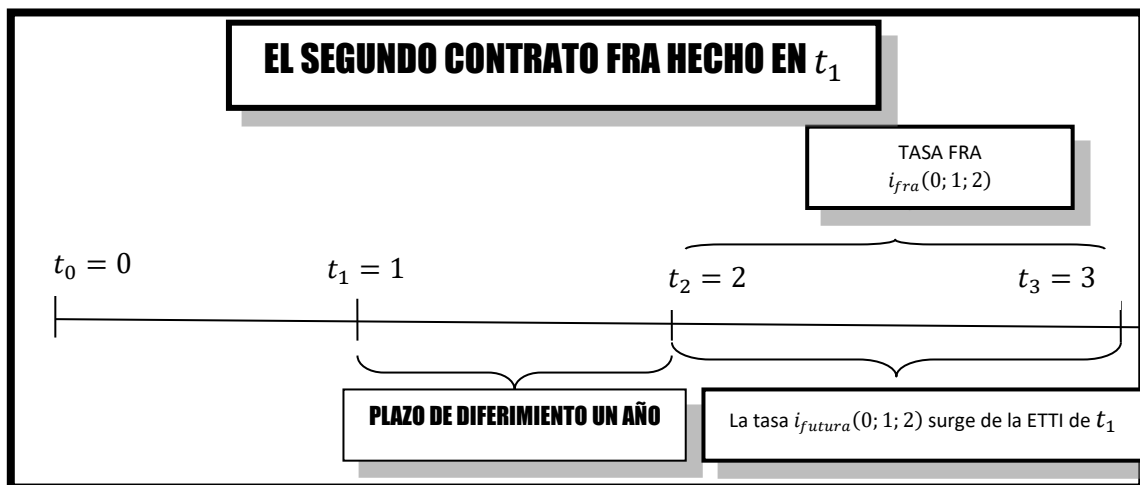
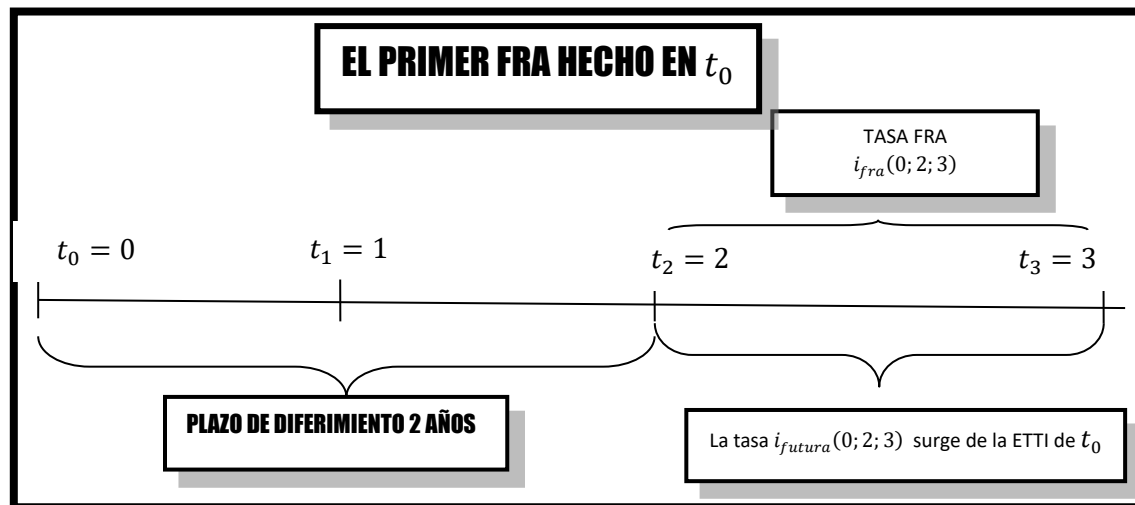
Se realiza el segundo CONTRATO FRA y se toma un POSICIÓN LONG. Se pacta una TASA FRA igual a $i_{fra}(0; 1; 2)$ para el periodo $\overline{t_2 t_3}$.

CONDICIÓN DE NO ARBITRAJE

$$i_{fra}(0; 1; 2) = i_{futura}(0; 1; 2)$$

Para el cálculo de $i_f(0; 1; 2)$ se utiliza la ETTI de t_1 .

La ETTI puede ser la misma o puede cambiar en ambas fechas.



Si

$$i_{futura}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 \neq i_{futura}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

Luego

$$i_{fra}(0; 1; 2) \text{ hecho en } t_1 \neq i_{fra}(0; 2; 3) \text{ hecho en } t_0$$

Entonces es posible determinar un valor para el FRA hecho en t_0 .

Si

$$i_{futura}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 = i_{futura}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

Luego

$$i_{fra}(0; 1; 2) \text{ hecho en } t_1 = i_{fra}(0; 2; 3) \text{ hecho en } t_0$$

Entonces el valor del FRA hecho en t_0 es cero.

Vamos a suponer que la ETTI no es constante a lo largo del tiempo. Por lo cual

$$i_{futura}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 \neq i_{futura}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

La persona que posee el FRA hecho en t_0 lo guardo todo un año hasta t_1 , en ese momento se realiza el nuevo FRA para el mismo periodo de tiempo $\overline{t_2 t_3}$.

ESCENARIO I

$$i_{futura}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 > i_{futura}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

Con lo cual

$$i_{fra}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 > i_{fra}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

Con lo cual el costo que debe abonar por un préstamo la persona que realizó el FRA en t_1 en el periodo $\overline{t_2 t_3}$ ES MAYOR que el que realizó el primer FRA.

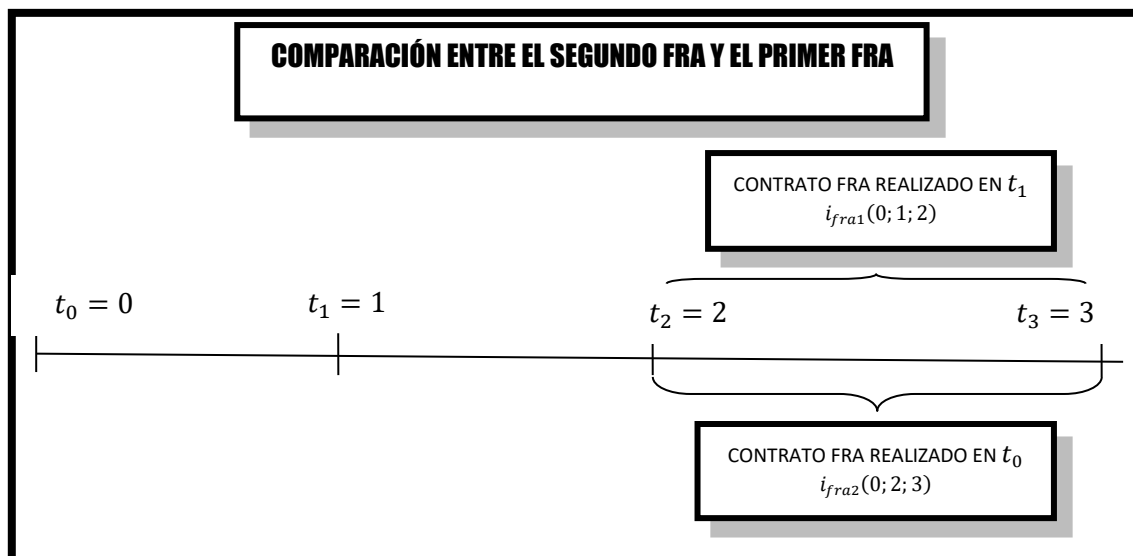
ESCENARIO II

$$i_{futura}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 < i_{futura}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

Con lo cual

$$i_{fra}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 < i_{fra}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

Con lo cual el costo que debe abonar por un préstamo la persona que realizó el FRA en t_1 en el periodo $\overline{t_2 t_3}$ ES MENOR que el que realizó el primer FRA,



El SEGUNDO CONTRATO tiene un valor de cero en el momento t_1 porque la TASA FRA es igual a la tasa futura, por lo tanto, el VALOR DEL PRIMER FRA es igual a

$$\frac{(i_{fra2}(0; 1; 2) - i_{fra1}(0; 2; 3)) \times Nominal}{(1 + i_c(0; 2; 2))}$$

Por lo cual

$$\frac{(i_f(0; 1; 2) - i_{fra1}(0; 2; 3)) \times Nominal}{(1 + i_c(0; 2; 2))}$$

También tenemos que

$$\frac{NOMINAL \times (R_f - R_K) \times (t_3 - t_2)}{1 + R_M \times (t_3 - t_2)}$$

VALOR DE UN CONTRATO FRA EN POSICIÓN SHORT

CONDICIONES DEL CONTRATO FRA REALIZADO EN EL MOMENTO t_0

Se toma un POSICIÓN SHORT en un CONTRATO FRA en el momento $t_0 = 0$ y se pacta una tasa $i_{fra}(0; 2; 3)$ para el periodo $\overline{t_2 t_3}$

CONDICIÓN DE NO ARBITRAJE

$$i_{fra}(0; 2; 3) = i_{futura}(0; 2; 3)$$

Para el cálculo de $i_f(0; 2; 3)$ se utiliza la ETTI de t_0 .

Pasa un año....

En t_1 (nuevo hoy)

CONDICIONES DEL CONTRATO FRA REALIZADO EN EL MOMENTO t_1

Se realiza el segundo CONTRATO FRA y se toma un POSICIÓN SHORT. Se pacta una TASA FRA igual a $i_{fra}(0; 1; 2)$ que es para el periodo $\overline{t_2 t_3}$.

CONDICIÓN DE NO ARBITRAJE

$$i_{fra}(0; 1; 2) = i_{futura}(0; 1; 2)$$

Para el cálculo de $i_f(0; 1; 2)$ se utiliza la ETTI de t_1 .

Si

$$i_{futura}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 \neq i_{futura}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

Luego

$$i_{fra}(0; 1; 2) \text{ hecho en } t_1 \neq i_{fra}(0; 2; 3) \text{ hecho en } t_0$$

Entonces es posible determinar un valor para el FRA hecho en t_0 .

Si

$$i_{futura}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 = i_{futura}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

Luego

$$i_{fra}(0; 1; 2) \text{ hecho en } t_1 = i_{fra}(0; 2; 3) \text{ hecho en } t_0$$

Entonces el valor del FRA hecho en t_0 es cero.

La persona que posee el FRA hecho en t_0 lo guardo todo un año hasta t_1 , en ese momento se realiza el nuevo FRA para el mismo periodo de tiempo $\overline{t_2 t_3}$.

ESCENARIO I

$$i_{futura}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 < i_{futura}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

Con lo cual

$$i_{fra}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 < i_{fra}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

Con lo cual la rentabilidad que obtiene la persona que realizó el FRA en t_1 en un deposito en el periodo $\overline{t_2 t_3}$ ES MENOR que la que obtiene el que realizó el primer FRA para el mismo periodo.

ESCENARIO II

$$i_{futura}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 > i_{futura}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

Con lo cual

$$i_{fra}(0; 1; 2) \text{ de } t_1 > i_{fra}(0; 2; 3) \text{ de } t_0$$

Con lo cual la rentabilidad que obtiene la persona que realizó el FRA en t_1 en un deposito en el periodo $\overline{t_2 t_3}$ ES MAYOR que la que obtiene el que realizó el PRIMER FRA para el mismo periodo.

Como el VALOR DEL SEGUNDO CONTRA FRA en el momento t_1 es igual a cero, el valor del PRIMER CONTRATO FRA es igual a

$$\frac{(i_{fra1}(0; 1; 2) - i_{fra2}(0; 2; 3)) \times Nominal}{(1 + i_c(0; 2; 2))}$$

Por lo cual

$$\frac{(i_{fra}(0; 1; 2) - i_f(0; 2; 3)) \times Nominal}{(1 + i_c(0; 2; 2))}$$

$$\frac{NOMINAL \times (R_K - R_f) \times (t_3 - t_2)}{1 + R_M \times (t_3 - t_2)}$$

VALUACIÓN EN TIEMPO CONTINUO

Nuevamente comparamos dos FRAs.

PRIMER CONTRATO FRA

Promete que se ganará la TASA A PLAZO LIBOR R_f sobre el principal de L entre las fechas T_1 y T_2 .

SEGUNDO CONTRATO FRA

Promete que se ganará la R_K sobre el mismo principal y entre las dos mismas fechas.

Ambos contratos son iguales, excepto por los pagos de intereses que se recibirán en la fecha T_2 .

VALOR ADICIONAL DEL SEGUNDO CONTRATO SOBRE EL PRIMERO

Es igual al valor presente de las diferencias entre pagos de intereses

$$L \times (R_K - R_f) \times (T_2 - T_1) \times e^{-R_2 T_2}$$

Donde R_2 es la tasa cero libre de riesgo continuamente compuesta para un vencimiento en T_2 .

Como el valor del FRA en el que se recibe R_f es de cero, el valor del FRA en el que se recibe R_K es

$$V_{FRA} = L \times (R_K - R_f) \times (T_2 - T_1) \times e^{-R_2 T_2}$$

El valor de un FRA en el que se paga R_K es

$$V_{FRA} = L \times (R_f - R_K) \times (T_2 - T_1) \times e^{-R_2 T_2}$$

Si tomamos ambos payoffs tanto de la POSICIÓN LONG como de la POSICIÓN SHORT

POSICIÓN SHORT

$$L \times (R_K - R_M) \times (T_2 - T_1)$$

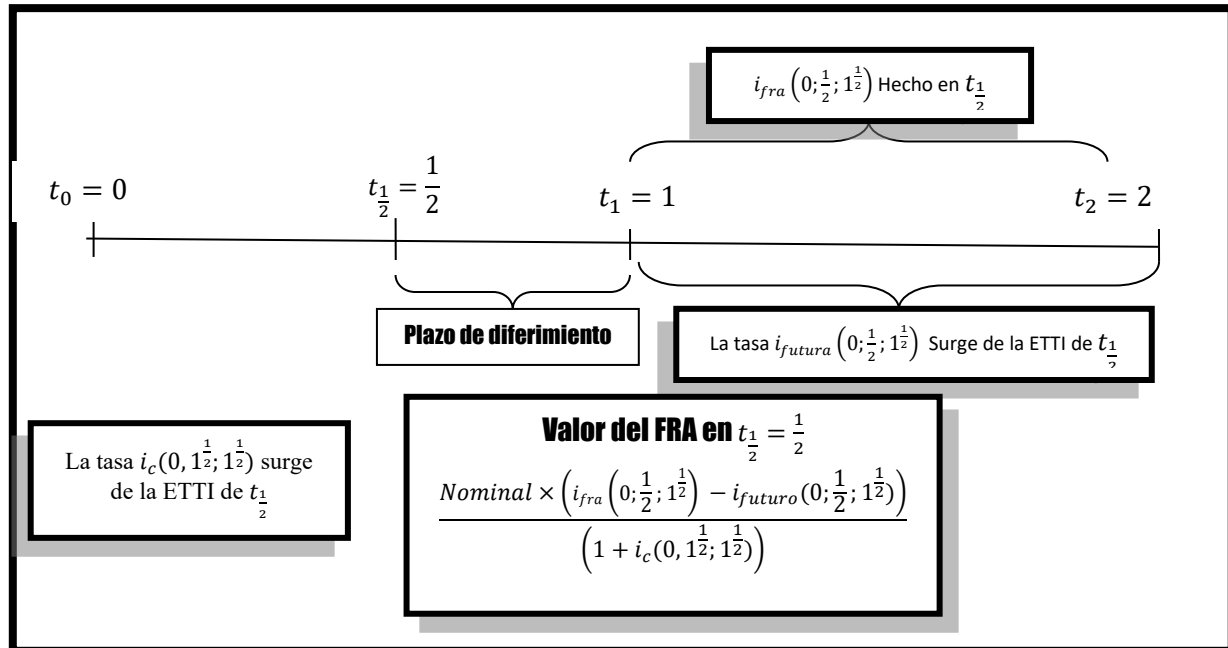
POSICIÓN LONG

$$L \times (R_M - R_K) \times (T_2 - T_1)$$

Vemos un FRA se puede valuar si:

1. Calculamos el pago en el supuesto de que se obtienen las tasas a plazo, es decir, en el supuestos de que $R_M = R_f$
2. Descontamos este pago a la tasa libre de riesgo.

VALUACIÓN DE UN CONTRATO FRA EN UN MOMENTO INTERMEDIO



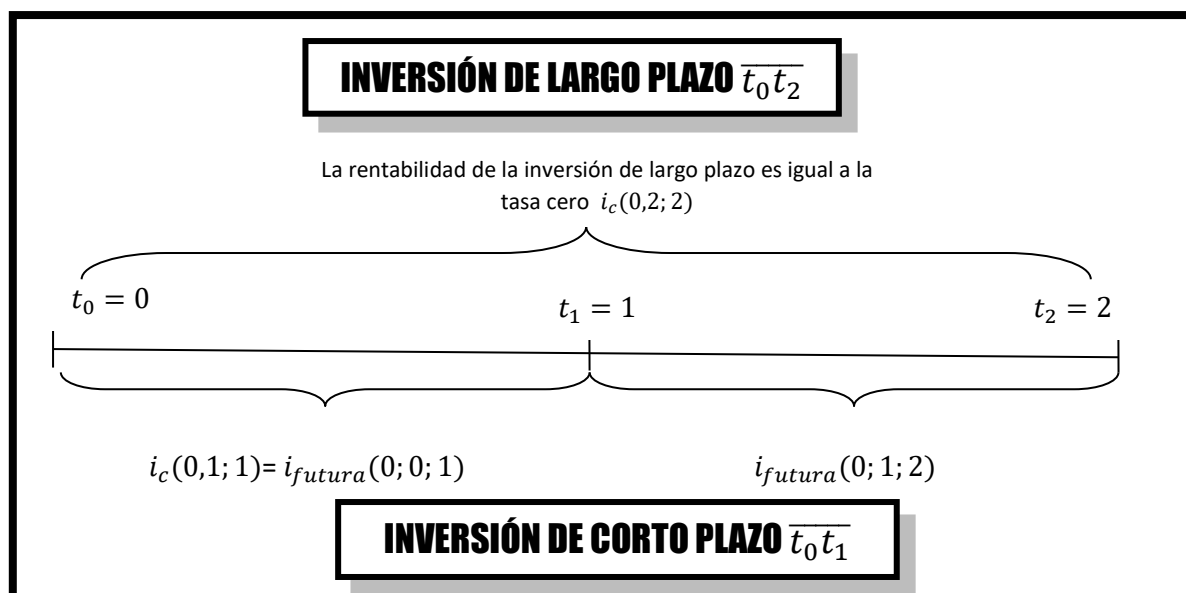
Parte 2

HORIZONTE DE INVERSIÓN DE LARGO PLAZO

PERIODO $\overline{t_0 t_2}$

HORIZONTE DE INVERSIÓN DE CORTO PLAZO

PERIODO $\overline{t_0 t_1}$



INVERSIÓN DE CORTO PLAZO

Entre t_0 y t_1

Hoy	t_1
Deposita 1\$	Obtiene $FD^{-1}(t_1)$

Donde

$$FD(t_1) = \frac{1}{(1 + r(t_0; t_1 - t_0) \times (t_1 - t_0))}$$

Y

$$FD(t_1)^{-1} = [1 + r(t_0; t_1 - t_0) \times (t_1 - t_0)]$$

Donde

$$r(t_0; t_1 - t_0) = \text{Tasa nominal anual con capitalización para el periodo } \overline{t_0 t_1}$$

La cual es una tasa conocida en el momento t_0

Entre t_1 y t_2

t_1	t_2
Reinvierto $FD^{-1}(t_0, t_1 - t_0) = FD^{-1}(t_1)$	Obtiene $FD^{-1}(t_1) \times FD^{-1}(t_1; t_2 - t_1)$

Donde

$$FD(t_1; t_2 - t_1) = \frac{1}{(1 + r(t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1))}$$

Y

$$FD(t_1; t_2 - t_1)^{-1} = [1 + r(t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1)]$$

Donde

$$r(t_1; t_2 - t_1) = \text{Tasa nominal anual con capitalización para el periodo } \overline{t_1 t_2}$$

Esta tasa que es spot es desconocida en t_0 y por lo tanto $FD(t_1; t_2 - t_1)$ también lo es.

INVERSIÓN DE LARGO PLAZO

Hoy	t_2
Deposita 1\$	Obtiene $FD^{-1}(t_0; t_2 - t_0) = FD^{-1}(t_2)$

Donde

$$FD(t_2) = \frac{1}{(1 + r(t_0; t_2 - t_0) \times (t_2 - t_0))}$$

Y

$$FD(t_2)^{-1} = [1 + r(t_0; t_2 - t_0) \times (t_2 - t_0)]$$

Donde

$$r(t_0; t_2 - t_0) = \text{Tasa nominal anual con capitalización para el periodo } \overline{t_0 t_2}$$

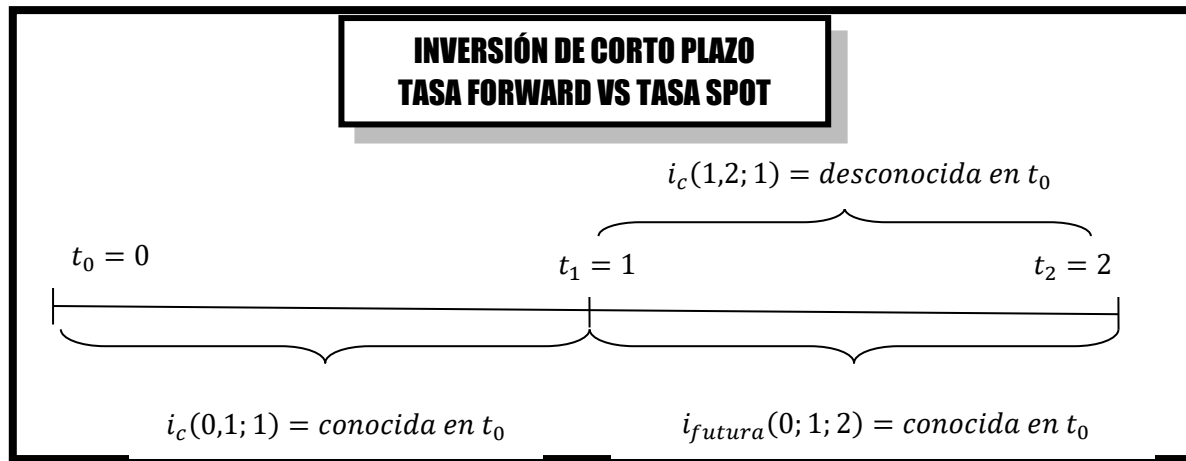
La cual es una tasa conocida en el momento t_0

COMBINADO AMBAS INVERSIONES

$$FD^{-1}(t_1) \times FDF^{-1}(t_1; t_2 - t_1) = FD^{-1}(t_2)$$

Donde

$$FDF^{-1}(t_1; t_2 - t_1) = \text{Factor de descuento forward para el periodo } \overline{t_1 t_2}.$$



La tasa forward $f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1)$ es conocida en t_0 y por lo tanto $FDF^{-1}(t_1; t_2 - t_1)$ también lo es. Como se ve esta tasa está implícita en $FD^{-1}(t_2)$ ya que es la que hace indiferentes ambas inversiones. Pero la tasa real no es la tasa forward son distintas cosas. Una es incierta mientras la otra no.

Se obtiene la formula arriba mencionada al comienzo de esta sección.

$$FD^{-1}(t_1) \times [1 + f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1)] = FD^{-1}(t_2)$$

En una forma más conocida

$$[1 + r(t_0; t_1 - t_0) \times (t_1 - t_0)] \times [1 + f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1)] = [1 + r(t_0; t_2 - t_0) \times (t_2 - t_0)]$$

Si las expresamos en tasas efectivas

$$r(t_0; t_1 - t_0) \times (t_1 - t_0) = i_c(0; t_1; t_1)$$

$$f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1) = i_f(0; t_1; t_2 - t_1) = f^{Efectiva\ anual}(0; t_1; t_2 - t_1)$$

Por lo tanto

$$[1 + i_c(0; t_1; t_1)] \times [1 + i_f(0; t_1; t_2 - t_1)] = [1 + i_c(0; t_2; t_2)]$$

Luego

$$FD^{-1}(t_1) \times [1 + f^{Efectiva\ anual}(0; t_1; t_2 - t_1)]^{(t_2 - t_1)} = FD^{-1}(t_2)$$

O en tiempo continuo

$$FD^{-1}(t_1) \times e^{f^{Compuesta\ continua}(0; t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1)} = FD^{-1}(t_2)$$

$$FDF(t_1; t_2 - t_1) = \frac{FD^{-1}(t_2)}{FD^{-1}(t_1)} = \frac{FD(t_1)}{FD(t_2)} > 1$$

El FACTOR DE DESCUENTO FORWARD es menor a 1 porque todos los factores de descuento son decrecientes con respecto a t . Esto ocurre por LA LEY VALOR DEL DINERO el cual implica que a más largos plazos se debe capitalizar más intereses. Al realizar el descuento hay que quitar mayor cantidad de intereses a una inversión de largo plazo con respecto a uno de corto plazo. Por lo tanto

$$FD(t_2) < FD(t_1) \text{ para } t_2 > t_1$$

EJERCICIO

Demostrar que si

$$FD(t_2) > FD(t_1) \text{ para } t_2 > t_1$$

Hay oportunidades de arbitraje

DEMOSTRACIÓN

$$FD(t_2) > FD(t_1)$$

$$\frac{1}{FD(t_1)} > \frac{1}{FD(t_2)}$$

$$FD^{-1}(t_1) > FD^{-1}(t_2)$$

Por lo tanto

$$[1 + r(t_0; t_1 - t_0) \times (t_1 - t_0)] > [1 + r(t_0; t_2 - t_0) \times (t_2 - t_0)]$$

Si multiplicamos ambos lados por un CAPITAL INICIAL C_0

$$C_0 \times [1 + r(t_0; t_1 - t_0) \times (t_1 - t_0)] > C_0 \times [1 + r(t_0; t_2 - t_0) \times (t_2 - t_0)]$$

Por lo tanto para obtener una ganancia por arbitraje hay que realizar la siguiente estrategia en el momento t_0

MERCADO DE LARGO PLAZO	MERCADO DE CORTO PLAZO
TOMAR UN PRÉSTAMO	REALIZAR UN DEPOSITO

INVERSIÓN DE CORTO PLAZO

Entre t_0 y t_1

Hoy	t_1
Deposita 1\$	Obtiene $FD^{-1}(t_1)$

Entre t_1 y t_2

t_1	t_2
Reinvierto $FD^{-1}(t_0, t_1 - t_0) = FD^{-1}(t_1)$	Obtiene $FD^{-1}(t_1) \times FD^{-1}(t_1; t_2 - t_1)$

INVERSIÓN DE LARGO PLAZO

Hoy	t_2
Préstamo 1\$	Se paga $FD^{-1}(t_0; t_2 - t_0) = FD^{-1}(t_2)$

EN CONJUNTO

t_0	t_1	t_2
Préstamo 1\$		$FD^{-1}(t_2)$
Deposita (1\$)	Cobra deposito $FD^{-1}(t_1)$	
	Reinvierte $FD^{-1}(t_1)$	Cobra deposito $FD^{-1}(t_1) \times FD^{-1}(t_1; t_2 - t_1)$
Saldo 0	Saldo 0	$FD^{-1}(t_1) \times FD^{-1}(t_1; t_2 - t_1) - FD^{-1}(t_2)$

Si

$$FD^{-1}(t_1) \times FD^{-1}(t_1; t_2 - t_1) - FD^{-1}(t_2) > 0 \text{ Hay ganancia por arbitraje}$$

Si

$$FD^{-1}(t_1) \times FD^{-1}(t_1; t_2 - t_1) - FD^{-1}(t_2) \leq 0 \text{ No hay ganancia por arbitraje}$$

Tenemos que

$$FD(t_1; t_2 - t_1)^{-1} = [1 + r(t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1)] > 1$$

Como también

$$FD^{-1}(t_1) > FD^{-1}(t_2)$$

Si bien es cierto que la tasa spot entre $\overline{t_1 t_2}$ es incierta, sin importar su valor hay una ganancia por arbitraje porque su factor de capitalización es mayor que uno siempre.

DETERMINACIÓN DE LA TASA FORWARD

$$f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) = \left[\frac{FD(t_1)}{FD(t_2)} - 1 \right] \times \frac{1}{(t_2 - t_1)}$$

$$f^{Efectiva\ anual}(0; t_1; t_2 - t_1) = \left[\frac{FD(t_1)}{FD(t_2)} - 1 \right]^{\frac{1}{(t_2 - t_1)}}$$

Se puede colocar dinero y tomar créditos a la tasa forward

Tenemos

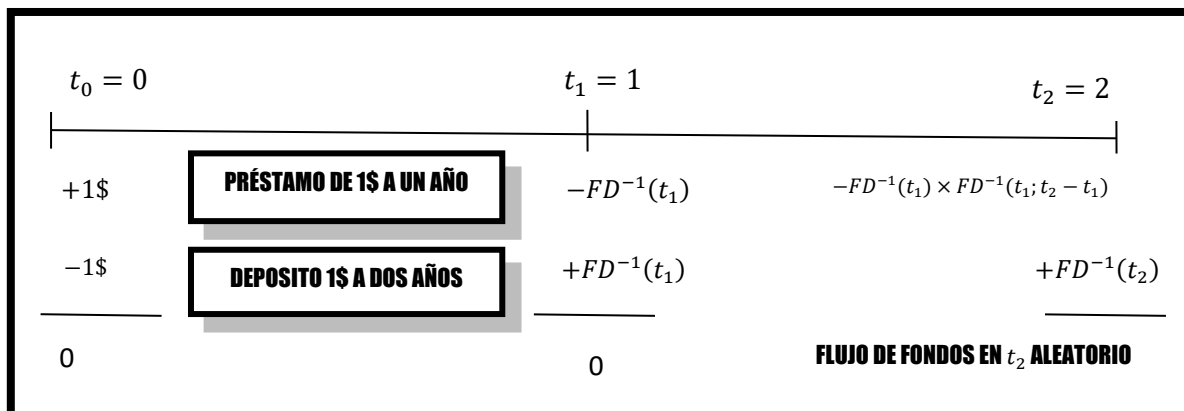
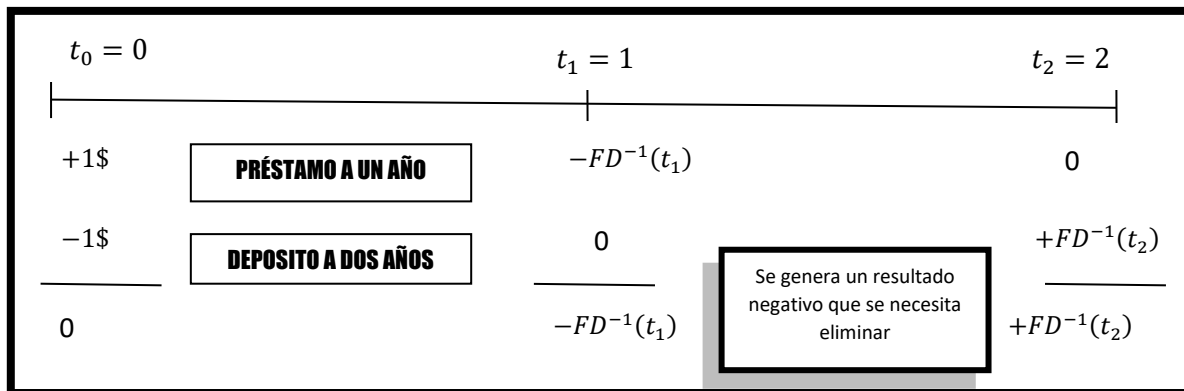
$$FD^{-1}(t_2) = FD^{-1}(t_1) \times (1 + f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1))$$

Con lo cual

$$f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) = \left[\frac{FD(t_1)}{FD(t_2)} - 1 \right] \times \frac{1}{(t_2 - t_1)}$$

En definitiva, la TASA FORWARD es aquella tasa que hace indiferente ambas inversiones: la INVERSIÓN de LARGO PLAZO y la INVERSIÓN de CORTO PLAZO.

ESTRATEGIA



COMBINADO AMBAS ESTRATEGÍAS

RESULTADO ALEATORIO

$$FD^{-1}(t_2) - FD^{-1}(t_1) \times FD^{-1}(t_1; t_2 - t_1)$$

Reemplazando $FD^{-1}(t_2)$ que tiene implícita la tasa forward

$$FD^{-1}(t_1) \times (1 + f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1)) - FD^{-1}(t_1) \times FD^{-1}(t_1; t_2 - t_1)$$

Donde

$$FD^{-1}(t_1; t_2 - t_1) = (1 + r^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1))$$

Donde

$$r^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) = \text{Es incierta}$$

$$FD^{-1}(t_1) \times (1 + f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1)) - FD^{-1}(t_1) \times (1 + r^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1))$$

Sacando factor común

$$FD^{-1}(t_1) \times (t_2 - t_1) \times [f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) - r^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1)]$$

Es un CONTRATO FRA, que nos dice esto exactamente porque se fija una tasa en t_0 y permite eliminar el riesgo de tasa de interés.

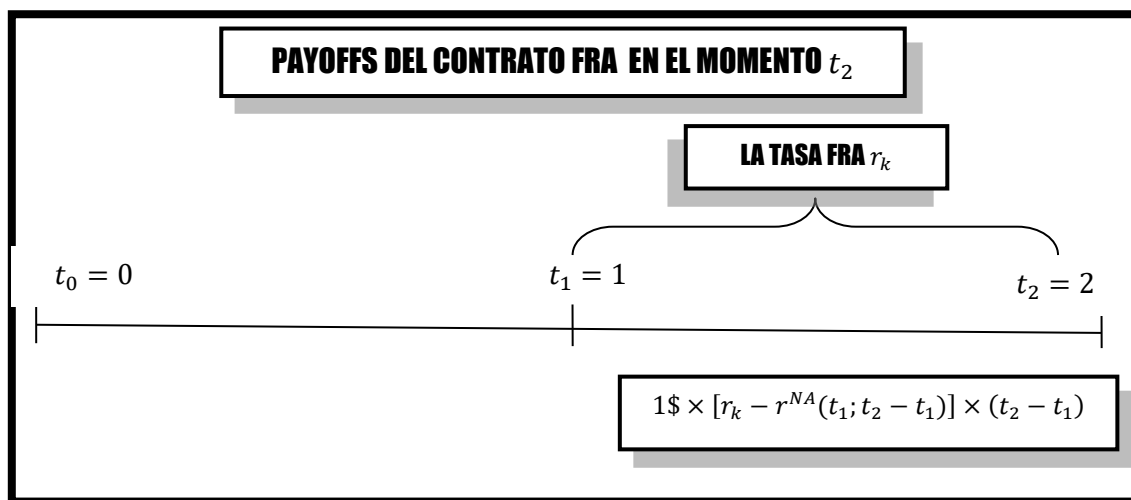
TASA FRA DEL CONTRATO FRA

$$r_k = f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1)$$

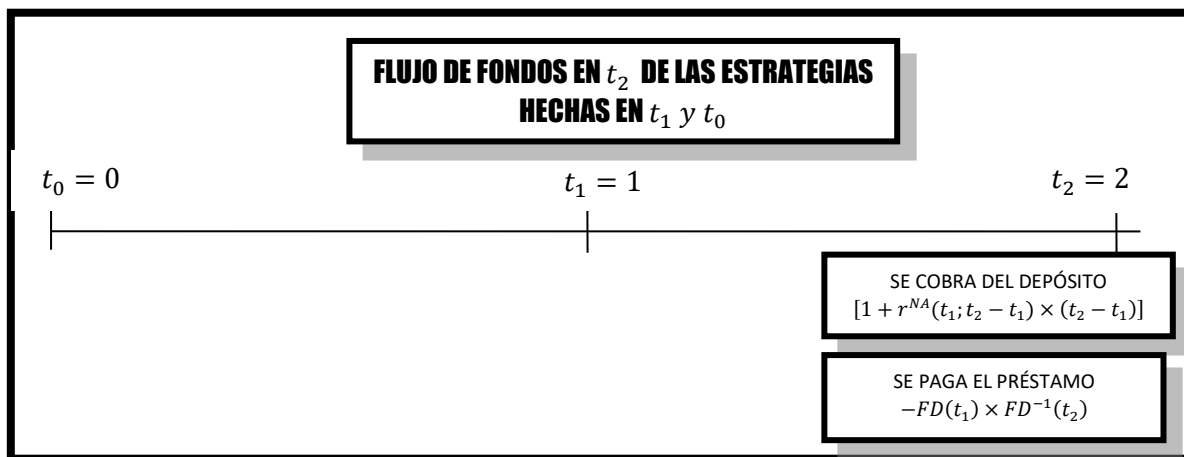
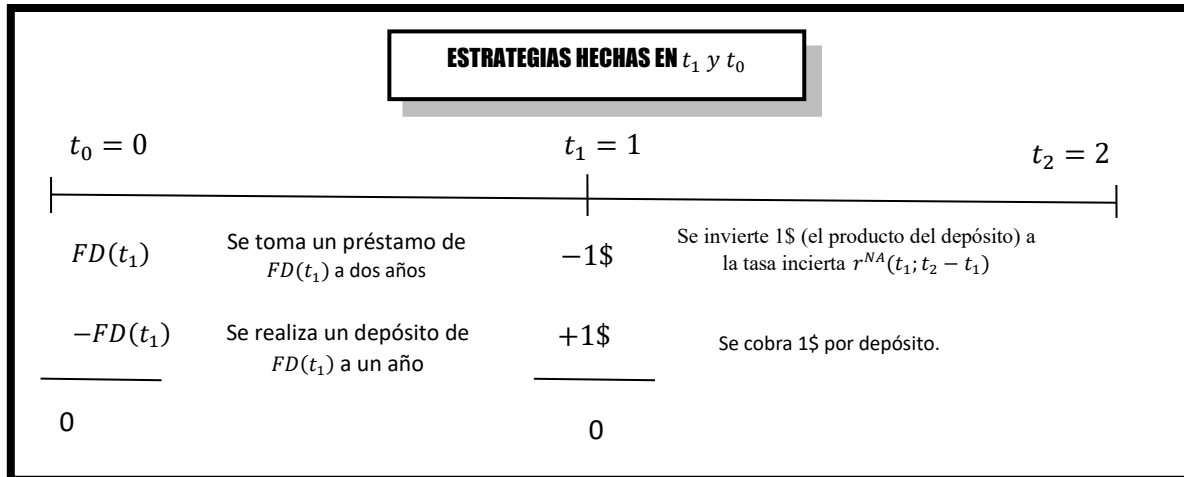
ESTRATEGIA PARA SACARLE LA ALEATORIEDAD AL FRA

La aleatoriedad del FRA proviene del hecho de no conocer la tasa spot, se puede demostrar que si se realiza una determinada estrategia se hace cierto el pago que realiza el FRA.

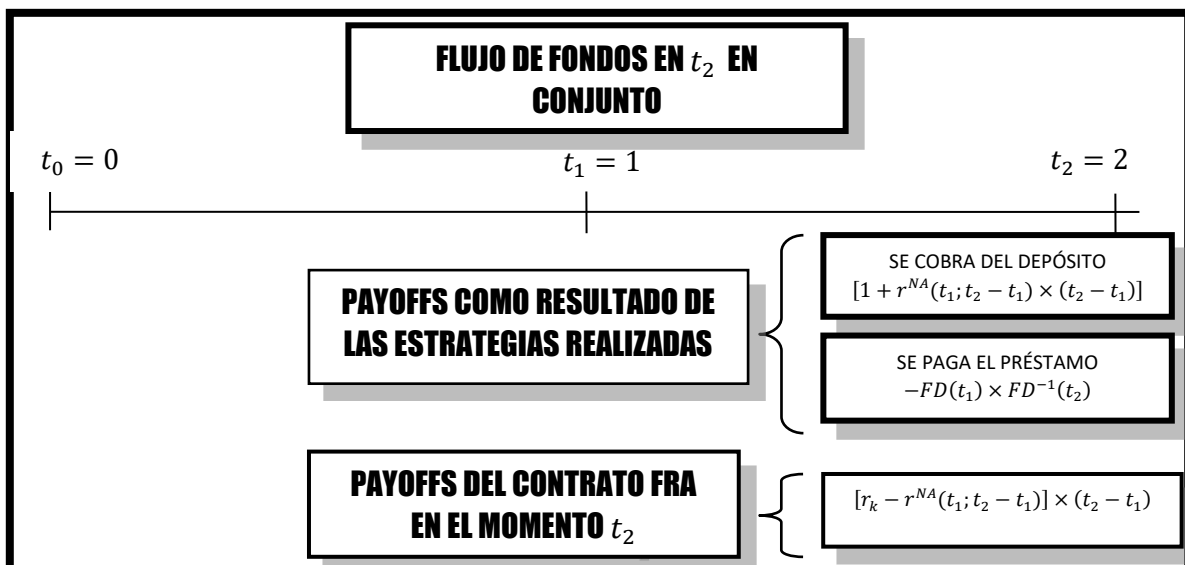
En el momento t_0 se realiza un FRA que elimina el riesgo de tasas de interés donde se pacta una tasa r_k para el periodo $t_1 t_2$ con un Nocional de 1\$ a un costo de cero.



ESTRATEGIAS



FLUJO DE FONDOS EN t_2 EN CONJUNTO



El flujo de fondos en el momento t_2 es igual a

$$[r_k - r^{NA}(t_1; t_2 - t_1)] \times (t_2 - t_1) + (1 + r^{NA}(t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1)) - FD(t_1) \times FD^{-1}(t_2)$$

Realizamos la distributiva

$$r_k \times (t_2 - t_1) - r^{NA}(t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1) + (1 + r^{NA}(t_1; t_2 - t_1) \times (t_2 - t_1)) - FD(t_1) \times FD^{-1}(t_2)$$

$$FD(t_1) \times FD^{-1}(t_2) = \frac{FD(t_1)}{FD(t_2)}$$

Luego

$$1 + r_k \times (t_2 - t_1) - \frac{FD(t_1)}{FD(t_2)}$$

Hacemos el siguiente arreglo

$$r_k \times (t_2 - t_1) - \left[\frac{FD(t_1)}{FD(t_2)} - 1 \right]$$

Sacamos factor común $(t_2 - t_1)$

$$(t_2 - t_1) \times \left[r_k - \left[\frac{FD(t_1)}{FD(t_2)} - 1 \right] \times \frac{1}{(t_2 - t_1)} \right]$$

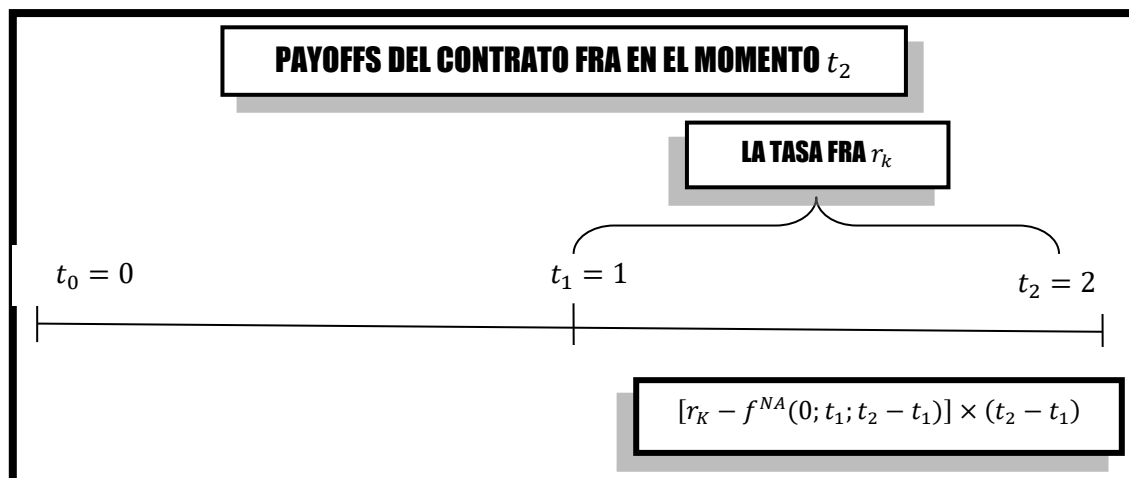
Donde

$$f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1) = \left[\frac{FD(t_1)}{FD(t_2)} - 1 \right] \times \frac{1}{(t_2 - t_1)}$$

Por lo tanto

$$(t_2 - t_1) \times [r_k - f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1)]$$

Luego obtenemos un flujo cierto y por lo tanto libre de toda incertidumbre en t_2 .



ESCENARIO I

$$r_k = f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1)$$

Luego

$$[r_K - f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1)] \times (t_2 - t_1) = 0$$

Por lo tanto el flujo de fondos en el momento t_2 es igual a cero.

ESCENARIO II

$$r_K > f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1)$$

Luego

$$[r_K - f^{NA}(0; t_1; t_2 - t_1)] \times (t_2 - t_1) > 0$$

Por lo tanto el flujo de fondos en el momento t_2 es positivo.

Capítulo 3: CONTRATOS A PLAZO Y FUTUROS SOBRE DIVISAS

Se considerará la perspectiva de un inversionista estadounidense.

ACTIVO SUBYACENTE DEL CONTRATO A FUTUROS

Es una unidad de la divisa

PRECIO SPOT ACTUAL EN DÓLARES DE UNA UNIDAD DE LA DIVISA

Se trata del tipo de cambio actual en dólares S_0

EL PRECIO A PLAZO O DE FUTUROS EN DÓLARES DE UNA UNIDAD DE LA DIVISA

Se trata del tipo de cambio a plazo o a futuro en dólares F_0

Una divisa tiene la propiedad de que el tenedor de la moneda puede ganar intereses a la tasa de interés libre de riesgo vigente en el país extranjero. Por ejemplo el tenedor puede invertir la moneda en un bono denominado en moneda extranjera. Por lo cual se definen las siguientes variables:

LA TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO EN MONEDA EXTRANJERA

Esto cuando el dinero se invierte durante el periodo T . Se trata de la variable r_f

LA TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO DOMÉSTICA

Se trata de la variable r

RELACIÓN DE LA PARIDAD DE LA TASA DE INTERÉS EN FINANZAS INTERNACIONALES

PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE

La relación entre F_0 y S_0 es igual a

$$F_0 = S_0 \times e^{(r-r_f) \times T}$$

Para demostrar esta relación debemos notar que hay dos maneras de invertir 1.000 unidades de moneda extranjera

INVERTIR A LA TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO EN MONEDA EXTRANJERA

LA CANTIDAD DE LA DIVISAS EN CARTERA EN EL MOMENTO $t = 0$	SE REALIZA UN CONTRATO A FUTURO CON UN EL TIPO DE CAMBIO FUTURO EN $t = 0$	SE INVIERTE A LA TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO EXTRANJERA Y SU RESULTADO EN EL MOMENTO $t = T$ ES IGUAL A	SE CAMBIA EL PRODUCTO DE LA INVERSIÓN A DÓLARES EN EL MOMENTO $t = T$
1.000 unidades	F_0	$1.000 \times e^{r_f T}$	$1.000 \times e^{r_f T} \times F_0$

INVERTIR A LA TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO DOMÉSTICA

LA CANTIDAD DE LA DIVISAS EN CARTERA EN EL MOMENTO $t = 0$	EL TIPO DE CAMBIO SPOT EN $t = 0$	SE CAMBIAN LAS 1.000 UNIDADES DE DIVISA EN DÓLARES EN EL MOMENTO $t = 0$	SE INVIERTE A LA TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO DOMÉSTICA Y SU RESULTADO EN EL MOMENTO $t = T$ ES IGUAL A
1.000 unidades	S_0	$1.000 \times S_0$	$1.000 \times S_0 \times e^{rT}$

IGUALANDO AMBAS

$$1.000 \times e^{r_f T} \times F_0 = 1.000 \times S_0 \times e^{rT}$$

Con lo cual llegamos al resultado buscado

$$F_0 = S_0 \times e^{(r-r_f) \times T}$$

OPORTUNIDADES DE ARBITRAJE EN CONTRATOS A FUTURO SOBRE DIVISAS

ENUNCIADO

La tasa de interés libre de riesgo a dos años en Australia es igual a 5% y la tasa de interés libre de riesgo en Estados Unidos es igual a 7%. El tipo de cambio spot entre el dólar australiano (AUD) y el dólar estadounidense (USD) es de 0,62 dólares por AUD. Supongamos que dos escenarios para el tipo de cambio a plazo

1. El tipo de cambio a plazo es igual a 0,63
2. El tipo de cambio a plazo es igual a 0,66

Verificar si es posible realizar un arbitraje y de ser la respuesta positiva detallar las estrategias y la ganancia por arbitraje que se obtiene

RESOLUCIÓN**PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE**

$$F_0 = S_0 \times e^{(r-r_f) \times T} = 0,62 \times e^{(0,07-0,05) \times 2} = 0,6453$$

Este debería ser el tipo de cambio a plazo para que no existan oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje

PRIMER ESCENARIO

$$S_0 = 0,62\$ \quad F_0 = 0,63\$ \quad r = 7\% \text{ anual} \quad r_f = 5\% \text{ anual} \quad T = 2 \text{ años}$$

Como vemos el tipo de cambio a plazo es menor al precio libre de arbitraje por lo cual hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje. Como la divisa a futuro está más barata de lo que debería, por lo cual, se toma una POSICIÓN LONG o comprada en un CONTRATO A FUTUROS SOBRE DIVISAS.

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Se realiza un PRÉSTAMO de 1.000 AUD a la tasa de interés libre de riesgo en moneda extranjera r_f y se los cambia a dólares al tipo de cambio spot $S_0 = 0,62\$$	620\$
Se realiza un depósito a la tasa de interés libre de riesgo doméstica r por 620\$	-620\$
Tomar una POSICIÓN LONG en un CONTRATO A PLAZO sobre DIVISAS para comprar $1000 \times e^{r_f \times 2}$ AUD a un tipo de cambio a plazo $F_0 = 0,63\$$	0
BENEFICIO EN $t = 0$	0

Donde

$$1000 \times e^{r_f \times 2} = 1.105,170918 \text{ AUD}$$

Si lo llevamos a dólares a través del tipo de cambio a plazo

$$1.105,170918 \times F_0 = 1.105,170918 \times 0,63 = 696,2577\$$$

EN EL MOMENTO $t = T$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 2$	
Se cobra el depósito y se COMPRAN $1000 \times e^{r_f \times 2}$ AUD al tipo de cambio a plazo $F_0 = 0,63\$$	$620\$ \cdot e^{0,07 \times 2} = 713,1687\$$
PAGAR EL PRÉSTAMO	$-696,2577\$$
BENEFICIO EN $t = 2$	16,9111\$

SEGUNDO ESCENARIO

$$S_0 = 0,62\$ \quad F_0 = 0,66\$ \quad r = 7\% \text{ anual} \quad r_f = 5\% \text{ anual} \quad T = 2 \text{ años}$$

Como vemos el tipo de cambio a plazo es menor al precio libre de arbitraje por lo cual hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje. Como la divisa a futuro está más caro de lo que debería, por lo cual se toma una POSICIÓN SHORT o vendida en un CONTRATO A PLAZO SOBRE DIVISAS.

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Se realiza un PRÉSTAMO EN DÓLARES de 1.000\$ a la tasa de interés libre de riesgo doméstica r y se los cambia a moneda extranjera AUD al tipo de cambio spot $S_0 = 0,62\$$	620\$
Se realiza un DEPÓSITO de 1.612,903226 AUD a la tasa de interés libre de riesgo en moneda extranjera r_f	-620\$
Tomar una POSICIÓN SHORT en un CONTRATO A PLAZO sobre DIVISAS para vender $1.612,903226 \times e^{r_f \times 2}$ AUD a un tipo de cambio a plazo $F_0 = 0,66\$$	0
BENEFICIO EN $t = 0$	0

Donde

$$1.612,903226 \times e^{r_f \times 2} = 1.782,533739 \text{ AUD}$$

Si lo llevamos a dólares a través del tipo de cambio a plazo

$$1.782,533739 \times F_0 = 1.782,533739 \times 0,66 = 1.176,472268\$$$

EN EL MOMENTO $t = T$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 2$	
Se cobra el depósito hecho en AUD y se VENDEN 1.782,533739 AUD	1.176,472268\$

al tipo de cambio a plazo $F_0 = 0,66\$$	
PAGAR EL PRÉSTAMO	$-1000\$ \cdot e^{0,07 \times 2} = -1.150,2738\$$
BENEFICIO EN $t = 2$	26,1985\$

CUADRO RESUMEN DE LAS ESTRATEGÍAS DE ARBITRAJE EN CONTRATOS A PLAZO O FUTUROS SOBRE DIVISAS

POSICIÓN EN CONTRATO A PLAZO SOBRE DIVISAS	ESTO IMPLICA	EN EL MOMENTO T SE NECESITA TENER EN CARTERA	LA ESTRATEGIA EN EL MOMENTO $t = 0$ PARA ASEGURAR LAS NECESIDADES DEL MOMENTO T
POSICIÓN LONG O COMPRADA	COMPRAR divisas en el momento T al tipo de cambio futuro F_0	Moneda local para pagar las divisas	HACER UN PRÉSTAMO EN MONEDA EXTRANJERA Y HACER UN DEPÓSITO EN MONEDA LOCAL
POSICIÓN SHORT O VENDIDA	VENDER divisas en el momento T al tipo de cambio futuro F_0	Las divisas para vender	HACER UN PRÉSTAMO EN MONEDA LOCAL Y HACER UN DEPÓSITO EN MONEDA EXTRANJERA

UNA DIVISA COMO UN ACTIVO QUE PROPORCIONA UN RENDIMIENTO CONOCIDO

Una divisa puede considerarse como una inversión que paga un dividendo conocido. El rendimiento es la tasa de interés libre de riesgo en moneda extranjera. Por lo cual $q = r_f$

CONTRATOS A PLAZO Y FUTUROS SOBRE ÍNDICES BURSÁTILES

En general un índice bursátil se considera como el precio de un activo de inversión que paga dividendos. El activo de inversión es la cartera de acciones subyacente al índice y los dividendos que paga el activo de inversión son los que recibiría el tenedor de esta cartera. Por lo general se asume que los dividendos proporcionan un rendimiento conocido en vez de un ingreso en efectivo conocido.

Si q es la tasa de rendimientos de dividendos, tenemos que el PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE DEL CONTRATO A PLAZO O A FUTURO es igual a

$$F_0 = I_0 \times e^{(r-q) \times T}$$

En la práctica, el rendimiento de dividendos sobre la cartera subyacente a un índice varía cada semana a lo largo del año. El valor elegido de q debe representar el rendimiento de dividendos anualizado promedio durante la vida del contrato.

OPORTUNIDADES DE ARBITRAJE EN CONTRATOS A FUTURO SOBRE DIVISAS

ESCENARIO I

$$F_0 < I_0 \times e^{(r-q) \times T}$$

ENUNCIADO

Suponga que la tasa libre de riesgo es de 10% anual con composición continua y que el rendimiento de dividendos sobre un índice bursátil es de 4% anual. El valor del índice es de 400 y el precio de futuros de un contrato con fecha de entrega en cuatro meses es de 405. ¿Qué oportunidades de arbitraje crea esta situación?

RESOLUCIÓN

PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE

$$F_0 = I_0 \times e^{(r-q) \times T} = 400 \times e^{(0,1-0,04) \times \frac{4}{12}} = 408,080536$$

Como vemos el precio de futuros es menor por lo cual hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar una posición SHORT en la cartera de acciones que subyacen al ÍNDICE al precio $S_0 = 400\$$	400\$
Tomar una POSICIÓN LONG en un CONTRATO SOBRE ÍNDICES con precio de futuro igual a $F_0 = 405\$$	0
Deposito a la tasa libre de riesgo	-400\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0

EN EL MOMENTO $t = T$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = T$	
Se cobra el depósito y teniendo en cuenta que HAY QUE PAGAR LOS RENDIMIENTOS QUE GENERARON LA CARTERA DE ACCIONES	$400\$ \times e^{(0,1-0,04) \times \frac{4}{12}} = 408,080536\$$
Se requiere devolver la cartera de acciones que se tomó a préstamo en el momento $t = 0$, por lo cual, se compran al precio futuro de $F_0 = 405\$$	-405\$
BENEFICIO EN $t = T$	3,080536\$

ESCENARIO II

$$F_0 > I_0 \times e^{(r-q) \times T}$$

ENUNCIADO

Suponga que la tasa libre de riesgo es de 10% anual con composición continua y que el rendimiento de dividendos sobre un índice bursátil es de 4% anual. El valor del índice es de 400 y el precio de futuros de un contrato con fecha de entrega en cuatro meses es de 410. ¿Qué oportunidades de arbitraje crea esta situación?

RESOLUCIÓN

PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE

$$F_0 = I_0 \times e^{(r-q) \times T} = 400 \times e^{(0,1-0,04) \times \frac{4}{12}} = 408,080536$$

Como vemos el precio de futuros es mayor por cual hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar una posición LONG en la cartera de acciones que subyacen al ÍNDICE al precio $S_0 = 400\$$	-400\$
Tomar una POSICIÓN SHORT en un CONTRATO SOBRE ÍNDICES con precio de futuro igual a $F_0 = 405\$$	0
PRÉSTAMO a la tasa libre de riesgo	400\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0

EN EL MOMENTO $t = T$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = T$	
Se paga el préstamo y teniendo en cuenta que HAY QUE COBRAR LOS RENDIMIENTOS QUE GENERARON LA CARTERA DE ACCIONES	$-400\$ \times e^{(0,1-0,04) \times \frac{4}{12}} = -408,080536\$$
Se vende la cartera de acciones al precio futuro de $F_0 = 405\$$	405\$
BENEFICIO EN $t = T$	3,080536\$

Los contratos a plazo o a futuros solamente se liquidan en efectivo.

CONTRATOS A PLAZO Y FUTUROS SOBRE ACCIÓN QUE NO PAGA DIVIDENDOS

El PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE DEL CONTRATO A PLAZO O A FUTURO es igual a

$$F_0 = S_0 \times e^{r \times T}$$

OPORTUNIDADES DE ARBITRAJE EN CONTRATOS A FUTURO SOBRE ACCIÓN QUE NO PAGA DIVIDENDOS

ESCENARIO I

$$F_0 < S_0 \times e^{r \times T}$$

ENUNCIADO

Sea un CONTRAZO A FUTURO con vencimiento en nueve meses que tiene como activo subyacente una acción que no paga dividendos cuya cotización hoy es de 10\$. Determinar el PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE si la tasa de interés libre de riesgo efectiva anual es de 10%. Calcule la ganancia por arbitraje que se obtendría si el precio a futuro fuera igual a 10,40\$. Explícite las estrategias realizadas.

RESOLUCIÓN

En primer lugar, vamos a llevar la tasa de interés efectiva anual a una tasa de interés continua compuesta

DE TASAS EFECTIVAS A TASAS EN COMPOSICIÓN CONTINUA

Debemos llevar las tasas efectivas anuales a tasas de composición continua para lo cual utilizamos la siguiente relación

$$1 + i_{365} = e^{\delta}$$

Si aplicamos logaritmo natural

$$\delta = \ln [1 + i_{365}]$$

Por lo tanto

$$\delta = \ln[1 + i_{365}] = 0,095310179$$

PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE

$$F_0 = S_0 \times e^{r \times T} = 10 \times e^{0,095310179 \times \frac{9}{12}} = 10,74099499\$$$

Como vemos el precio de futuros de mercado es igual a 10,40\$ que es menor por cual hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar una posición SHORT en una ACCIÓN al precio $S_0 = 10\$$	10\$
Tomar una POSICIÓN LONG en un CONTRATO PARA LA COMPRA DE UNA ACCIÓN con precio de futuro igual a $F_0 = 10,40\$$	0
Deposito a la tasa libre de riesgo	-10\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0

EN EL MOMENTO $t = T$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = T$	
Se cobra el depósito	$10 \times e^{0,095310179 \times \frac{9}{12}} = 10,74099499\$$
Se requiere devolver la ACCIÓN que se tomo a préstamo en el momento $t = 0$, por lo cual, se compran al precio futuro de $F_0 = 10,40\$$	-10,40\$

BENEFICIO EN $t = T$	0,340994986\$
--	---------------

La ganancia por arbitraje es igual a

$$F_{TEORICO} - F_0 = 0,340994986\$$$

ESCENARIO II

$$F_0 > S_0 \times e^{r \times T}$$

ENUNCIADO

Sea un CONTRAZO A FUTURO con vencimiento en nueve meses que tiene como activo subyacente una acción que no paga dividendos cuya cotización hoy es de 10\$. Determinar el PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE si la tasa de interés libre de riesgo efectiva anual es de 10%. Calcule la ganancia por arbitraje que se obtendría si el precio a futuro fuera igual a 11\$. Explícite las estrategias realizadas.

RESOLUCIÓN

PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE

$$F_0 = S_0 \times e^{r \times T} = 10 \times e^{0,095310179 \times \frac{9}{12}} = 10,74099499\$$$

Como vemos el precio de futuros es mayor por cual hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar una posición LONG en una ACCIÓN al precio $S_0 = 10\$$	-10\$
Tomar una POSICIÓN SHORT en un CONTRATO PARA LA VENTA DE UNA ACCIÓN con precio de futuro igual a $F_0 = 11\$$	0
PRÉSTAMO a la tasa libre de riesgo	10\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0

EN EL MOMENTO $t = T$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = T$	
Se paga el préstamo	$-10 \times e^{0,095310179 \times \frac{9}{12}} = -10,74099499\$$
Se vende UNA ACCIÓN al precio futuro de $F_0 = 11\$$	11\$
BENEFICIO EN $t = T$	0,25900501\$

La ganancia por arbitraje es igual a

$$F_0 - F_{TEORICO} = 0,25900501\$$$

VALOR DE CONTRATO A PLAZO ENUNCIADO

Un CONTRATO A PLAZO de un año sobre una acción que no paga dividendos comienza cuando el precio de la acción es de 40\$ y la tasa de interés libre de riesgo es de 10% anual compuesta continuamente.

- a) ¿Cuál es el PRECIO FORWARD y cuál es el valor inicial del CONTRATO A PLAZO?
- b) Luego de seis meses el precio de la acción es de 45\$ y la tasa libre de riesgo es 10%. ¿Cuál es el PRECIO FORWARD y cuál es el valor del CONTRATO A PLAZO?

RESOLUCIÓN

PARTE a)

ACTIVO SUBYACENTE DEL CONTRATO A PLAZO

Se trata de una acción que no paga dividendos

PRECIO ACTUAL DE LA ACCIÓN

$$S_0 = 40\$$$

TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO COMPUESTA CONTINUAMENTE

$$r = 0,10$$

PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE

$$F_0 = S_0 \times e^{r \times T} = 40\$ \times e^{0,10} = 44,20683672\$$$

VALOR DEL CONTRATO EN EL MOMENTO INICIAL

Al momento inicial el valor del CONTRATO A PLAZO es de cero, por el hecho de que no tiene costo realizar este tipo de acuerdo.

PARTE b)

Pasaron 6 meses.....

PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL MOMENTO $t = 0,5$

$$S_0 = 45\$$$

TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO COMPUESTA CONTINUAMENTE

$$r = 0,10$$

PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE

$$F_{0,5} = S_{0,5} \times e^{r \times T} = 45\$ \times e^{0,10} = 49,73269131\$$$

VALOR DEL CONTRATO EN EL MOMENTO $t = 0,5$ DEL CONTRATO HECHO EN $t = 0$

La persona que realizó el contrato en el momento $t = 0$ lo conservó en su poder hasta el momento $t = 0,5$, donde realizar el mismo contrato, con todos los términos iguales exceptuando que cambio el precio de ejercicio del contrato el cual pasó a ser $F_{0,5}$.

El precio de ejercicio del contrato que se realiza en $t = 0,5$ es

$$F_{0,5} = 49,73269131\$$$

EN EL CASO DE UNA COMPRA

SE TOMA UNA POSICIÓN LONG EN EL CONTRATO A PLAZO

Cuando se toma una posición larga o comprada en un contrato a plazo se busca asegurar un precio de compra en la fecha futura T , en este caso dentro de un año

Si el contrato de futuro que se realizó en $t = 0$ fue para comprar un activo, luego, en el momento $t = 0,5$ se tiene un contrato para comprar dentro de 6 meses al precio F_0 cuando realizar el mismo contrato tiene un precio de $F_{0,5}$ por lo cual el tenedor del primer contrato tiene una ganancia porque el pacto comprar el activo a un precio menor al que se puede realizar en $t = 0,5$.

EN LA FECHA DE ENTREGA DEL ACTIVO

CONTRATO DE FUTURO HECHO EN EL MOMENTO $t = 0$

$$\text{PRECIO DE COMPRA } F_0 = 44,20683672\$$$

CONTRATO DE FUTURO HECHO EN EL MOMENTO $t = 0,5$

$$\text{PRECIO DE COMPRA } F_{0,5} = 49,73269131\$$$

GANANCIA

$$F_{0,5} - F_0 = 49,73269131\$ - 44,20683672\$ = 5,52585459\$$$

GANANCIA EN EL MOMENTO $t = 0,5$

$$\frac{[F_{0,5} - F_0]}{e^{r \times \frac{1}{2}}} = \frac{5,52585459\$}{e^{0,10 \times 0,5}} = 5,256355482\$$$

El cual es el valor del contrato en el momento $t = 0,5$

EN EL CASO DE UNA VENTA

SE TOMA UNA POSICIÓN SHORT EN EL CONTRATO A PLAZO

Si el contrato de futuro que se realizó en $t = 0$ fue para vender un activo, luego

EN LA FECHA DE ENTREGA DEL ACTIVO

CONTRATO DE FUTURO HECHO EN EL MOMENTO $t = 0$

$$\text{PRECIO DE VENTA } F_0 = 44,20683672\$$$

CONTRATO DE FUTURO HECHO EN EL MOMENTO $t = 0,5$

$$\text{PRECIO DE VENTA } F_{0,5} = 49,73269131\$$$

PERDIDA

$$F_0 - F_{0,5} = 44,20683672\$ - 49,73269131\$ = -5,52585459\$$$

PERDIDA EN EL MOMENTO $t = 0,5$

$$\frac{[F_0 - F_{0,5}]}{e^{r \times \frac{1}{2}}} = \frac{-5,52585459\$}{e^{0,10 \times 0,5}} = -5,256355482\$$$

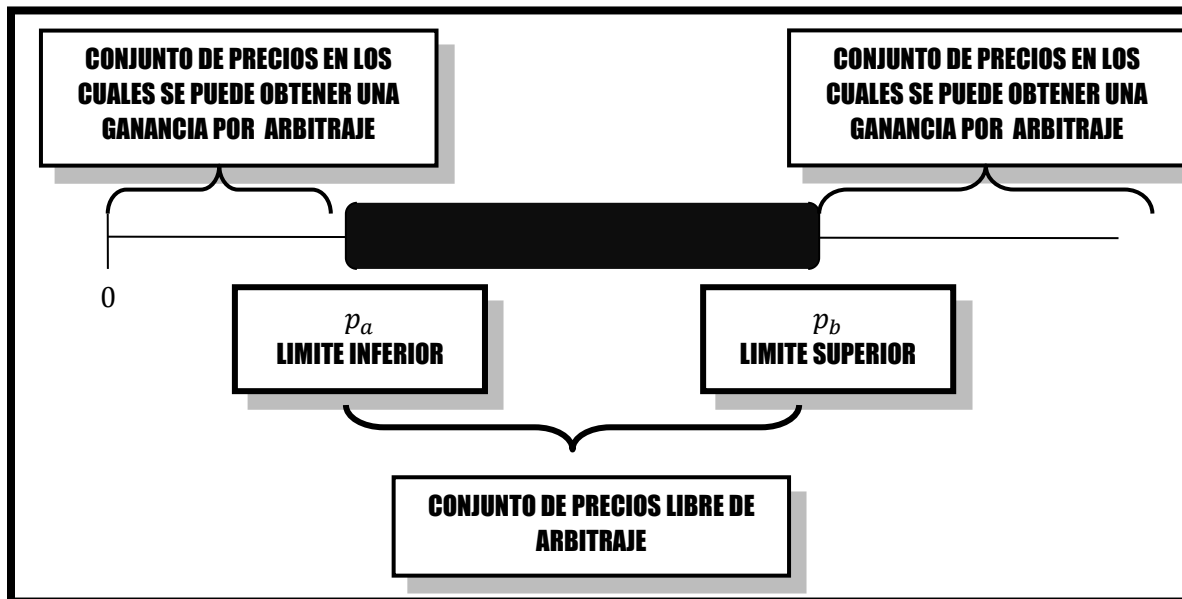
El cual es el valor del contrato en el momento $t = 0,5$.

Capítulo 4: LIMITES SUPERIORES, LIMITES INFERIORES Y CALL-PUT PARITY

Los precios de las opciones se determinan por oferta y demanda, pero si consideramos a otros mercados como el de crédito y lo hacemos de manera intertemporal se abre las puertas al arbitraje.

Si la prima está por arriba o por debajo del límite superior o el inferior, luego, hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

La prima de una opción es el precio que hay que pagar para obtener la opción.



VENTA EN CORTO

Se trata de la venta de un activo que no se posee ya que se lo pide prestado. En la realidad se realizan este tipo de operaciones, pero es necesario tener un respaldo como garantía.

ACCIONES QUE NO PAGAN DIVIDENDOS LÍMITE SUPERIOR

OPCIÓN DE COMPRA CALL SOBRE ACCIÓN QUE NO PAGA DIVIDENDOS

No puede valer más que el precio de la acción en $t = 0$ S_0

$$c \leq S_0$$

$$C \leq S_0$$

Donde

c es el valor de una opción europea

C es el valor de una opción de compra americana

Hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje si ocurre que

$$c > S_0$$

PLAZO DE VENCIMIENTO DE CALL

$$T$$

PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL MOMENTO T

$$S_T$$

PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL MOMENTO $t = 0$

$$S_0$$

PRECIO DE EJERCICIO

$$K$$

ESCENARIOS EN EL MOMENTO T

Hay dos escenarios EJERCER o NO EJERCER y esto depende de S_T

FUENTE DE INCERTIDUMBRE

La variable aleatoria es S_T

TASA DE INTERES LIBRE DE RIESGO CONTINUAMENTE COMPUESTA

$$r$$

GANANCIA POR ARBITRAJE CUANDO NO SE CUMPLE CON EL LIMITE SUPERIOR

EN EL MOMENTO $t = 0$

Como

$$c > S_0$$

El CALL está sobrevaluado, por lo tanto, tiene un precio excesivo por lo cual se lo vende o se toma una posición SHORT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar una posición SHORT o lanzar una opción de compra CALL	c
Compra de una Acción	$-S_0$
Deposito a la tasa libre de riesgo	$-[c - S_0]$
BENEFICIO EN $t = 0$	0

Lanzar un CALL implica que si el tomador de la opción ejerce la misma, el lanzador tiene la obligación de VENDER la acción al precio de ejercicio K , es decir, que el lanzador está atado a la decisión que tome el tomador.

EN EL MOMENTO $t = T$

ESCENARIO $S_T < K$ por lo tanto el tomador NO EJERCE el CALL

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = T$	
Se cobra el deposito	$[c - S_0] \cdot e^{rT}$

Como el tomador del CALL NO EJERCE, se realiza la venta de la acción que se compro en $t = 0$ en el mercado al precio S_T y se produce un ingreso	S_T
BENEFICIO EN $t = T$	$[c - S_0] \cdot e^{rT} + S_T > 0$

ESCENARIO $S_T > K$ por lo tanto el tomador EJERCE el CALL

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = T$	
Se cobra el deposito	$[c - S_0] \cdot e^{rT}$
Como el tomador del CALL EJERCE, se realiza la venta “obligada” de la acción que se compro en $t = 0$ al precio de ejercicio K y se produce un ingreso	K
BENEFICIO EN $t = T$	$[c - S_0] \cdot e^{rT} + K > 0$

Como podemos deducir de los beneficios se obtuvo una ganancia segura libre de riesgo, sin colocar capital alguno y sin importar que valor tome S_T

EJEMPLO

$$S_0 = 20\$ \quad K = 18\$ \quad r = 10\% \text{ anual} \quad T = 1 \text{ año} \quad c = 25\$$$

Como vemos se produce una violación del límite superior ya que

$$c > S_0$$

Por lo cual un arbitrajista puede obtener una ganancia segura y sin colocar capital alguno

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar una posición SHORT o lanzar una opción de compra CALL	25\$
Compra de una Acción	-20\$
Deposito a la tasa libre de riesgo	-[25\$ - 20\$]
BENEFICIO EN $t = 0$	0

EN EL MOMENTO $t = T$

ESCENARIO $S_T < K$ por lo tanto el tomador NO EJERCE el CALL

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 1$	
Se cobra el deposito	$5\$ \cdot e^{0,1} = 5,5258\$$
Como el tomador del CALL NO EJERCE, se realiza la venta de la acción que se compro en $t = 0$ en el mercado al precio S_T y se produce un ingreso	S_T
BENEFICIO EN $t = 1$	$5,5258\$ + S_T > 0$

ESCENARIO $S_T > K$ por lo tanto el tomador EJERCE el CALL

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 1$	
Se cobra el deposito	5,5258\$
Como el tomador del CALL EJERCE, se realiza la venta “obligada” de la acción que se compro en $t = 0$ al precio de ejercicio K y se produce un ingreso	18\$
BENEFICIO EN $t = 1$	23,5258\$

OPCIÓN DE VENTA PUT SOBRE ACCIONES QUE NO PAGAN DIVIDENDOS

La opción no puede valer más que K

$$p \leq K$$

$$P \leq K$$

Donde

p es el valor de una opción europea

P es el valor de una opción de compra americana

En el caso de opciones europeas, a su vencimiento en T , la opción no puede valer más que K . Se deduce que en $t = 0$ no puede valer más que

$$p \leq K \cdot e^{-rT}$$

Si esto no se cumple un arbitrajista podría subscribir la opción e invertir el producto a la tasa r

PLAZO DE VENCIMIENTO DE PUT

T

PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL MOMENTO T

S_T

PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL MOMENTO $t = 0$

S_0

PRECIO DE EJERCICIO

K

ESCENARIOS EN EL MOMENTO T

Hay dos escenarios EJERCER o NO EJERCER y esto depende de S_T

FUENTE DE INCERTIDUMBRE

La variable aleatoria es S_T

TASA DE INTERES LIBRE DE RIESGO CONTINUAMENTE COMPUESTA

r

GANANCIA POR ARBITRAJE CUANDO NO SE CUMPLE CON EL LIMITE SUPERIOR

EN EL MOMENTO $t = 0$

Como

$$p > K \cdot e^{-rT}$$

El PUT está sobrevaluado, por lo tanto, tiene un precio excesivo por lo cual se lo vende o se toma una posición SHORT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar una posición SHORT o lanzar una opción de venta PUT	p
Venta en corto de una Acción	S_0
Deposito a la tasa libre de riesgo	$-[p + S_0]$
BENEFICIO EN $t = 0$	0

Lanzar un PUT implica que si el tomador de la opción ejerce la misma, el lanzador tiene la obligación de COMPRAR la acción al precio de ejercicio K , es decir, que el lanzador está atado a la decisión que tome el tomador.

EN EL MOMENTO $t = T$

ESCENARIO $S_T \geq K$ por lo tanto el tomador NO EJERCE el PUT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = T$	
Se cobra el deposito	$[p + S_0] \cdot e^{rT}$
Como el tomador del PUT NO EJERCE, se realiza la compra de la acción que se necesita devolver por la venta en corto realizada en $t = 0$ en el mercado al precio S_T y se produce un egreso	$-S_T$
BENEFICIO EN $t = T$	$[p + S_0] \cdot e^{rT} - S_T > 0$

Por lo tanto

$$[p + S_0] \cdot e^{rT} - S_T$$

$$pe^{rT} + S_0e^{rT} - S_T$$

Donde si se cumple que

$$pe^{rT} + S_0e^{rT} > S_T \quad \text{HAY GANANCIA POR ARBITRAJE}$$

$$pe^{rT} + S_0e^{rT} < S_T \quad \text{NO HAY GANANCIA POR ARBITRAJE}$$

En el momento $t = 0$

$$p > K \cdot e^{-rT}$$

Por lo tanto en el momento T

$$pe^{rT} > K$$

También

$$S_T < K$$

Razón por lo cual no se EJERCE EL PUT. Por lo tanto

$$pe^{rT} > S_T$$

Luego

$$pe^{rT} + S_0e^{rT} - S_T > 0$$

Por lo cual hay ganancia segura sin colocar capital

ESCENARIO $S_T < K$ por lo tanto el tomador EJERCE el PUT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = T$	
Se cobra el deposito	$[p + S_0] \cdot e^{rT}$
Como el tomador del PUT EJERCE, se realiza la compra “obligada” de la acción que se necesita devolver al precio de ejercicio K y se produce un egreso	$-K$
BENEFICIO EN $t = T$	$[p + S_0] \cdot e^{rT} - K > 0$

En el momento T

$$pe^{rT} > K$$

Por lo tanto

$$pe^{rT} + S_0e^{rT} - K > 0$$

Por lo tanto se obtiene una ganancia segura sin la necesidad de arriesgar capital alguno

EJEMPLO

$$S_0 = 37\$ \quad K = 40\$ \quad r = 5\% \text{ anual} \quad T = 0,5 \text{ año} \quad p = 45\$$$

Como vemos se produce una violación del límite superior ya que

$$p > K \cdot e^{\frac{0,05}{2}} = 39,01239648\$$$

Por lo cual un arbitrajista puede obtener una ganancia segura y sin colocar capital alguno

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar una posición SHORT o lanzar una opción de venta PUT	45\$
Venta en corto de una Acción	37\$
Deposito a la tasa libre de riesgo	$-[45\$ + 37\$] = -82\$$
BENEFICIO EN $t = 0$	0

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

ESCENARIO $S_T \geq K$ por lo tanto el tomador NO EJERCE el PUT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$	
Se cobra el deposito	$82\$ \cdot e^{\frac{0,05}{2}} = 84,07583988\$$
Como el tomador del PUT NO EJERCE, se realiza la compra de la acción que se necesita devolver por la venta en corto realizada en $t = 0$ en el mercado al precio S_T y se produce un egreso	$-S_T$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	$84,07583988\$ - S_T > 0$ nadie espera que la acción suba tanto de valor o de lo contrario no se hubiera comprado el PUT

ESCENARIO $S_T < K$ por lo tanto el tomador EJERCE el PUT

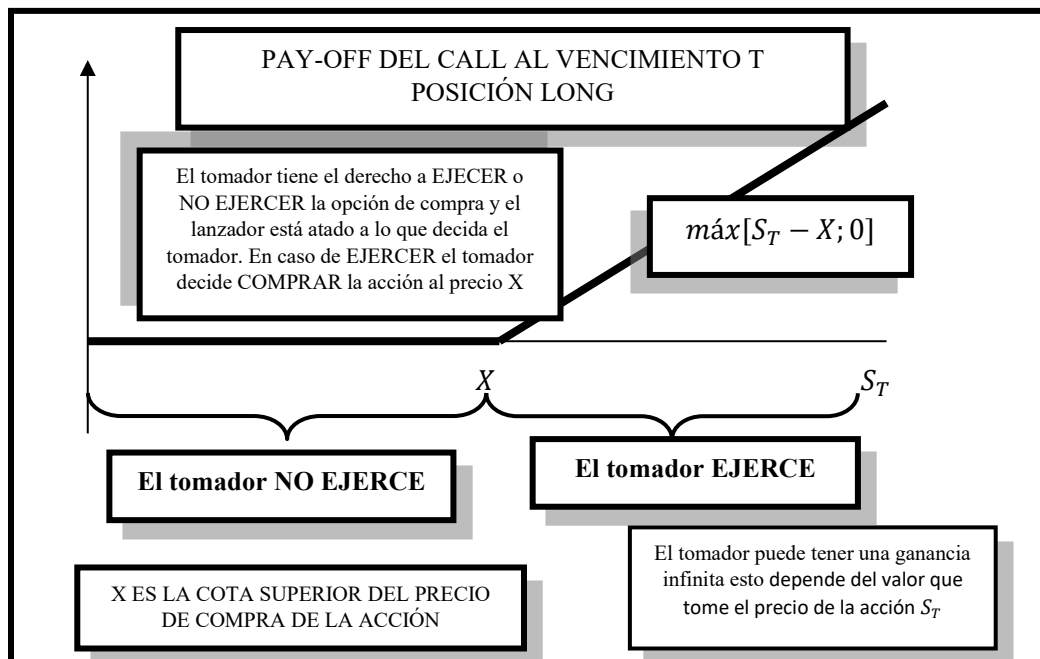
LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$	
Se cobra el deposito	84,07583988\$
Como el tomador del PUT EJERCE, se realiza la compra “obligada” de la acción que se necesita devolver al precio de ejercicio K y se produce un egreso	-40\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	44,07583988\$

PAY-OFF DEL CALL AL VENCIMIENTO T**PAY-OFF DEL CALL EN POSICIÓN LONG**

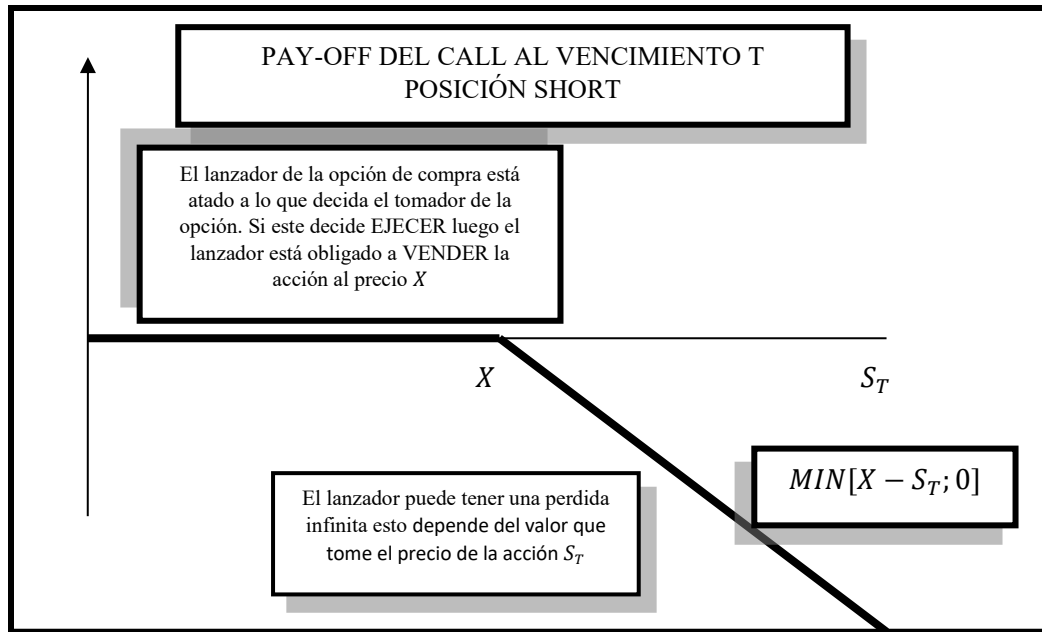
$$\max[S_T - X; 0]$$

PAY-OFF DEL CALL EN POSICIÓN SHORT

$$\min[X - S_T; 0]$$



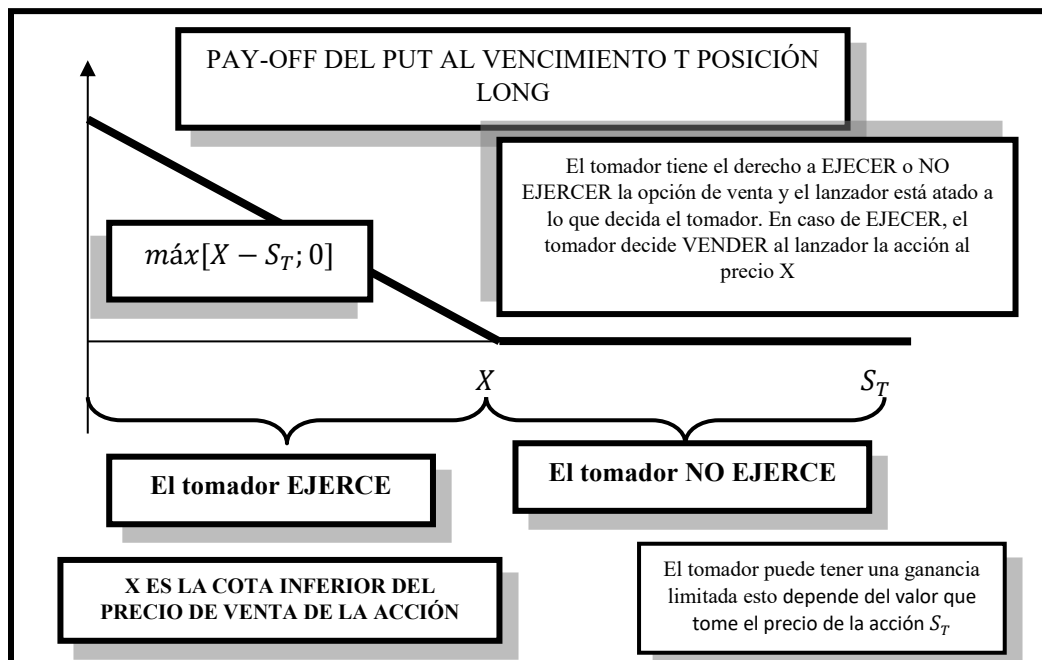
Como vemos en el gráfico no tenemos en cuenta la prima pagada

**PAY-OFF DEL PUT AL VENCIMIENTO T****PAY-OFF DEL PUT EN POSICIÓN LONG**

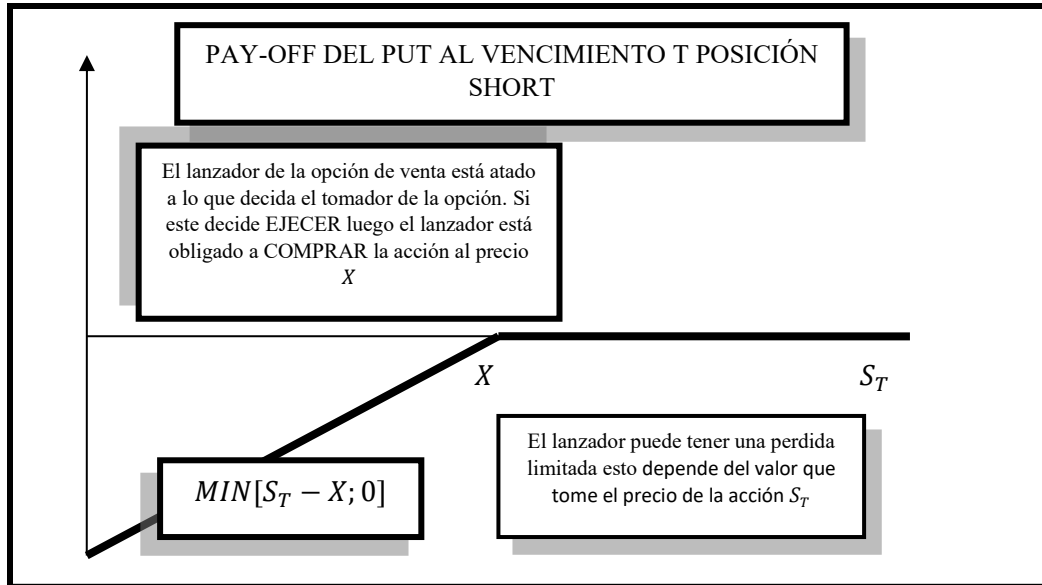
$$máx[X - S_T; 0]$$

PAY-OFF DEL PUT EN POSICIÓN SHORT

$$MIN[S_T - X; 0]$$



Como vemos en el gráfico no tenemos en cuenta la prima pagada



LIMITE INFERIOR

OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL

Sean dos carteras A y B que se conforman en el momento $t = 0$ donde están compuestas de la siguiente manera

CARTERA A

Posición LONG en una opción de compra europea CALL con precio de ejercicio igual a X con fecha de vencimiento T y una cantidad de dinero igual a Xe^{-rt} el cual se hace un depósito a la tasa libre de riesgo continuamente compuesta r por un plazo de T

CARTERA B

Una acción que no paga dividendos

Ambas carteras son equivalentes. En el momento $t = T$ hay dos posibles escenarios EJERCER o NO EJERCER.

EN EL MOMENTO $t = T$

CARTERA A

ESCENARIO	X	Payoff del CALL	DEPOSITO	TOTAL CARTERA A
NO EJERCE	$S_t \leq X$	0	X	X
EJERCE	$S_t > X$	$S_T - X$	X	S_T

Por lo cual podemos deducir que el valor de la cartera A en el momento $t = T$ es igual a

$$\max[S_T; X]$$

CARTERA B

El valor de la cartera B en el momento $t = T$ es igual a

$$S_T$$

ESCENARIO $S_t > X$ EJERCER**CARTERA A = CARTERA B**

$$S_T = S_T$$

ESCENARIO $S_t \leq X$ NO EJERCER**CARTERA A > CARTERA B**

$$X > S_T$$

Luego

CARTERA A $\geq$ CARTERA B

CARTERA	MOMENTO $t = 0$	MOMENTO $t = T$
CARTERA A	$poc + Xe^{-rT}$	$X + \max[S_T - X; 0] = \max[S_T; X]$
CARTERA B	S_0	S_T

EN EL MOMENTO $t = T$ **CARTERA A $\geq$ CARTERA B**

$$\max[S_T; X] \geq S_T$$

EN EL MOMENTO $t = 0$ **CARTERA A $\geq$ CARTERA B**

$$poc + Xe^{-rT} \geq S_0$$

Al no existir oportunidades de arbitraje la misma situación se mantiene tanto en el momento T como en $t = 0$

$$poc \geq S_0 - Xe^{-rT}$$

La prima no puede ser negativa

$$poc \geq 0$$

Por lo tanto

$$poc \geq \max[S_0 - Xe^{-rT}; 0]$$

OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL**LIMITE SUPERIOR**

$$poc \leq S_0$$

LIMITE INFERIOR

$$poc \geq \max[S_0 - Xe^{-rT}; 0]$$

OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT

Sean dos carteras C y D que se conforman en el momento $t = 0$ donde están compuestas de la siguiente manera

CARTERA C

Posición LONG en una opción de venta europea PUT con precio de ejercicio igual a X con fecha de vencimiento T y una acción que no paga dividendos

CARTERA D

Una cantidad de dinero igual a Xe^{-rT} el cual se hace un depósito a la tasa libre de riesgo continuamente compuesta r por un plazo de T

Ambas carteras son equivalentes. En el momento $t = T$ hay dos posibles escenarios EJERCER o NO EJERCER.

EN EL MOMENTO $t = T$

CARTERA C

ESCENARIO	X	Pay-off del PUT	ACCIÓN	TOTAL CARTERA A
NO EJERCE	$S_t \geq X$	0	S_T	S_T
EJERCE	$S_t < X$	$X - S_T$	S_T	X

Por lo cual podemos deducir que el valor de la cartera C en el momento $t = T$ es igual a

$$\max[S_T; X]$$

CARTERA D

El valor de la cartera B en el momento $t = T$ es igual a

$$X$$

ESCENARIO $S_t < X$ EJERCER

$$\text{CARTERA C} = \text{CARTERA D}$$

$$X = X$$

ESCENARIO $S_t \geq X$ NO EJERCER

$$\text{CARTERA C} > \text{CARTERA D}$$

$$S_T > X$$

Luego

$$\text{CARTERA C} \geq \text{CARTERA D}$$

CARTERA	MOMENTO $t = 0$	MOMENTO $t = T$
CARTERA C	$pov + S_0$	$S_T + \max[X - S_T; 0] = \max[S_T; X]$
CARTERA D	Xe^{-rT}	X

EN EL MOMENTO $t = T$

$$\text{CARTERA C} \geq \text{CARTERA D}$$

$$\max[S_T; X] \geq X$$

EN EL MOMENTO $t = 0$

$$\text{CARTERA C} \geq \text{CARTERA D}$$

$$pov + S_0 \geq Xe^{-rT}$$

Al no existir oportunidades de arbitraje la cartera C debe valer al menos tanto como la cartera D en ambos momentos T como en $t = 0$. Un mismo bien debe valer lo mismo en cualquier mercado en un mismo momento del tiempo o de lo contrario hay subvaluación o sobrevaluación y se puede obtener una ganancia por arbitraje. Si se incorpora la dinámica del tiempo como es el caso hay que tener en cuenta el valor tiempo del dinero, como los valores que tomen las variables en cada instante de tiempo, lo importante es que la relación

$$\text{CARTERA C} \geq \text{CARTERA D}$$

Se debe mantener o de contrario se podría hacer un arbitraje intertemporal.

$$pov \geq Xe^{-rT} - S_0$$

La prima no puede ser negativa

$$pov \geq 0$$

Por lo tanto

$$pov \geq \max[Xe^{-rT} - S_0; 0]$$

OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT

LIMITE SUPERIOR

$$pov \leq Xe^{-rT}$$

LIMITE INFERIOR

$$pov \geq \max[Xe^{-rT} - S_0; 0]$$

GANANCIA POR ARBITRAJE CUANDO NO SE CUMPLE CON EL LIMITE INFERIOR

OPCIÓN DE COMPRA CALL

$$S_0 = 20\$ \quad X = 18\$ \quad r = 10\% \text{ anual} \quad T = 1 \text{ año} \quad c = 3\$$$

LIMITE SUPERIOR

$$c \leq S_0$$

Como vemos se cumple con el límite superior

$$c < 20\$$$

LIMITE INFERIOR

$$c \geq \max[S_0 - Xe^{-rT}; 0]$$

Donde

$$S_0 - Xe^{-rT} = 20\$ - 18\$e^{-0,1} = 3,712926475$$

Por lo tanto

$$c \geq \max[3,712926475; 0]$$

$$c \geq 3,712926475$$

Como vemos se produce una violación del límite inferior, por lo cual un arbitrajista puede obtener una ganancia segura y sin colocar capital alguno

Como el CALL está más barato de lo que debería valer, por lo cual para aprovechar la situación se toma una posición LONG o comprada

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar una posición LONG en una opción de compra CALL	-3\$
Venta en corto de una Acción	20\$
Deposito a la tasa libre de riesgo	$-[20\$ - 3\$] = -17\$$
BENEFICIO EN $t = 0$	0

EN EL MOMENTO $t = 1$ año

ESCENARIO $S_T < K$ por lo tanto el tomador NO EJERCE el CALL

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 1$	
Se cobra el deposito	$17\$ \cdot e^{0,1} = 18,78790561\$$
Como NO EJERCE el CALL, se realiza la compra de la acción que se necesita devolver por la venta en corto realizada en $t = 0$ en el mercado al precio S_T y se produce un egreso	$-S_T$
BENEFICIO EN $t = 1$	$18,78790561\$ - S_T > 0$ ya que $S_T < 18\$$

ESCENARIO $S_T > K$ por lo tanto el tomador EJERCE el CALL

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 1$	
Se cobra el deposito	18,78790561\$
Como el tomador del CALL EJERCE, se realiza la compra de la acción al precio de ejercicio K y se produce un ingreso	-18\$
BENEFICIO EN $t = 1$	0,78790561\$

GANANCIA POR ARBITRAJE CUANDO NO SE CUMPLE CON EL LIMITE INFERIOR

OPCIÓN DE VENTA PUT

EJEMPLO

$$S_0 = 37\$ \quad K = 40\$ \quad r = 5\% \text{ anual} \quad T = 0,5 \text{ año} \quad p = 1\$$$

LIMITE SUPERIOR

$$pov \leq Xe^{-rT}$$

Donde

$$K \cdot e^{-\frac{0,05}{2}} = 39,01239648\$$$

Por lo tanto se cumple con el límite superior

LIMITE INFERIOR

$$pov \geq \max[Xe^{-rT} - S_0; 0]$$

Donde

$$Xe^{-rT} - S_0 = 39,01239648\$ - 37\$ = 2,01239648\$$$

Por lo cual

$$p \geq 2,01239648\$$$

Por lo cual se produce una violación del límite inferior, por lo cual un arbitrajista puede obtener una ganancia segura y sin colocar capital alguno.

Como el PUT vale menos de lo que debería valer se toma una posición LONG.

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar una posición LONG en una opción de venta PUT	-1\$
Compra una Acción	-37\$
Préstamo a la tasa libre de riesgo	$-[-1\$ - 37\$] = 38\$$
BENEFICIO EN $t = 0$	0

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

ESCENARIO $S_T \geq K$ por lo tanto el tomador NO EJERCE el PUT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$	
Se paga el préstamo	$-38\$ \cdot e^{\frac{0,05}{2}} = -38,96197458$
Como el tomador del PUT NO EJERCE, se realiza la venta de la acción que se compro en $t = 0$ en el mercado al precio S_T y se produce un ingreso	S_T
BENEFICIO EN $t = 0,5$	$S_T - 38,96197458 > 0$ ya que $S_T \geq 40\$$

ESCENARIO $S_T < K$ por lo tanto el tomador EJERCE el PUT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$	
Se paga el préstamo	-38,96197458
Como el tomador del PUT EJERCE, se realiza la venta de la acción que se compro al precio de ejercicio K y se produce un ingreso	40\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	1,03802542\$

ECUACIÓN CALL-PUT PARITY

Tomamos la cartera A y la cartera C

CARTERA	COMPOSICIÓN	VALUACIÓN EN T	VALUACIÓN EN $t = 0$
CARTERA A	$CALL + Xe^{-rT}$	$máx[S_T; X]$	$poc + Xe^{-rT}$
CARTERA C	$PUT + ACCIÓN$	$máx[S_T; X]$	$pov + S_0$

En el momento T tanto la cartera A como la cartera C valen lo mismo

$$\text{CARTERA C} = \text{CARTERA D}$$

$$máx[S_T; X] = máx[S_T; X]$$

Luego se puede deducir que en $t = 0$ deben valer también lo mismo, esto ocurre si no hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

En el momento $t = 0$

$$\text{CARTERA C} = \text{CARTERA D}$$

$$poc + Xe^{-rT} = pov + S_0$$

ECUACIÓN CALL-PUT PARITY

$$poc + Xe^{-rT} = pov + S_0$$

Muestra que el valor de una opción de compra europea poc con un vencimiento T y un precio de ejercicio X puede deducirse del valor de una opción de venta europea con igual vencimiento T y precio de ejercicio X y viceversa.

Si la CALL-PUT PARITY no se cumple, luego, hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

RESULTADOS

OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT SOBRE ACCIÓN QUE NO PAGA DIVIDENDOS

LIMITE SUPERIOR

$$pov \leq Xe^{-rT}$$

LIMITE INFERIOR

$$pov \geq máx[Xe^{-rT} - S_0; 0]$$

OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL SOBRE ACCIÓN QUE NO PAGA DIVIDENDOS

LIMITE SUPERIOR

$$poc \leq S_0$$

LIMITE INFERIOR

$$poc \geq máx[S_0 - Xe^{-rT}; 0]$$

ECUACIÓN CALL-PUT PARITY

$$poc + Xe^{-rT} = pov + S_0$$

OPORTUNIDADES DE ARBITRAJE CUANDO NO SE CUMPLE LA CALL-PUT PARITY

SITUACIÓN 1

$$S_0 = 31\$ \quad K = 30\$ \quad r = 10\% \text{ anual} \quad T = 3 \text{ meses} \quad p = 2,25\$ \quad c = 3\$$$

CALCULOS DEL VALOR DE LAS CARTERAS EN EL MOMENTO $t = 0$

CARTERA A

$$c + Ke^{-rT} = 3\$ + 30\$e^{-0,1 \cdot \frac{3}{12}} = 32,26\$$$

CARTERA C

$$p + S_0 = 2,25 + 31 = 33,25\$$$

Para que no existan oportunidades de obtener una ganancia segura y sin colocar capital ambas carteras deberían tener el mismo valor. Pero como vemos

$$\text{CARTERA A} < \text{CARTERA C}$$

Por lo tanto no se cumple la CALL-PUT PARITY y por ende se puede obtener una ganancia por arbitraje

La CARTERA C está sobrevaluada con respecto a la CARTERA A

ESTRATEGIA DE ARBITRAJE

Comprar la CARTERA A (barata) y vender en descubierto la CARTERA C (más cara)

Siempre vendemos en descubierto la cartera sobrevaluada.

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar una posición LONG en una opción de compra CALL	-3\$
Deposito a 3 meses	-30,25\$
Tomar una posición SHORT en una opción de compra PUT	2,25\$
Vender en corto una acción	31\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0

Pasaron 3 meses.....

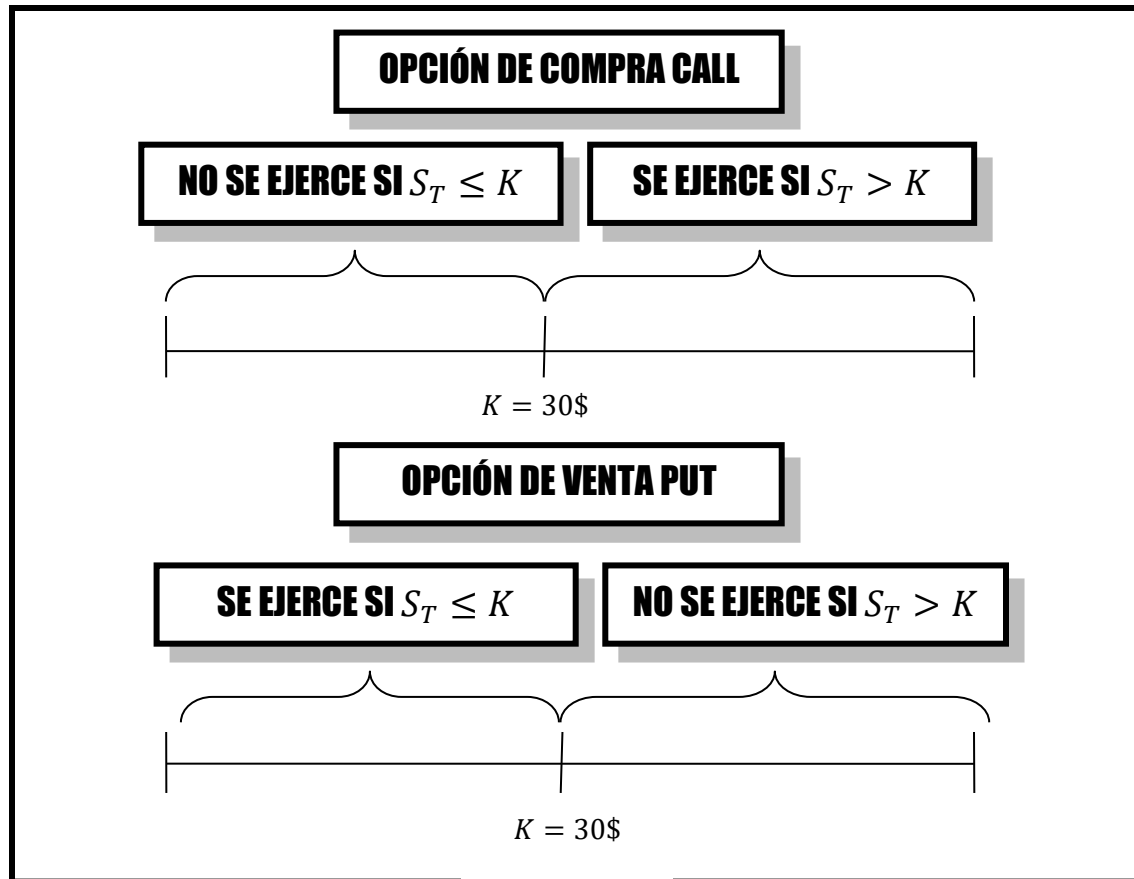
Hay dos posibles escenarios

ESCENARIO $S_T > 30\$$

ESCENARIO $S_T < 30\$$

IMPORTANTE

La clave está en comprender que debemos comprar una acción para devolver la que se vendió en corto en el momento $t = 0$.

**POSICIÓN LONG EN CALL**

Si se EJERCE el CALL se COMPRA al precio K

POSICIÓN SHORT EN PUT

Si el tomador EJECE el PUT se compra al precio K

Como deducimos de analizar el gráfico en cualquiera de los dos escenarios que son posibles compramos la acción al precio K ya que si

ESCENARIO $S_T > 30\$$

Se ejerce el CALL y se compra la acción al precio K

ESCENARIO $S_T < 30\$$

El tomador ejerce el PUT y al ser el lanzador del mismo se está obligado a COMPRAR la acción al precio K

Es importante recordar que tanto el PUT como el CALL tienen misma fecha de vencimiento T y precio de ejercicio K.

ESCENARIO $S_T \geq K$ por lo tanto se EJERCE el CALL

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$	
Se cobra el deposito	$30,25\$ \cdot e^{0,1 \cdot \frac{3}{12}} = 31,0157824\$$
Como se EJERCE el CALL, se realiza la compra de la acción que se necesita devolver al precio de ejercicio K y se produce un egreso	-30\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	1,0157824\$

ESCENARIO $S_T < K$ por lo tanto el tomador EJERCE el PUT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$	
Se cobra el deposito	$30,25\$ \cdot e^{0,1 \cdot \frac{3}{12}} = 31,0157824\$$
Como el tomador del PUT EJERCE, se realiza la compra de la acción que se necesita devolver al precio de ejercicio K y se produce un egreso	-30\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	1,0157824\$

SITUACIÓN 2 ALTERNATIVA A LA ANTERIOR

$$S_0 = 31\$ \quad K = 30\$ \quad r = 10\% \text{ anual} \quad T = 3 \text{ meses} \quad p = 1\$ \quad c = 3\$$$

CALCULOS DEL VALOR DE LAS CARTERAS EN EL MOMENTO $t = 0$ **CARTERA A**

$$c + Ke^{-rT} = 3\$ + 30\$e^{-0,1 \cdot \frac{3}{12}} = 32,26\$$$

CARTERA C

$$p + S_0 = 1 + 31 = 32\$$$

Para que no existan oportunidades de obtener una ganancia segura y sin colocar capital ambas carteras deberían tener el mismo valor. Pero como vemos

CARTERA A > CARTERA C

Por lo tanto no se cumple la CALL-PUT PARITY y por ende se puede obtener una ganancia por arbitraje

La CARTERA A está sobrevaluada con respecto a la CARTERA C

ESTRATEGIA DE ARBITRAJE

Comprar la CARTERA C (barata) y vender en descubierto la CARTERA A (más cara)

Siempre vendemos en descubierto la cartera sobrevaluada.

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar una posición SHORT en una opción de compra CALL	3\$
Préstamo a 3 meses	29\$
Tomar una posición LONG en una opción de compra PUT	-1\$
Comprar una acción	-31\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0

Pasaron 3 meses.....

Hay dos posibles escenarios

ESCENARIO $S_T > 30\$$

ESCENARIO $S_T < 30\$$

IMPORTANTE

La clave está en comprender que debemos vender la acción que compramos en el momento $t = 0$.

POSICIÓN SHORT EN CALL

Si el tomador EJERCE el CALL se VENDE al precio de ejercicio K

POSICIÓN LONG EN PUT

Si se EJERCE el PUT se VENDE al precio de ejercicio K

En cualquiera de los dos escenarios que son posibles vendemos la acción al precio de ejercicio K ya que si

ESCENARIO $S_T > 30\$$

El tomador EJERCE el CALL y se vende la acción al precio de ejercicio K

ESCENARIO $S_T < 30\$$

Se EJERCE el PUT y se vende la acción al precio de ejercicio K

Es importante recordar que tanto el PUT como el CALL tienen misma fecha de vencimiento T y precio de ejercicio K.

ESCENARIO $S_T \geq K$ por lo tanto se EJERCE el CALL

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$	
Se paga el préstamo	$29\$ \cdot e^{0,1 \cdot \frac{3}{12}} = 29,7341385\$$
Como el tomador EJERCE el CALL, se realiza la venta de la acción que compramos en $t = 0$ al precio de ejercicio K y se produce un ingreso	30\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0,265861504\$

ESCENARIO $S_T < K$ por lo tanto el tomador EJERCE el PUT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$	
Se paga el préstamo	$29\$ \cdot e^{0,1 \cdot \frac{3}{12}} = 29,7341385\$$
Como se EJERCE el PUT, se realiza la venta de la acción que compramos en $t = 0$ al precio de ejercicio K y se produce un ingreso	30\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0,265861504\$

ACCIONES QUE PAGAN DIVIDENDOS LIMITE SUPERIOR

OPCIÓN DE COMPRA CALL SOBRE ACCIÓN QUE PAGA DIVIDENDOS

No puede valer más que el precio de la acción en $t = 0$ S_0

$$c \leq S_0$$

$$C \leq S_0$$

Donde

c es el valor de una opción europea

C es el valor de una opción de compra americana

Hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje si ocurre que

$$c > S_0$$

OPCIÓN DE VENTA PUT SOBRE ACCIÓN QUE PAGA DIVIDENDOS

La opción no puede valer más que el STRIKE $X + De^{rT}$

$$p \leq X + De^{rT}$$

$$P \leq X + De^{rT}$$

Donde

p es el valor de una opción europea

P es el valor de una opción de compra americana

En el caso de opciones europeas, a su vencimiento en T , la opción no puede valer más que K . Se deduce que en $t = 0$ no puede valer más que

$$p \leq [X + De^{rT}] \cdot e^{-rT}$$

Si esto no se cumple un arbitrajista podría subscribir la opción e invertir el producto a la tasa r

LIMITE INFERIOR

VARIABLE D

Indica el VALOR PRESENTE de los DIVIDENDOS durante la vida del derivado. En el cálculo de D se asume que un dividendo ocurre en su fecha ex-dividendo.

OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL SOBRE ACCIÓN QUE PAGA DIVIDENDOS

Sean dos carteras A y B que se conforman en el momento $t = 0$ donde están compuestas de la siguiente manera

CARTERA A

Posición LONG en una opción de compra europea CALL con precio de ejercicio igual a $X + De^{rT}$ con fecha de vencimiento T y una cantidad de dinero igual a $D + Xe^{-rT}$ el cual se hace un deposito a la tasa libre de riesgo continuamente compuesta r por un plazo de T

CARTERA B

Una acción que paga dividendos

Ambas carteras son equivalentes. En el momento $t = T$ hay dos posibles escenarios EJERCER o NO EJERCER.

EN EL MOMENTO $t = T$

CARTERA A

ESCENARIO	$X + De^{rT}$	Payoffs del CALL	DEPOSITO	TOTAL CARTERA A
NO EJERCE	$S_t \leq X + De^{rT}$	0	$X + De^{rT}$	$X + De^{rT}$
EJERCE	$S_t > X + De^{rT}$	$S_T - [X + De^{rT}]$	$X + De^{rT}$	S_T

Por lo cual podemos deducir que el valor de la cartera A en el momento $t = T$ es igual a

$$\max[S_T; X + De^{rT}]$$

CARTERA B

El valor de la cartera B en el momento $t = T$ es igual a

$$S_T$$

ESCENARIO $S_t > X$ EJERCER

$$\text{CARTERA A} = \text{CARTERA B}$$

$$S_T = S_T$$

ESCENARIO $S_t \leq X$ NO EJERCER

$$\text{CARTERA A} > \text{CARTERA B}$$

$$X + De^{rT} > S_T$$

Luego

$$\text{CARTERA A} \geq \text{CARTERA B}$$

CARTERA	MOMENTO $t = 0$	MOMENTO $t = T$
CARTERA A	$poc + D + Xe^{-rT}$	$X + De^{rT} + \max[S_T - [X + De^{rT}]; 0] = \max[S_T X + De^{rT}]$
CARTERA B	S_0	S_T

EN EL MOMENTO $t = T$

$$\text{CARTERA A} \geq \text{CARTERA B}$$

$$\max[S_T; X + De^{rT}] \geq S_T$$

EN EL MOMENTO $t = 0$

$$\text{CARTERA A} \geq \text{CARTERA B}$$

$$poc + D + Xe^{-rT} \geq S_0$$

Al no existir oportunidades de arbitraje la misma situación se mantiene tanto en el momento T como en $t = 0$

$$poc \geq S_0 - D - Xe^{-rT}$$

La prima no puede ser negativa

$$poc \geq 0$$

Por lo tanto

$$poc \geq \max[S_0 - D - Xe^{-rT}; 0]$$

OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT SOBRE ACCIÓN QUE PAGA DIVIDENDOS

Sean dos carteras C y D que se conforman en el momento $t = 0$ donde están compuestas de la siguiente manera

CARTERA C

Posición LONG en una opción de venta europea PUT con precio de ejercicio igual a $X + De^{rT}$ con fecha de vencimiento T y una acción que no paga dividendos

CARTERA D

Una cantidad de dinero igual a $D + Xe^{-rT}$ el cual se hace un depósito a la tasa libre de riesgo continuamente compuesta r por un plazo de T

Ambas carteras son equivalentes. En el momento $t = T$ hay dos posibles escenarios EJERCER o NO EJERCER.

EN EL MOMENTO $t = T$

CARTERA C

ESCENARIO	$X + De^{rT}$	Payoffs del PUT	ACCIÓN	TOTAL CARTERA A
NO EJERCE	$S_t \geq X + De^{rT}$	0	S_T	S_T
EJERCE	$S_t < X + De^{rT}$	$X + De^{rT} - S_T$	S_T	$X + De^{rT}$

Por lo cual podemos deducir que el valor de la cartera C en el momento $t = T$ es igual a

$$\max[S_T; X + De^{rT}]$$

CARTERA D

El valor de la cartera B en el momento $t = T$ es igual a

$$X + De^{rT}$$

ESCENARIO $S_t < X$ EJERCER

$$\text{CARTERA C} = \text{CARTERA D}$$

$$X + De^{rT} = X + De^{rT}$$

ESCENARIO $S_t \geq X$ NO EJERCER

$$\text{CARTERA C} > \text{CARTERA D}$$

$$S_T > X + De^{rT}$$

Luego

$$\text{CARTERA C} \geq \text{CARTERA D}$$

CARTERA	MOMENTO $t = 0$	MOMENTO $t = T$
CARTERA C	$pov + S_0$	$S_T + \max[X + De^{rT} - S_T; 0] = \max[S_T; X + De^{rT}]$
CARTERA D	$D + Xe^{-rT}$	$X + De^{rT}$

EN EL MOMENTO $t = T$

$$\text{CARTERA C} \geq \text{CARTERA D}$$

$$\max[S_T; X + De^{rT}] \geq X + De^{rT}$$

EN EL MOMENTO $t = 0$

$$\text{CARTERA C} \geq \text{CARTERA D}$$

$$pov + S_0 \geq D + Xe^{-rT}$$

Al no existir oportunidades de arbitraje la cartera C debe valer al menos tanto como la cartera D en ambos momentos T como en $t = 0$. Un mismo bien debe valer lo mismo en cualquier mercado en un mismo momento del tiempo o de lo contrario hay subvaluación o sobrevaluación y se puede obtener una ganancia por arbitraje. Si se incorpora la dinámica del tiempo como es el caso hay que tener en cuenta el valor tiempo del dinero, como los valores que tomen las variables en cada instante de tiempo, lo importante es que la relación

$$\text{CARTERA C} \geq \text{CARTERA D}$$

Se debe mantener o de contrario se podría hacer un arbitraje intertemporal.

$$pov \geq D + Xe^{-rT} - S_0$$

La prima no puede ser negativa

$$pov \geq 0$$

Por lo tanto

$$pov \geq \max[D + Xe^{-rT} - S_0; 0]$$

ECUACIÓN CALL-PUT PARITY PARA ACCIONES QUE PAGAN DIVIDENDOS

Tomamos la cartera A y la cartera C

CARTERA	COMPOSICIÓN	VALUACIÓN EN T	VALUACIÓN EN $t = 0$
CARTERA A	$CALL + D + Xe^{-rT}$	$\max[S_T; X + De^{rT}]$	$poc + D + Xe^{-rT}$
CARTERA C	$PUT + ACCIÓN$	$\max[S_T; X + De^{rT}]$	$pov + S_0$

En el momento T tanto la cartera A como la cartera C valen lo mismo

$$\text{CARTERA C} = \text{CARTERA D}$$

$$\max[S_T; X + De^{rT}] = \max[S_T; X + De^{rT}]$$

Luego se puede deducir que en $t = 0$ deben valer también lo mismo, esto ocurre si no hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

En el momento $t = 0$

$$\text{CARTERA C} = \text{CARTERA D}$$

$$poc + D + Xe^{-rT} = pov + S_0$$

ECUACIÓN CALL-PUT PARITY

$$poc + D + Xe^{-rT} = pov + S_0$$

Muestra que el valor de una opción de compra europea poc con un vencimiento T y un precio de ejercicio X puede deducirse del valor de una opción de venta europea con igual vencimiento T y precio de ejercicio X y viceversa.

Si la CALL-PUT PARITY no se cumple, luego, hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

RESULTADOS

OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT PARA ACCIONES QUE PAGAN DIVIDENDOS

LIMITE SUPERIOR

$$pov \leq [D + Xe^{-rT}]e^{-rT}$$

LIMITE INFERIOR

$$pov \geq \max[D + Xe^{-rT} - S_0; 0]$$

OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL SOBRE UNA ACCIÓN QUE PAGA DIVIDENDOS

LIMITE SUPERIOR $poc \leq S_0$ LIMITE INFERIOR $poc \geq \max[S_0 - D - Xe^{-rT}; 0]$
ECUACIÓN CALL-PUT PARITY $poc + D + Xe^{-rT} = pov + S_0$

ACCIONES QUE PAGAN UN RENDIMIENTO DE DIVIDENDO CONOCIDO

Los dividendos hacen que los precios de las acciones disminuyan en la fecha ex-dividendos.

FECHA EX-DIVIDENDO

Cuando se declara un dividendo, se especifica una fecha ex-dividendo. Los inversionistas que poseen acciones inmediatamente antes de la fecha ex-dividendo reciben el dividendo.

Por lo tanto, el pago de un rendimiento de dividendos a la tasa q hace que la tasa de crecimiento del precio de la acción sea menor en un monto q de lo que debería ser en caso contrario.

Sea una acción que paga un rendimiento de dividendos conocido a la tasa q , donde

PRECIOS CON DIVIDENDO CONTINUO	
PRECIO DE LA ACCIÓN HOY	PRECIO DE LA ACCIÓN MAÑANA
S_0	S_T

Entonces, al no haber dividendos

PRECIOS SIN DIVIDENDO CONTINUO	
PRECIO DE LA ACCIÓN HOY	PRECIO DE LA ACCIÓN MAÑANA
S_0	$S_T \times e^{qT}$

Por otra parte, si ahora el precio inicial de la acción fuera igual a $S_0 \times e^{-qT}$

PRECIOS SIN DIVIDENDO CONTINUO	
PRECIO DE LA ACCIÓN HOY	PRECIO DE LA ACCIÓN MAÑANA
$S_0 \times e^{-qT}$	S_T

Este argumento muestra que se obtiene la misma distribución de probabilidades para el precio de la acción en el momento T S_T en cada uno de los dos escenarios

ESCENARIO I

La acción comienza en el precio S_0 y proporciona un rendimiento de dividendos conocido q

ESCENARIO II

La acción comienza en el precio $S_0 \times e^{-qT}$ y no paga dividendos.

REGLA SENCILLA

Al valorar una opción europea que dura el tiempo T sobre acciones que paga un rendimiento de dividendos conocido a la tasa q , reducimos el precio actual de la acción de S_0 a $S_0 \times e^{-tqT}$ y después valuamos la opción como si la acción no pagará dividendos.

LIMITE INFERIOR

OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL SOBRE ACCIÓN QUE PAGA UN RENDIMIENTO DE DIVIDENDOS CONOCIDO

Sean dos carteras A y B que se conforman en el momento $t = 0$ donde están compuestas de la siguiente manera

CARTERA A

Posición LONG en una opción de compra europea CALL con precio de ejercicio igual a X con fecha de vencimiento T y una cantidad de dinero igual a Xe^{-rT} el cual se hace un depósito a la tasa libre de riesgo continuamente compuesta r por un plazo de T

CARTERA B

La cantidad de e^{-qT} acciones, cuyos dividendos se reinvierten en acciones adicionales

Ambas carteras son equivalentes. En el momento $t = T$ hay dos posibles escenarios EJERCER o NO EJERCER.

EN EL MOMENTO $t = T$

CARTERA A

ESCENARIO	X	Payoffs del CALL	DEPOSITO	TOTAL CARTERA A
NO EJERCE	$S_t \leq X$	0	X	X
EJERCE	$S_t > X$	$S_T - X$	X	S_T

Por lo cual podemos deducir que el valor de la cartera A en el momento $t = T$ es igual a

$$\max[S_T; X]$$

CARTERA B

El valor de la cartera B en el momento $t = T$ es igual a

$$S_T$$

ESCENARIO $S_t > X$ EJERCER

$$\text{CARTERA A} = \text{CARTERA B}$$

$$S_T = S_T$$

ESCENARIO $S_t \leq X$ NO EJERCER

$$\text{CARTERA A} > \text{CARTERA B}$$

$$X > S_T$$

Luego

CARTERA A $\geq$ CARTERA B

CARTERA	MOMENTO $t = 0$	MOMENTO $t = T$
CARTERA A	$poc + D + Xe^{-rT}$	$X + \max[S_T - X; 0] = \max[S_T; X]$
CARTERA B	$S_0 \times e^{-qT}$	$S_T \times e^{-qT} \times e^{qT} = S_T$

EN EL MOMENTO $t = T$

CARTERA A $\geq$ CARTERA B

$$\max[S_T; X] \geq S_T$$

EN EL MOMENTO $t = 0$

CARTERA A $\geq$ CARTERA B

$$poc + Xe^{-rT} \geq S_0 \times e^{-qT}$$

Al no existir oportunidades de arbitraje la misma situación se mantiene tanto en el momento T como en $t = 0$

$$poc \geq S_0 \times e^{-qT} - Xe^{-rT}$$

La prima no puede ser negativa

$$poc \geq 0$$

Por lo tanto

$$poc \geq \max[S_0 \times e^{-qT} - Xe^{-rT}; 0]$$

OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT SOBRE ACCIÓN QUE PAGA UN RENDIMIENTO DE DIVIDENDO CONOCIDO

Sean dos carteras C y D que se conforman en el momento $t = 0$ donde están compuestas de la siguiente manera

CARTERA C

Posición LONG en una opción de venta europea PUT con precio de ejercicio igual a X con fecha de vencimiento T y la cantidad de e^{-qT} acciones, cuyos dividendos se reinvierten en acciones adicionales

CARTERA D

Una cantidad de dinero igual a Xe^{-rT} el cual se hace un depósito a la tasa libre de riesgo continuamente compuesta r por un plazo de T

Ambas carteras son equivalentes. En el momento $t = T$ hay dos posibles escenarios EJERCER o NO EJERCER.

EN EL MOMENTO $t = T$

CARTERA C

ESCENARIO	X	Payoffs del PUT	ACCIÓN	TOTAL CARTERA A
NO EJERCE	$S_t \geq X$	0	S_T	S_T
EJERCE	$S_t < X$	$X - S_T$	S_T	X

Por lo cual podemos deducir que el valor de la cartera C en el momento $t = T$ es igual a

$$\max[S_T; X]$$

CARTERA D

El valor de la cartera D en el momento $t = T$ es igual a

$$X$$

ESCENARIO $S_t < X$ EJERCER

$$\text{CARTERA C} = \text{CARTERA D}$$

$$X = X$$

ESCENARIO $S_t \geq X$ NO EJERCER

$$\text{CARTERA C} > \text{CARTERA D}$$

$$S_T > X$$

Luego

$$\text{CARTERA C} \geq \text{CARTERA D}$$

CARTERA	MOMENTO $t = 0$	MOMENTO $t = T$
CARTERA C	$pov + S_0 \times e^{-qT}$	$S_T + \max[X - S_T; 0] = \max[S_T; X]$
CARTERA D	Xe^{-rT}	X

EN EL MOMENTO $t = T$

$$\text{CARTERA C} \geq \text{CARTERA D}$$

$$\max[S_T; X] \geq X$$

EN EL MOMENTO $t = 0$

$$\text{CARTERA C} \geq \text{CARTERA D}$$

$$pov + S_0 \times e^{-qT} \geq Xe^{-rT}$$

Al no existir oportunidades de arbitraje la cartera C debe valer al menos tanto como la cartera D en ambos momentos T como en $t = 0$. Un mismo bien debe valer lo mismo en cualquier mercado en un mismo momento del tiempo o de lo contrario hay subvaluación o sobrevaluación y se puede obtener una ganancia por arbitraje. Si se incorpora la dinámica del tiempo como es el caso hay que tener en cuenta el valor tiempo del dinero, como los valores que tomen las variables en cada instante de tiempo, lo importante es que la relación

$$\text{CARTERA C} \geq \text{CARTERA D}$$

Se debe mantener o de contrario se podría hacer un arbitraje intertemporal.

$$pov \geq Xe^{-rT} - S_0 \times e^{-qT}$$

La prima no puede ser negativa

$$pov \geq 0$$

Por lo tanto

$$pov \geq \max[Xe^{-rT} - S_0 \times e^{-qT}; 0]$$

ECUACIÓN CALL-PUT PARITY

Tomamos la cartera A y la cartera C

CARTERA	COMPOSICIÓN	VALUACIÓN EN T	VALUACIÓN EN $t = 0$
CARTERA A	$CALL + Xe^{-rT}$	$\max[S_T; X]$	$poc + Xe^{-rT}$
CARTERA C	$PUT + ACCIÓN$	$\max[S_T; X]$	$pov + S_0 \times e^{-qT}$

En el momento T tanto la cartera A como la cartera C valen lo mismo

$$\text{CARTERA C} = \text{CARTERA D}$$

$$\max[S_T; X] = \max[S_T; X]$$

Luego se puede deducir que en $t = 0$ deben valer también lo mismo, esto ocurre si no hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

En el momento $t = 0$

$$\text{CARTERA C} = \text{CARTERA D}$$

$$poc + Xe^{-rT} = pov + S_0 \times e^{-qT}$$

ECUACIÓN CALL-PUT PARITY

$$poc + Xe^{-rT} = pov + S_0 \times e^{-qT}$$

RESULTADOS

OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT SOBRE ACCIONES QUE PAGAN UN RENDIMIENTO DE DIVIDENDOS CONOCIDO

LIMITE SUPERIOR

$$pov \leq Xe^{-rT}$$

LIMITE INFERIOR

$$pov \geq \max[Xe^{-rT} - S_0 \times e^{-qT}; 0]$$

OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL SOBRE UNA ACCIÓN QUE PAGA UN RENDIMIENTO DE DIVIDENDOS CONOCIDO

LIMITE SUPERIOR

$$poc \leq S_0 \times e^{-qT}$$

LIMITE INFERIOR

$$poc \geq \max[S_0 \times e^{-qT} - Xe^{-rT}; 0]$$

ECUACIÓN CALL-PUT PARITY

$$poc + Xe^{-rT} = pov + S_0 \times e^{-qT}$$

OPCIONES SOBRE FUTUROS ECUACIÓN CALL-PUT PARITY PARA OPCIONES SOBRE FUTUROS

CARTERA A

Posición LONG en una opción de compra europea SOBRE FUTUROS CALL con precio de ejercicio igual a K con fecha de vencimiento T y monto de DINERO igual a Ke^{-rT}

EN EL MOMENTO $t = T$

CARTERA A

ESCENARIO	K	Payoffs del CALL SOBRE FUTUROS	DEPOSITO	TOTAL CARTERA A
NO EJERCE	$F_T \leq K$	0	K	K
EJERCE	$F_T > K$	$F_T - K$	K	F_T

Por lo cual podemos deducir que el valor de la cartera A en el momento $t = T$ es igual a

$$\max[F_T; K]$$

CARTERA B

Posición LONG en una opción de venta europea SOBRE FUTUROS PUT con precio de ejercicio igual a K con fecha de vencimiento T más posición LONG en un contrato de futuros y un monto de DINERO igual a F_0e^{-rT} , donde F_0 es el precios sobre futuros.

EN EL MOMENTO $t = T$

ESCENARIO	K	Payoffs del PUT SOBRE FUTUROS	VALOR DEL CONTRATO A FUTURO EN POSICIÓN LONG	DEPOSITO	TOTAL CARTERA A
EJERCE	$F_T < K$	$K - F_T$	$F_T - F_0$	F_0	K
NO EJERCE	$F_T \geq K$	0	$F_T - F_0$	F_0	F_T

Por lo cual podemos deducir que el valor de la cartera A en el momento $t = T$ es igual a

$$\max[F_T; K]$$

Tomamos la cartera A y la cartera B

CARTERA	COMPOSICIÓN	VALUACIÓN EN T	VALUACIÓN EN $t = 0$
CARTERA A	<i>CALL SOBRE FUTUROS</i> + Ke^{-rT}	$\max[F_T; K]$	$poc + Ke^{-rT}$
CARTERA B	<i>PUT SOBRE FUTUROS</i> + <i>LONG EN FUTURO</i> + F_0e^{-rT}	$\max[F_T; K]$	$pov + F_0e^{-rT}$

En el momento T tanto la cartera A como la cartera B valen lo mismo

$$\mathbf{CARTERA A} = \mathbf{CARTERA B}$$

$$\max[F_T; X] = \max[F_T; X]$$

Luego se puede deducir que en $t = 0$ deben valer también lo mismo, esto ocurre si no hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

En el momento $t = 0$

$$\mathbf{CARTERA A} = \mathbf{CARTERA B}$$

$$poc + Ke^{-rT} = pov + F_0e^{-rT}$$

ECUACIÓN CALL-PUT PARITY

$$poc + Ke^{-rT} = pov + F_0e^{-rT}$$

Muestra que el valor de una opción de compra europea SOBRE FUTUROS poc con un vencimiento T y un precio de ejercicio K puede deducirse del valor de una opción de venta europea SOBRE FUTUROS con igual vencimiento T y precio de ejercicio K y viceversa.

Si la CALL-PUT PARITY no se cumple, luego, hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

LIMITES SUPERIORES E INFERIORES DE OPCIONES SOBRE FUTUROS

LIMITES INFERIORES

La prima del CALL SOBRE FUTUROS no puede ser negativa por lo cual de la CALL-PUT-PARITY

$$c + Ke^{-rT} \geq F_0e^{-rT}$$

Por lo tanto

$$c \geq -Ke^{-rT} + F_0e^{-rT}$$

$$c \geq \max[(F_0 - K)e^{-rT}; 0]$$

Del mismo modo la prima del PUT SOBRE FUTUROS no puede ser negativa

$$p + F_0e^{-rT} \geq Ke^{-rT}$$

$$p \geq \max[(K - F_0)e^{-rT}; 0]$$

LIMITES SUPERIORES

$$p \leq Ke^{-r \times T}$$

$$c \leq F_0 e^{-r \times T}$$

RESULTADOS

OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT SOBRE FUTUROS LIMITE SUPERIOR $pov \leq X e^{-rT}$ LIMITE INFERIOR $p \geq \max[(K - F_0)e^{-rT}; 0]$
OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL SOBRE FUTUROS LIMITE SUPERIOR $c \leq F_0 e^{-r \times T}$ LIMITE INFERIOR $c \geq \max[(F_0 - K)e^{-rT}; 0]$
ECUACIÓN CALL-PUT PARITY $poc + Ke^{-rT} = pov + F_0 e^{-rT}$

OPCIONES SOBRE ÍNDICES BURSÁTILES

RESULTADOS

OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT SOBRE ÍNDICES BURSÁTILES LIMITE SUPERIOR $pov \leq X e^{-rT}$ LIMITE INFERIOR $pov \geq \max[Xe^{-rT} - S_0 \times e^{-qT}; 0]$
OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL SOBRE ÍNDICES BURSÁTILES

LIMITE SUPERIOR $poc \leq S_0 \times e^{-qT}$ LIMITE INFERIOR $poc \geq \max[S_0 \times e^{-qT} - Xe^{-rT}; 0]$
ECUACIÓN CALL-PUT PARITY $poc + Xe^{-rT} = pov + S_0 \times e^{-qT}$

Las opciones sobre índices bursátiles pueden ser tratadas como acciones que pagan un rendimiento de dividendos conocido.

OPCIONES SOBRE DIVISAS RESULTADOS

OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT SOBRE DIVISAS LIMITE SUPERIOR $pov \leq Xe^{-rT}$ LIMITE INFERIOR $pov \geq \max[Xe^{-rT} - S_0 \times e^{-r_f T}; 0]$
OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL SOBRE DIVISAS LIMITE SUPERIOR $poc \leq S_0 \times e^{-r_f T}$ LIMITE INFERIOR $poc \geq \max[S_0 \times e^{-r_f T} - Xe^{-rT}; 0]$
ECUACIÓN CALL-PUT PARITY $poc + Xe^{-rT} = pov + S_0 \times e^{-r_f T}$

Las opciones sobre divisas pueden ser tratadas como acciones que pagan un rendimiento de dividendos conocido donde la tasa $q = r_f$

Capitulo 5: VALUACIÓN DE OPCIONES: ARBOLES BINOMIALES

PARAMETROS FUNDAMENTALES**PRECIO DE EJERCICIO K**

Es constante a lo largo de la vida del contrato

TIEMPO DE VENCIMIENTO T

Es fijo

PRECIO DEL ACTIVO SUBYACENTE S_t

Es variable y es la fuente de incertidumbre

TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO

La tasa libre de riesgo es constante e igual para todos los plazos, es decir, es FLAT.

VOLATILIDAD σ

Es constante a lo largo del periodo de vida del derivado

SUPUESTOS

- La distribución del precio de las acciones es multiplicativa binomial.
- Los factores u y d son los mismos para todo el periodo de vida del derivado
- Los costos de transacción son nulos, luego se puede determinar una cobertura libre de riesgo para el periodo
- El subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del derivado
- Se permiten las ventas en descubierto
- El mercado del subyacente es líquido y divisible.
- Existe un mercado de crédito en el cual se pueden tomar y pedir prestado fondos a una misma tasa libre de riesgo de incumplimiento, lo cual implica, que la tasa pasiva es igual a la tasa activa. La tasa libre de riesgo es constante e igual para todos los plazos, es decir, es FLAT.
- No existen oportunidades de arbitraje (esto es, el mercado está en equilibrio)

ÁRBOL BINOMIAL DE UN PASO**VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA**

Para una mejor comprensión tomaremos una acción que no paga dividendos con las siguientes características

VALOR DE LA ACCIÓN EN EL MOMENTO $t = 0$

$$S_0 = 100\$$$

La fuente de incertidumbre proviene del precio que toma el activo subyacente de la opción en el momento T

VALOR DE LA ACCIÓN EN EL MOMENTO $t = T$	
Sube la cotización	Baja la cotización
ESCENARIO UP	ESCENARIO DOWN

Si sube la cotización

$$S_{UP} = S_0 \cdot u$$

Si baja la cotización

$$S_{DOWN} = S_0 \cdot d$$

Esto ocurre sin importar la probabilidad de ocurrencia de cada suceso

En nuestro ejemplo

Si sube la cotización

$$S_{UP} = 115\$$$

Si baja la cotización

$$S_{DOWN} = 95\$$$

TASA DE INTERES LIBRE DE RIESGO PARA EL PERIODO

$$r = 5\%$$

Sea una opción de compra CALL sobre un activo subyacente que es una acción que no paga dividendos. Para obtener la misma debemos pagar una PRIMA

$$c = POC$$

La cual buscamos valuar.

CARACTERISTICAS DEL CALL

PRECIO DE EJERCICIO K

$$100\$$$

TIEMPO DE VENCIMIENTO

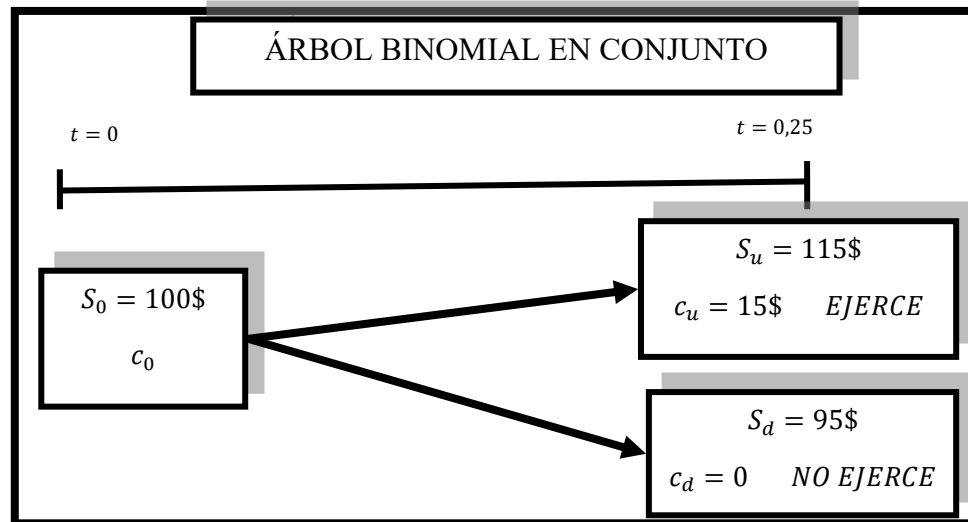
$$t + \Delta t = 0,25$$

ACTIVO SUBYACENTE

Una acción que no paga dividendos

Al vencimiento $\overline{t + \Delta t}$ el CALL se lo puede EJERCER o NO EJERCER y el pay-off del mismo es igual a

$$\max[S_T - K; 0]$$



CARTERA 2

Si decidimos conformar una cartera compuesta por una posición SHORT en un CALL y una posición LONG en 0,75 acciones que no pagan dividendos y esto lo hacemos en $t = 0$.

EL VALOR DE LA CARTERA EN $t = 0$

$$\Delta_0 S_0 - c_0 = \pi_0$$

EL VALOR DE LA CARTERA EN $t + \Delta t$

ESCENARIO UP

$$\Delta_0 S_u - c_u = \pi_u$$

$$0,75 \times 115\$ - 15\$ = 71,25\$$$

ESCENARIO DOWN

$$\Delta_0 S_d - c_d = \pi_d$$

$$0,75 \times 95\$ - 0 = 71,25\$$$

Como vemos la cartera puede tomar dos valores según del escenario en donde estemos parados

$$\pi_u \text{ y } \pi_d$$

Pero en este caso

$$\pi_u = \pi_d = \pi_0 \cdot (1 + r)$$

Por lo tanto tenemos certeza hoy (en $t = 0$) del ingreso de mañana (en Δt) por lo cual formamos una cartera libre de riesgo.

Parados en $t = 0$ la fuente de incertidumbre como sabemos es el precio del activo subyacente en el momento $t + \Delta t$ ya que la acción puede tomar dos valores, y por lo tanto el CALL como la CARTERA 2 tienen resultados aleatorios por su dependencia con la acción y también pueden tomar dos valores.

Lo que hacemos es tomando una decisión en $t = 0$ en la variable que controlamos Δ_0 , que es la cantidad de acciones en cartera, y de esta manera logramos eliminar la incertidumbre en el día de mañana $t + \Delta t$

RENDIMIENTO DE CARTERA 2

$$\frac{CAPITAL FINAL}{CAPITAL INICIAL} = 1 + r$$

Donde

$$CAPITAL FINAL = \Delta_0 S_u - c_u = \pi_u = 71,25$$

$$CAPITAL INICIAL = \Delta_0 S_0 - c_0 = \pi_0 = 0,75 \cdot 100 - c$$

Por lo tanto

$$\frac{71,25}{75 - c} = 1,05$$

$$c = 7,1436$$

De esta manera obtuvimos el valor del CALL en $t = 0$

CALCULO DEL DELTA Δ_0

Como vimos en $t + \Delta t$ en ambos escenarios los ingresos son iguales

$$\Delta_0 S_d - c_d = \Delta_0 S_u - c_u$$

Por lo tanto

$$\Delta_0 = \frac{c_u - c_d}{S_u - S_d}$$

De esta manera hallamos la cantidad de acciones que debemos tener en cartera para hacer la cartera libre de riesgo.

$$\Delta_0 = \frac{c_u - c_d}{S_0[u - d]}$$

Podemos relacionar el DELTA con el concepto de derivada

En nuestro ejemplo

$$\Delta_0 = \frac{15 - 0}{115 - 95} = 0,75$$

PAGO ESPERADO DE LA ACCIÓN

El rendimiento que se espera es el libre de riesgo

$$E_{RIESGO NEUTRO}[S_t] = S_0 \cdot [1 + r]$$

Por lo tanto

$$S_u \cdot p + S_d \cdot (1 - p) = S_0 \cdot [1 + r]$$

Donde si sube la cotización

$$S_{UP} = S_0 \cdot u$$

Si baja la cotización

$$S_{DOWN} = S_0 \cdot d$$

$$S_0 \cdot u \cdot p + S_0 \cdot d \cdot (1 - p) = S_0 \cdot [1 + r]$$

$$u \cdot p + d \cdot (1 - p) = [1 + r]$$

$$u \cdot p + d - d \cdot p = [1 + r]$$

$$p(u - d) + d = [1 + r]$$

$$p = \frac{1 + r - d}{u - d}$$

$$1 - p = 1 - \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{u - d - 1 + r + d}{u - d} = \frac{u - R}{u - d}$$

Donde

$$R = \overline{1 + r}$$

Donde p es la probabilidad RIESGO NEUTRO que no es la verdadera probabilidad de ocurrir el ESCENARIO UP, sino que es una pseudoprobabilidad que se utiliza a los fines de la valuación de la opción. Lo que ocurre es que en la valuación de opciones no tiene importancia las preferencias hacia el riesgo, por lo cual da igual un mundo adverso al riesgo que uno amante, el resultado es el mismo. Por lo cual se utiliza el menos problemático y que simplifica las formulas que es el mundo el riesgo neutral.

DETERMINACIÓN DE LA PRIMA DEL CALL

$$\frac{\Delta_0 S_0 u - c_u}{\Delta_0 S_0 - c} = 1 + r$$

$$\Delta_0 S_0 - c = \frac{\Delta_0 S_0 u - c_u}{1 + r}$$

$$c = \Delta_0 S_0 - \frac{\Delta_0 S_0 u - c_u}{1 + r}$$

Si

$$R = 1 + r$$

Luego

$$c = \Delta_0 S_0 - \frac{\Delta_0 S_0 u - c_u}{R}$$

$$c = \frac{\Delta_0 S_0 R - \Delta_0 S_0 u + c_u}{R}$$

$$c = \frac{\Delta_0 S_0 [R - u] + c_u}{R}$$

Donde

$$\Delta_0 = \frac{c_u - c_d}{S_0 [u - d]}$$

Por lo tanto

$$c = \frac{\left[\frac{c_u - c_d}{S_0 [u - d]} \right] S_0 [R - u] + c_u}{R}$$

$$c = \frac{\left[\frac{c_u - c_d}{[u - d]} \right] [R - u] + c_u}{R}$$

$$Rc = \left[\frac{c_u - c_d}{[u - d]} \right] [R - u] + c_u$$

$$Rc = c_u \frac{[R - u]}{[u - d]} + c_u - c_d \frac{[R - u]}{[u - d]}$$

$$Rc = c_u \left[\frac{[R - u]}{[u - d]} + 1 \right] - c_d \frac{[R - u]}{[u - d]}$$

Donde

$$\left[\frac{[R - u]}{[u - d]} + 1 \right] = \frac{R - u + u - d}{u - d} = \frac{R - d}{u - d}$$

Donde

$$p = \frac{R - d}{u - d} \quad y \quad (1 - p) = \frac{[u - R]}{[u - d]}$$

Por lo tanto

$$c = \frac{c_u \cdot p + c_d \cdot (1 - p)}{R}$$

Es el valor actual del valor esperado utilizando las probabilidades RIESGO NEUTRO.

$$c = \frac{E_{RIESGO NEUTRO}(c_t)}{1 + r}$$

CONDICIÓN LIBRE DE ARBITRAJE

$$u > R > d$$

Donde

$$R = 1 + r$$

En nuestro ejemplo

PROBABILIDAD RIESGO NEUTRO

$$p = \frac{1,05 - 0,95}{1,15} = 0,5 \quad y \quad 1 - p = 0,5$$

FACTORES

$$d = \frac{95}{100} = 0,95 \quad u = \frac{115}{100} = 1,15$$

CALCULO DE LA PRIMA

$$c = \frac{15 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5}{1,05} = 7,142857143$$

Como vemos se cumple la condición de libre arbitraje

FACTORES EN TIEMPO CONTINUO

$$u = e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}}$$

$$d = \frac{1}{u}$$

Como vemos los factores no dependen de la probabilidad de ocurrencia del evento sino de la volatilidad de la acción σ

FACTORES EN TIEMPO DISCRETO

$$u = \frac{S_u}{S_0} \quad d = \frac{S_d}{S_0}$$

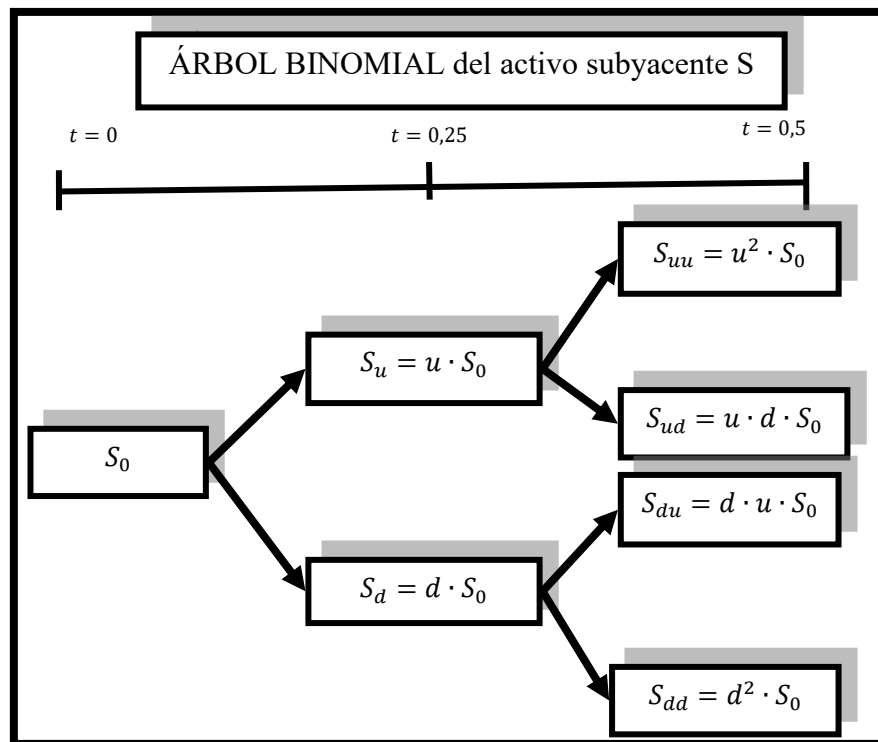
ÁRBOL BINOMIAL DE DOS PASOS EN TIEMPO DISCRETO

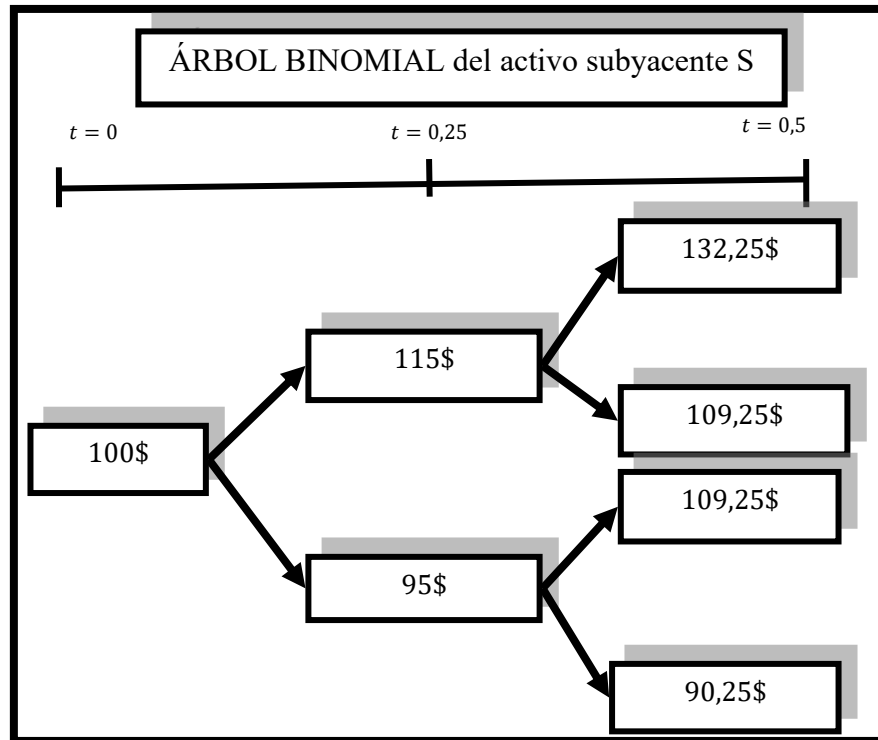
VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA

HORIZONTE DE TIEMPO

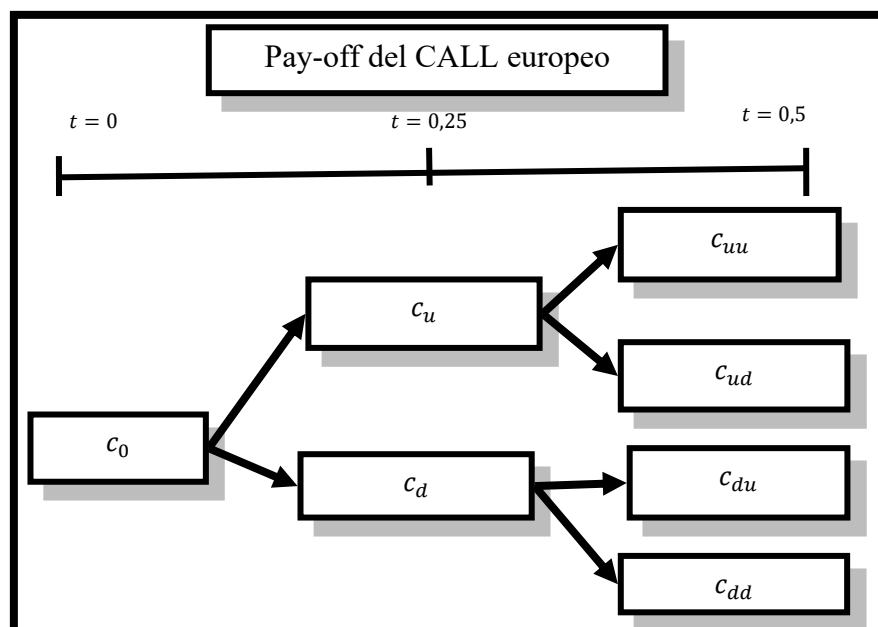
Suponemos que $\Delta t = 0,25$ y que $t = 0$ y trabajaremos con un ÁRBOL BINOMIAL de dos pasos.

ACTIVO SUBYACENTE



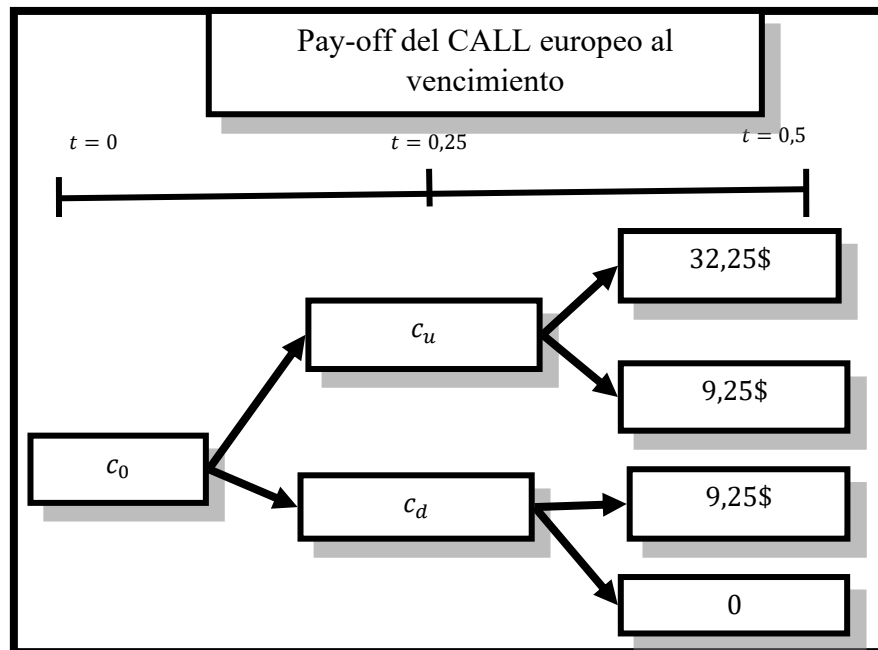


OPCIÓN DE COMPRA



Para comenzar en el momento $t = 0,5$ en el último pay-off del árbol binomial del CALL se utiliza la fórmula habitual ya que es donde se puede hacer ejercicio de la opción

$$\max[S_T - K; 0]$$



Luego utilizamos las formulas que obtuvimos

$$c_u = \frac{c_{uu} \cdot n + c_{ud} \cdot (1 - n)}{R}$$

$$c_d = \frac{c_{du} \cdot m + c_{dd} \cdot (1 - m)}{R}$$

$$c = \frac{c_u \cdot p + c_d \cdot (1 - p)}{R}$$

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$\pi = \frac{R - d}{u - d} \quad \overline{1 - \pi} = \frac{u - R}{u - d}$$

Donde R, u , y d se mantienen constantes a lo largo de la vida del derivado, por lo cual las probabilidades riesgo neutro también son constantes

En nuestro ejemplo

$$\pi = \frac{1,05 - 0,95}{1,15 - 0,95} = 0,5 \quad \overline{1 - \pi} = \frac{1,15 - 1,05}{1,15 - 0,95} = 0,5$$

$$m = \frac{1,05 - 0,95}{1,15 - 0,95} = 0,5 \quad \overline{1 - m} = \frac{1,15 - 1,05}{1,15 - 0,95} = 0,5$$

$$n = \frac{1,05 - 0,95}{1,15 - 0,95} = 0,5 \quad \overline{1 - n} = \frac{1,15 - 1,05}{1,15 - 0,95} = 0,5$$

$$c_u = \frac{32,25 \cdot 0,5 + 9,25 \cdot 0,5}{1,05} = 19,762$$

$$c_d = \frac{9,25 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5}{1,05} = 4,405$$

$$c = \frac{19,762 \cdot 0,5 + 4,405 \cdot 0,5}{1,05} = 11,568$$

ÁRBOL BINOMIAL DE UN PASO

VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE VENTA PUT

Para la valuación del PUT tomaremos los datos que utilizamos para valorar el CALL.

Sea una opción de venta PUT sobre un activo subyacente que es una acción que no paga dividendos. Para obtener la misma debemos pagar una PRIMA

$$p = POV$$

La cual buscamos valorar.

CARACTERÍSTICAS DEL PUT

PRECIO DE EJERCICIO K

100\$

TIEMPO DE VENCIMIENTO

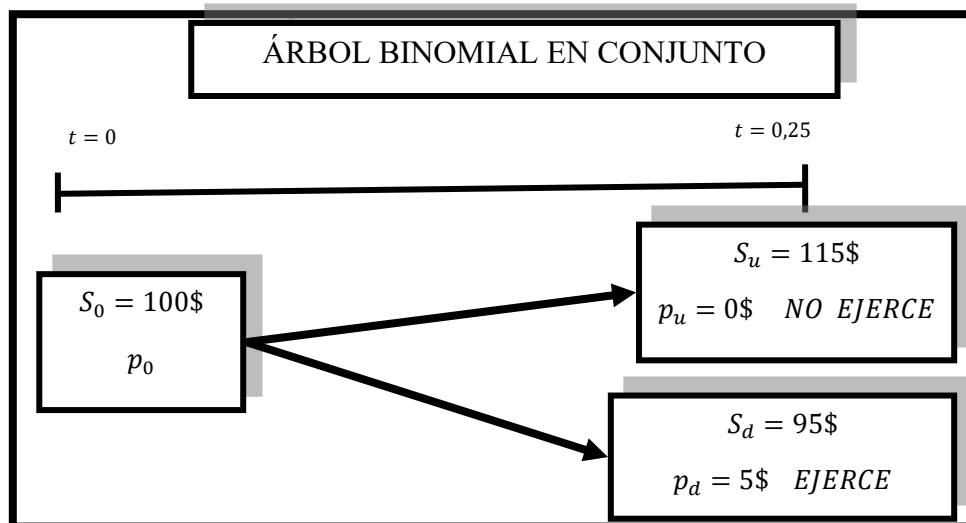
$$t + \Delta t = 0,25$$

ACTIVO SUBYACENTE

Una acción que no paga dividendos

Al vencimiento $t + \Delta t$ el PUT se lo puede EJERCER o NO EJERCER y el pay-off del mismo es igual a

$$\max[K - S_T; 0]$$



CONSTRUCCIÓN DE UNA CARTERA LIBRE DE RIESGO

CARTERA 1

Si decidimos conformar una cartera compuesta por una posición LONG en un PUT y una posición LONG en la cantidad de una acción que no paga dividendos y esto lo hacemos en $t = 0$. También podríamos haber tomado posiciones contrarias y llegaríamos al mismo resultado.

PREGUNTA IMPORTANTE

¿Cómo obtener una combinación libre de riesgo, de forma tal de que el valor de la cartera en $t + \Delta t$ pase de ser aleatorio a ser determinístico de tal manera de obtener un rendimiento libre de riesgo y que esto ocurra por una decisión que tomamos en $t = 0$?

EL VALOR DE LA CARTERA EN $t + \Delta t$

ESCENARIO UP

$$S_u + p_u = \pi_u$$

$$1 \times 115\$ + 0\$ = 115\$$$

ESCENARIO DOWN

$$S_d + p_d = \pi_d$$

$$1 \times 95\$ + 5\$ = 100\$$$

Como vemos la cartera puede tomar dos valores según del escenario en donde estemos parados

$$\pi_u \text{ y } \pi_d$$

Como vemos

$$\pi_u \neq \pi_d$$

Luego no logramos eliminar la incertidumbre en el valor que toma la cartera en $t + \Delta t$

CARTERA 2

Si decidimos conformar una cartera compuesta por una posición LONG en un PUT y una posición LONG en la cantidad de $-\delta_0 = 0,25$ acciones que no pagan dividendos y esto lo hacemos en $t = 0$.

EL VALOR DE LA CARTERA EN $t = 0$

$$-\delta_0 S_0 + p_0 = \pi_0$$

EL VALOR DE LA CARTERA EN $t + \Delta t$

ESCENARIO UP

$$-\delta_0 S_u + p_u = \pi_u$$

$$0,25 \times 115\$ + 0 = 28,75\$$$

ESCENARIO DOWN

$$-\delta_0 S_d + p_d = \pi_d$$

$$0,25 \times 95\$ + 5\$ = 28,75\$$$

Como vemos la cartera puede tomar dos valores según del escenario en donde estemos parados

$$\pi_u \text{ y } \pi_d$$

Pero en este caso

$$\pi_u = \pi_d = \pi_0 \cdot (1 + r)$$

RENDIMIENTO DE CARTERA 2

$$\frac{CAPITAL\ FINAL}{CAPITAL\ INICIAL} = 1 + r$$

Donde

$$CAPITAL\ FINAL = -\delta_0 S_u + p_u = \pi_u = 28,75\$$$

$$CAPITAL\ INICIAL = -\delta_0 S_0 + p_0 = \pi_0 = 0,25 \cdot 100\$ + p$$

Por lo tanto

$$\frac{28,75}{25 + p} = 1,05$$

$$p = 2,380952381\$$$

De esta manera obtuvimos el valor del PUT en $t = 0$

CALCULO DEL DELTA δ_0

Como vimos en $t + \Delta t$ en ambos escenarios los ingresos son iguales

$$-\delta_0 S_d + p_d = -\delta_0 S_u + p_u$$

Por lo tanto

$$\delta_0 = \frac{p_u - p_d}{S_u - S_d} < 0$$

De esta manera hallamos la cantidad de acciones que debemos tener en cartera para hacer la cartera libre de riesgo.

$$\delta_0 = \frac{p_u - p_d}{S_0[u - d]}$$

Podemos relacionar el DELTA con el concepto de derivada

En nuestro ejemplo

$$\delta_0 = \frac{0 - 5}{115 - 95} = -0,25$$

DETERMINACIÓN DE LA PRIMA DEL PUT

$$\frac{-\delta_0 S_0 u + p_u}{-\delta_0 S_0 + p} = 1 + r$$

$$-\delta_0 S_0 + p = \frac{-\delta_0 S_0 u + p_u}{1 + r}$$

$$p = \delta_0 S_0 + \frac{-\delta_0 S_0 u + p_u}{1 + r}$$

Si

$$R = 1 + r$$

Luego

$$p = \delta_0 S_0 + \frac{-\delta_0 S_0 u + p_u}{R}$$

$$p = \frac{\delta_0 S_0 R - \delta_0 S_0 u + p_u}{R}$$

$$p = \frac{\delta_0 S_0 [R - u] + p_u}{R}$$

Donde

$$\delta_0 = \frac{p_u - p_d}{S_0 [u - d]}$$

Por lo tanto

$$p = \frac{\left[\frac{p_u - p_d}{S_0 [u - d]} \right] S_0 [R - u] + p_u}{R}$$

$$p = \frac{\left[\frac{p_u - p_d}{[u - d]} \right] [R - u] + p_u}{R}$$

$$Rp = \left[\frac{p_u - p_d}{[u - d]} \right] [R - u] + p_u$$

$$Rp = p_u \frac{[R - u]}{[u - d]} + p_u - p_u \frac{[R - u]}{[u - d]}$$

$$Rp = p_u \left[\frac{[R - u]}{[u - d]} + 1 \right] - p_u \frac{[R - u]}{[u - d]}$$

Donde

$$\left[\frac{[R - u]}{[u - d]} + 1 \right] = \frac{R - u + u - d}{u - d} = \frac{R - d}{u - d}$$

Donde las probabilidades riesgo neutro son iguales a

$$\pi = \frac{R - d}{u - d} \quad y \quad (1 - \pi) = \frac{[u - R]}{[u - d]}$$

Por lo tanto

$$p = \frac{p_u \cdot \pi + p_d \cdot (1 - \pi)}{R}$$

Es el valor actual del valor esperado utilizando las probabilidades RIESGO NEUTRO.

$$p = \frac{E_{RIESGO NEUTRO}(p_t)}{1 + r}$$

En nuestro ejemplo

PROBABILIDAD RIESGO NEUTRO

$$\pi = \frac{1,05 - 0,95}{1,15} = 0,5 \quad y \quad 1 - \pi = 0,5$$

FACTORES

$$d = \frac{95}{100} = 0,95 \quad u = \frac{115}{100} = 1,15 \quad R = 1,05$$

Como vemos se cumple la condición de libre arbitraje

$$u > R > d$$

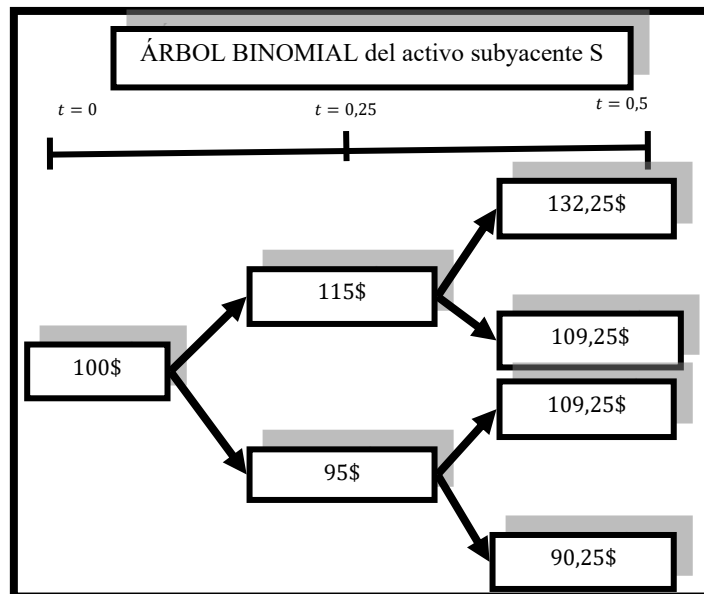
CALCULO DE LA PRIMA

$$p = \frac{0 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,5}{1,05} = 2,380952381\$$$

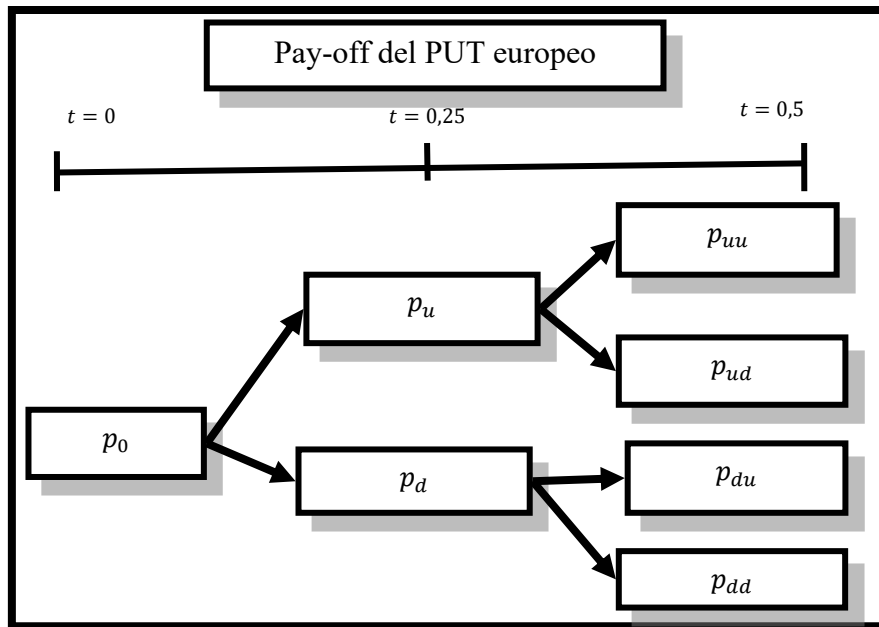
ÁRBOL BINOMIAL DE DOS PASOS EN TIEMPO DISCRETO

VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE VENTA

ACTIVO SUBYACENTE



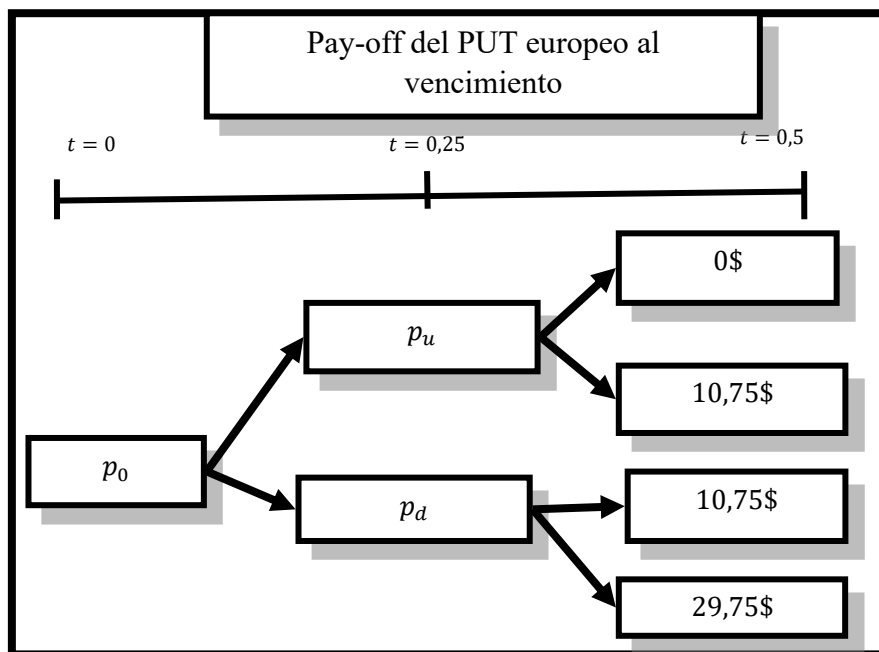
OPCIÓN DE VENTA



Vamos a cambiar el precio de ejercicio de 100\$ a 120\$

Para comenzar en el momento $t = 0,5$ en el último pay-off del árbol binomial del PUT se utiliza la fórmula habitual ya que es donde se puede hacer ejercicio de la opción

$$\text{máx}[K - S_T; 0]$$



Luego utilizamos las formulas que obtuvimos

$$p_u = \frac{p_{uu} \cdot n + p_{ud} \cdot (1 - n)}{R}$$

$$p_d = \frac{p_{du} \cdot m + p_{dd} \cdot (1 - m)}{R}$$

$$p = \frac{p_u \cdot \pi + p_d \cdot (1 - \pi)}{R}$$

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$\pi = \frac{R - d}{u - d} \quad \overline{1 - \pi} = \frac{u - R}{u - d}$$

Donde $R, u, y d$ se mantienen constantes a lo largo de la vida del derivado, por lo cual las probabilidades riesgo neutro también son constantes

En nuestro ejemplo

$$\pi = \frac{1,05 - 0,95}{1,15 - 0,95} = 0,5 \quad \overline{1 - \pi} = \frac{1,15 - 1,05}{1,15 - 0,95} = 0,5$$

$$m = \frac{1,05 - 0,95}{1,15 - 0,95} = 0,5 \quad \overline{1 - m} = \frac{1,15 - 1,05}{1,15 - 0,95} = 0,5$$

$$n = \frac{1,05 - 0,95}{1,15 - 0,95} = 0,5 \quad \overline{1 - n} = \frac{1,15 - 1,05}{1,15 - 0,95} = 0,5$$

$$p_u = \frac{0 \cdot 0,5 + 10,75 \cdot 0,5}{1,05} = 5,119047619\$$$

$$p_d = \frac{10,75 \cdot 0,5 + 29,75 \cdot 0,5}{1,05} = 19,28571429\$$$

$$p = \frac{5,119047619 \cdot 0,5 + 19,28571429 \cdot 0,5}{1,05} = 11,62131519\$$$

SIMULACIÓN DE OPCIONES

ÁRBOL BINOMIAL DE UN SÓLO PASO COMO SIMULACIÓN DEL VALOR DE UNA OPCIÓN

SIMULACIÓN DE UNA POSICIÓN LONG EN UN CALL

Tenemos que el balance en el momento t es igual a

ACTIVO	PASIVO
COMPRA DE ACCIONES	PRESTAMO PARA FINANCIAR PARTE DE LA COMPRA DE ACCIONES
$\Delta_{CALL} S_t$	B_t
	PATRIMONIO NETO
	POC_t

Recordando que

$$ACTIVO - PASIVO = PATRIMONIO NETO$$

Por lo tanto

$$\Delta_{CALL} S_t - B_t = POC_t$$

Donde

$$\Delta_{CALL} = \frac{(c_u - c_d)}{(S_u - S_d)} > 0$$

Donde para simular un CALL en posición LONG tuvimos que comprar Δ_{CALL} a un precio de S_t y financiar parte de la compra con un préstamo por un valor de B_t

Tenemos que el balance en el momento T como suponemos que hay sólo dos escenarios posibles en el valor del subyacente

ESCENARIO UP

ACTIVO	PASIVO
ACCIONES EN CARTERA	PRESTAMO
$\Delta_{CALL} S_{UP}$	$B_t \cdot e^{rT}$
	PATRIMONIO NETO
	c_u

ESCENARIO DOWN

ACTIVO	PASIVO
ACCIONES EN CARTERA	PRESTAMO
$\Delta_{CALL} S_{DOWN}$	$B_t \cdot e^{rT}$
	PATRIMONIO NETO
	c_d

La única variable de la cual tenemos control y lo tenemos en el momento t es Δ_{CALL} que es la cantidad de acciones que tenemos en cartera para realizar la simulación.

Tenemos en siguiente sistema de ecuaciones en el momento T

$$\Delta_{CALL} S_0 u - B_t \cdot R = c_u$$

$$\Delta_{CALL} S_0 d - B_t \cdot R = c_d$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} S_0 u & -R \\ S_0 d & -R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_{CALL} \\ B_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_u \\ c_d \end{bmatrix}$$

Si resolvemos por CRAMER

Donde

$$DETER \begin{vmatrix} S_0 u & -R \\ S_0 d & -R \end{vmatrix} = -S_0 u R + S_0 d R = -S_0 R \cdot (u - d)$$

Donde

$$(u - d) \neq 0$$

Por lo cual

$$\Delta_{CALL} = \frac{\begin{vmatrix} c_u & -R \\ c_d & -R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 u & -R \\ S_0 d & -R \end{vmatrix}} = \frac{-R c_u + R c_d}{-S_0 R \cdot (u - d)} = \frac{-R \cdot (c_u - c_d)}{-R \cdot S_0 \cdot (u - d)} = \frac{(c_u - c_d)}{S_0 \cdot (u - d)}$$

$$B_t = \frac{\begin{vmatrix} S_0 u & c_u \\ S_0 d & c_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 u & -R \\ S_0 d & -R \end{vmatrix}} = \frac{S_0 u c_d - S_0 d c_u}{-S_0 R \cdot (u - d)} = \frac{S_0 \cdot (u c_d - d c_u)}{-R \cdot S_0 \cdot (u - d)} = \frac{(u c_d - d c_u)}{-R \cdot (u - d)}$$

En t tenemos la siguiente ecuación

$$\Delta_{CALL} S_t - B_t = c$$

$$\left[\frac{(c_u - c_d)}{S_0 \cdot (u - d)} \right] S_0 + \frac{(u c_d - d c_u)}{R \cdot (u - d)} = c$$

$$\left[\frac{(c_u - c_d)}{(u - d)} \right] + \frac{(u c_d - d c_u)}{R \cdot (u - d)} = c$$

$$\frac{R \cdot (c_u - c_d) + (u c_d - d c_u)}{R \cdot (u - d)} = c$$

$$\frac{c_u (R - d) + c_d (u - R)}{R \cdot (u - d)} = c$$

Donde

$$p = \frac{R - d}{u - d} \quad y \quad (1 - p) = \frac{[R - u]}{[u - d]}$$

Por lo tanto

$$c = \frac{c_u \cdot p + c_d \cdot (1 - p)}{R}$$

En nuestro ejemplo

Tenemos que el balance en el momento t es igual a

ACTIVO	PASIVO
COMPRA DE ACCIONES	PRESTAMO PARA FINANCIAR PARTE DE LA COMPRA DE ACCIONES
$\Delta_{CALL} S_t = 0,75 \cdot 100\$ = 75\$$	$B_t = 67,85714286$
	PATRIMONIO NETO
	$POC_t = 7,142857143$

ESCENARIO UP

ACTIVO	PASIVO
ACCIONES EN CARTERA	PRESTAMO
$\Delta_{CALL}S_{UP} = 0,75 \cdot 115\$ = 86,25\$$	$B_t \cdot (1 + r) = 71,25$
	PATRIMONIO NETO
	$c_U = 15\$$

ESCENARIO DOWN

ACTIVO	PASIVO
ACCIONES EN CARTERA	PRESTAMO
$\Delta_{CALL}S_{DOWN} = 0,75 \cdot 95\$ = 71,25\$$	$B_t \cdot (1 + r) = 71,25$
	PATRIMONIO NETO
	$c_d = 0$

SIMULACIÓN DE UNA POSICIÓN SHORT EN UN CALL

Tenemos que el balance en el momento t es igual a

ACTIVO	PASIVO
DEPOSITO	VENTA EN DESCUBIERTO DE ACCIONES
B_t	$\Delta_{CALL}S_t$
	PATRIMONIO NETO
	$-POC_t$

Recordando que

$$ACTIVO - PASIVO = PATRIMONIO NETO$$

Por lo tanto

$$-\Delta_{CALL}S_t + B_t = -POC_t$$

Donde para simular un CALL en posición SHORT tuvimos que vender en descubierto Δ_{CALL} a un precio de S_t y depositar menos de los que se obtuvo de la venta con un depósito por un valor de para formar B_t

Tenemos que el balance en el momento T como suponemos que hay sólo dos escenarios posibles en el valor del subyacente

ESCENARIO UP

ACTIVO	PASIVO
DEPOSITO	ACCIONES A DEVOLVER
$B_t \cdot e^{rT}$	$\Delta_{CALL}S_{UP}$
	PATRIMONIO NETO
	$-c_U$

ESCENARIO DOWN

ACTIVO	PASIVO
DEPOSITO $B_t \cdot e^{rT}$	ACCIONES $\Delta_{CALL} S_{DOWN}$
	PATRIMONIO NETO
	$-c_d$

SIMULACIÓN DE UNA POSICIÓN LONG EN UN PUT

Tenemos que el balance en el momento t es igual a

ACTIVO	PASIVO
DEPOSITO B_t	VENTA EN DESCUBIERTO DE ACCIONES $-\Delta_{PUT} S_t$
	PATRIMONIO NETO
	POV_t

Recordando que

$$ACTIVO - PASIVO = PATRIMONIO NETO$$

Por lo tanto

$$\Delta_{PUT} S_t + B_t = POV_t$$

Donde

$$\Delta_{PUT} = \frac{p_u - p_d}{S_u - S_d} < 0$$

Donde para simular un PUT en posición LONG tuvimos que vender en descubierto $-\Delta_{PUT}$ a un precio de S_t y depositar lo que se obtuvo de la venta con un deposito por un valor de y dinero para formar B_t

Tenemos que el balance en el momento T como suponemos que hay sólo dos escenarios posibles en el valor del subyacente

ESCENARIO UP

ACTIVO	PASIVO
DEPOSITO $B_t \cdot e^{rT}$	ACCIONES A DEVOLVER $-\Delta_{PUT} S_{UP}$
	PATRIMONIO NETO
	p_u

ESCENARIO DOWN

ACTIVO	PASIVO
DEPOSITO $B_t \cdot e^{rT}$	ACCIONES A DEVOLVER $-\Delta_{PUT} S_{DOWN}$
	PATRIMONIO NETO
	p_d

SIMULACIÓN DE UNA POSICIÓN SHORT EN UN PUT

Tenemos que el balance en el momento t es igual a

ACTIVO	PASIVO
COMPRA DE ACCIONES $\Delta_{PUT} S_t$	PRESTAMO PARA FINANCIAR PARTE DE LA COMPRA DE ACCIONES B_t
	PATRIMONIO NETO
	$-POV_t$

Donde para simular un PUT en posición SHORT tuvimos que comprar Δ_{PUT} a un precio de S_t y financiar la compra y que sobre dinero con un préstamo por un valor de B_t

Tenemos que el balance en el momento T como suponemos que hay sólo dos escenarios posibles en el valor del subyacente

ESCENARIO UP

ACTIVO	PASIVO
ACCIONES EN CARTERA $\Delta_{PUT} S_{UP}$	PRESTAMO $B_t \cdot e^{rT}$
	PATRIMONIO NETO
	$-p_u$

ESCENARIO DOWN

ACTIVO	PASIVO
ACCIONES EN CARTERA $\Delta_{PUT} S_{DOWN}$	PRESTAMO $B_t \cdot e^{rT}$
	PATRIMONIO NETO
	$-p_d$

ÁRBOL BINOMIAL DE DOS PASO: SIMULACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA CALL

HORIZONTE DE TIEMPO

Suponemos que $\Delta t = 0,25$ y que $t = 0$ y trabajaremos con un ÁRBOL BINOMIAL de dos pasos.

ESCENARIOS POSIBLES

En el momento $t = 0,25$ tenemos dos escenarios posibles el cual es determinado por el valor que tomó el precio del activo subyacente

1. ESCENARIO UP o suba del precio del subyacente
2. ESCENARIO DOWN o baja del precio del subyacente

En el momento $t = 0,5$ tenemos cuatro escenarios posibles, dos por cada uno que pueda ocurrir en el momento $t = 0,25$

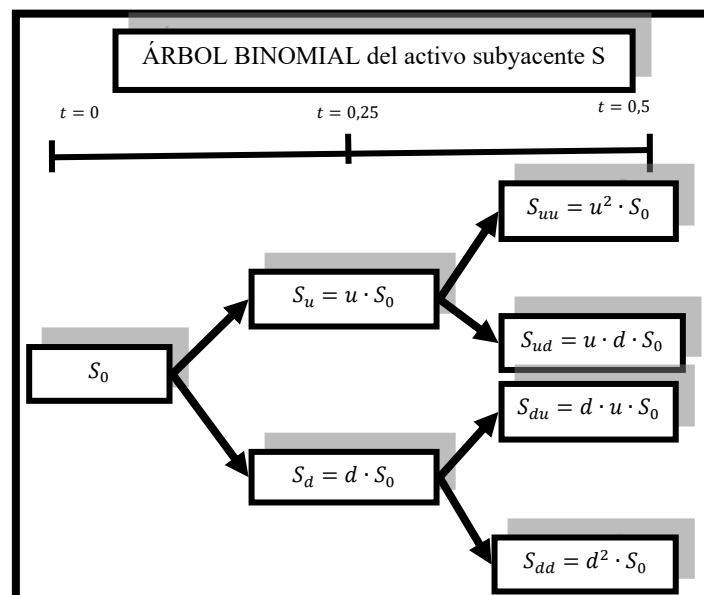
Si en el momento $t = 0,25$ ocurrió ESCENARIO UP

1. ESCENARIO UP-UP
2. ESCENARIO UP-DOWN

Si en el momento $t = 0,25$ ocurrió ESCENARIO DOWN

1. ESCENARIO UP-UP
2. ESCENARIO UP-DOWN

ACTIVO SUBYACENTE



Donde

$$u = e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}}$$

$$d = \frac{1}{u}$$

Sean los siguientes datos

$r = 10\%$ compuesta continua

$\sigma = 20\%$

$\Delta t = 0,25$

$S_0 = 104\$$

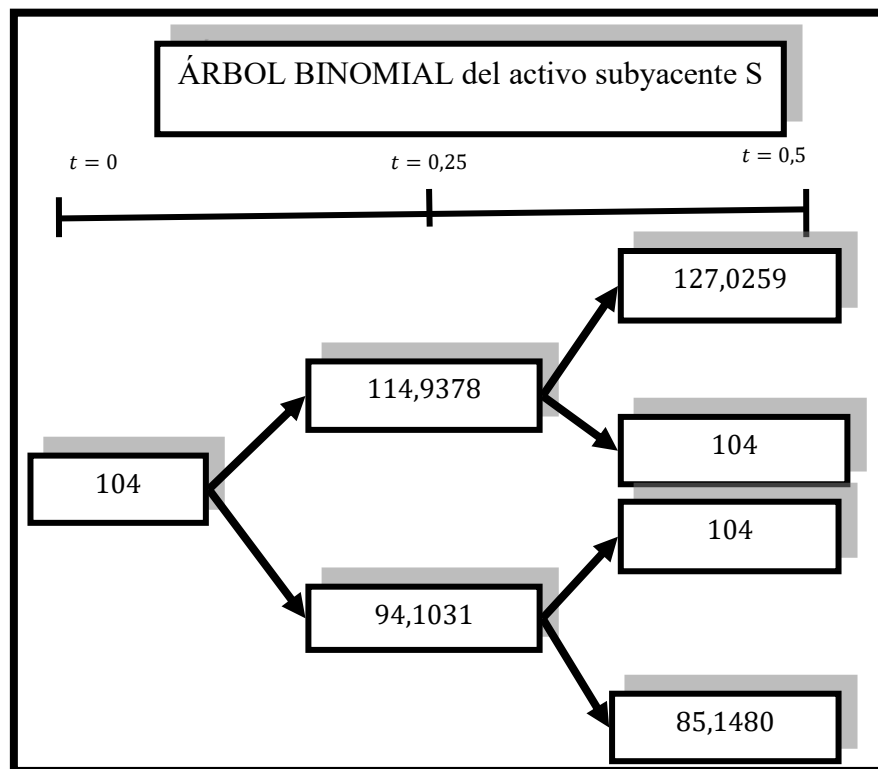
Tenemos que

$$u = e^{0,2 \cdot \sqrt{0,25}}$$

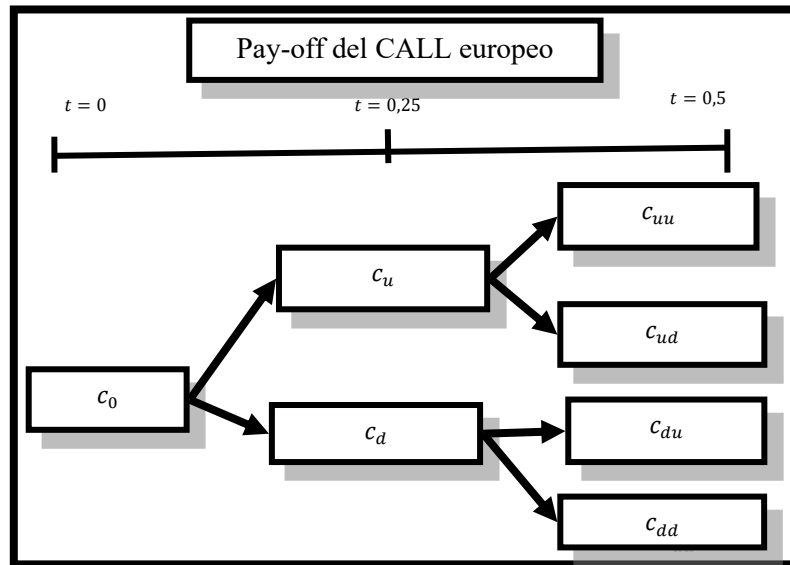
$$u = 1,10517$$

$$d = \frac{1}{e^{0,2 \cdot \sqrt{0,25}}} = \frac{1}{1,10517}$$

$$d = 0,90484$$



VALUACIÓN DE UN CALL EUROPEO EN POSICIÓN LONG



Tenemos el siguiente CALL europeo

$$K = 100$$

Vencimiento en $T = 0,5$

El activo subyacente es el que estuvimos analizando arriba

Para resolver el sistema de ecuaciones hay que encontrar el pay-off del CALL europeo para ello hay que encontrar las probabilidades riesgo neutro

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$S_u = \frac{[\pi_{RN}^{uu} S_{uu} + (1 - \pi_{RN}^{uu}) \cdot S_{ud}]}{e^{r\Delta t}}$$

$$114,9378 = \frac{[\pi_{RN}^{uu} 127,0259 + (1 - \pi_{RN}^{uu}) \cdot 104]}{e^{0,1 \cdot 0,25}}$$

$$117,8475 = \pi_{RN}^{uu} 127,0259 + 104 - \pi_{RN}^{uu} \cdot 104 = 23,0259 \cdot \pi_{RN}^{uu} + 104$$

$$\boxed{\pi_{RN}^{uu} = 0,601386} \text{ y } \boxed{[1 - \pi_{RN}^{uu}] = 0,398614}$$

$$S_d = \frac{[\pi_{RN}^{dd} S_{dd} + (1 - \pi_{RN}^{dd}) \cdot S_{du}]}{e^{0,1 \cdot 0,25}}$$

$$94,1031 = \frac{[\pi_{RN}^{dd} 85,1480 + (1 - \pi_{RN}^{dd}) \cdot 104]}{e^{0,1 \cdot 0,25}}$$

$$96,4853 = \pi_{RN}^{dd} 85,1480 + 104 - \pi_{RN}^{dd} \cdot 104 = -18,852 \cdot \pi_{RN}^{dd} + 104$$

$$\boxed{\pi_{RN}^{dd} = 0,398614} \text{ y } \boxed{[1 - \pi_{RN}^{dd}] = 0,601386}$$

$$S_0 = \frac{[\pi_{RN}^u S_u + (1 - \pi_{RN}^u) \cdot S_d]}{e^{0,1 \cdot 0,25}}$$

$$S_0 = \frac{[\pi_{RN}^u S_u + (1 - \pi_{RN}^u) \cdot S_d]}{e^{0,1 \cdot 0,25}}$$

$$104 = \frac{[\pi_{RN}^u 114,9378 + (1 - \pi_{RN}^u) \cdot 94,1031]}{e^{0,1 \cdot 0,25}}$$

$$106,6328 = \pi_{RN}^u 114,9378 + 94,1031 - \pi_{RN}^u 94,1031 = 20,8347 \pi_{RN}^u + 94,1031$$

$$\boxed{\pi_{RN}^u = 0,601386} \text{ y } \boxed{(1 - \pi_{RN}^u) = 0,398614}$$

Primero, obtenemos el pay-off del último nodo con el pay-off del CALL $\max(S_t - K; 0)$, de esta manera obtenemos c_{uu} , c_{ud} , c_{du} y c_{dd} y el resto de los nodos los obtenemos con la formula

VALOR DEL CALL EN CADA NODO

$$\boxed{E_{\pi^{RN}}(c_t) \cdot e^{-r \cdot T}}$$

Las probabilidades riesgo neutro π^{RN} ya las calculamos más arriba.

En el momento $t = 0,25$

Calculo de c_u

$$c_u = [\pi_{uu}^{RN} c_{uu} + (1 - \pi_{uu}^{RN}) c_{ud}] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

$$c_u = [0,601386 \cdot 27,0259 + (0,398614) \cdot 4] \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25}$$

$$c_u = 17,4068$$

Calculo de c_d

$$c_d = [\pi_{dd}^{RN} c_{dd} + (1 - \pi_{dd}^{RN}) c_{du}] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

$$c_d = [0,601386 \cdot 0 + (0,398614) \cdot 4] \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25}$$

$$c_d = 2,3461$$

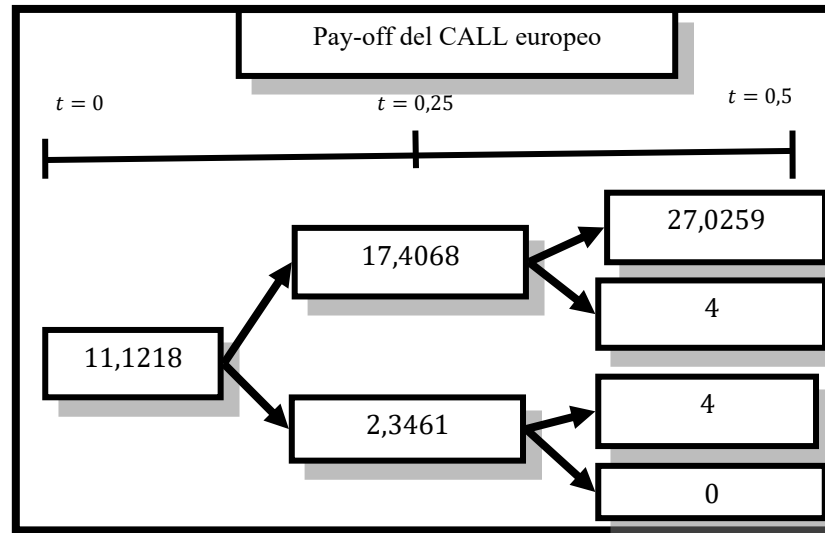
En el momento $t = 0$

Calculo c_0

$$c_0 = [\pi_u^{RN} c_u + \pi_d^{RN} c_d] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

$$c_0 = [(0,601386) \cdot 17,4068 + (0,398614) \cdot 2,3461] \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25}$$

$$c_0 = 11,1218$$



CARTERA QUE SIMULA EL COMPORTAMIENTO DEL CALL EN POSICIÓN LONG

Hay dos estados de la naturaleza UP y DOWN. Para que haya mercados completos tiene que haber tantos activos linealmente independientes como estados de la naturaleza haya, por lo cual, en este caso tiene que haber dos activos linealmente independientes., estos activos son el activo subyacente y un préstamo o depósito P , con ellos podemos replicar cualquier activo. Luego, conformamos una cartera que replica el movimiento que realiza el pay-off del CALL con ambos activos

CARTERA QUE SE UTILIZA PARA SIMULAR EL CALL

Está compuesta en el momento $t = 0$ por α_0 acciones y el préstamo P

En el momento $t = 0$

$$c_0 = \alpha_0 S_0 - P_0$$

En el momento $t = 0,25$

$$c_u = \alpha_u S_u - P_u e^{r \cdot 0,25}$$

$$c_d = \alpha_d S_d - P_d e^{r \cdot 0,25}$$

Si ocurre el ESCENARIO UP $t = 0,25$

En el momento $t = 0,25$

$$c_u = \alpha_u S_u - P_u$$

En el momento $t = 0,5$

$$c_{uu} = \alpha_u S_{uu} - P_u e^{r \cdot 0,25}$$

$$c_{ud} = \alpha_u S_{ud} - P_u e^{r \cdot 0,25}$$

Si ocurre el ESCENARIO DOWN $t = 0,25$

En el momento $t = 0,25$

$$c_d = \alpha_d S_d - P_d$$

$$c_{du} = \alpha_d S_{du} - P_d e^{r \cdot 0,25}$$

$$c_{dd} = \alpha_d S_{dd} - P_d e^{r \cdot 0,25}$$

Como vemos las incógnitas son α_0, α_u y α_d y P_0, P_d y P_u

DETERMINACIÓN DEL ÁRBOL DE DELTAS

En $t = 0$

Compramos α_0 acciones

$$c_0 = \alpha_0 S_0 - P_0$$

En $t = 0,25$

Traemos de $t = 0$ la cantidad de α_0 acciones, pero el valor de las mismas cambia y si suponemos que hay dos posibles escenarios.

ESCENARIO UP

$$c_u = \alpha_0 S_u - P_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$$

ESCENARIO DOWN

$$c_d = \alpha_0 S_d - P_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$$

Luego tenemos

$$\alpha_0 S_u - P_0 \cdot R = c_u$$

$$\alpha_0 S_d - P_0 \cdot R = c_d$$

Donde

$$R = e^{r \cdot \Delta t}$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} S_u & -R \\ S_d & -R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_u \\ c_d \end{bmatrix}$$

Si resolvemos por CRAMER

$$DETER \begin{vmatrix} S_u & -R \\ S_d & -R \end{vmatrix} = -S_u R + S_d R = -R \cdot (S_u - S_d)$$

Donde

$$(S_u - S_d) \neq 0$$

Por lo cual

$$\alpha_0 = \frac{\begin{vmatrix} c_u & -R \\ c_d & -R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & -R \\ S_d & -R \end{vmatrix}} = \frac{-Rc_u + Rc_d}{-R \cdot (S_u - S_d)} = \frac{(c_u - c_d)}{(S_u - S_d)}$$

$$\alpha_0 = \frac{(c_u - c_d)}{(S_u - S_d)}$$

$$P_0 = \frac{\begin{vmatrix} S_u & c_u \\ S_d & c_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & -R \\ S_d & -R \end{vmatrix}} = \frac{S_u c_d - S_d c_u}{-R \cdot (S_u - S_d)}$$

$$P_0 = \frac{S_u c_d - S_d c_u}{-R \cdot (S_u - S_d)}$$

En $t = 0,5$

SI OCURRE UP EN $t = 0,25$

UP-UP

$$c_{uu} = -P_u \cdot e^{r\Delta t} + \alpha_u S_{uu}$$

UP-DOWN

$$c_{ud} = -P_u \cdot e^{r\Delta t} + \alpha_u S_{ud}$$

Donde

$$P_u = \frac{S_{uu} c_{ud} - S_{ud} c_u}{-R \cdot (S_{uu} - S_{ud})}$$

$$\alpha_u = \frac{(c_{uu} - c_{ud})}{(S_{uu} - S_{ud})}$$

En el momento $t = 0,25$ debemos tener la cantidad de α_u para eliminar la incertidumbre en $t = 0,5$ en el valor de la cartera

SI OCURRE DOWN EN $t = 0,25$

DOWN-UP

$$c_{ud} = P_d \cdot e^{r\Delta t} + \alpha_d S_{ud}$$

DOWN-DOWN

$$c_{dd} = P_d \cdot e^{r\Delta t} + \alpha_d S_{dd}$$

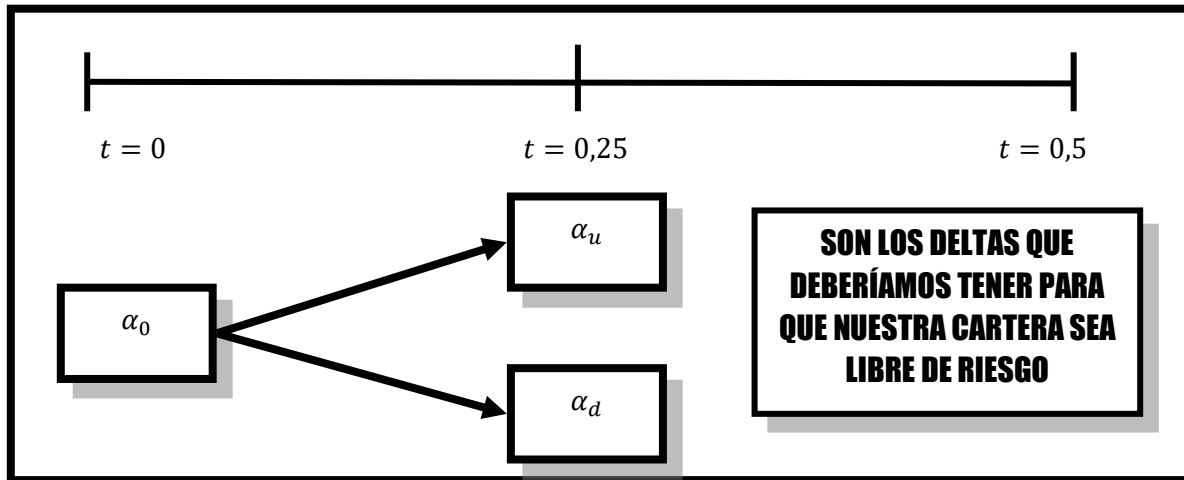
Donde

$$P_d = \frac{S_{du} c_{dd} - S_{dd} c_{ud}}{-R \cdot (S_{du} - S_{dd})}$$

$$\alpha_d = \frac{(c_{du} - c_{dd})}{(S_{du} - S_{dd})}$$

En el momento $t = 0,25$ debemos tener la cantidad de α_d para eliminar la incertidumbre en $t = 0,5$ en el valor de la cartera.

ARBOL DE DELTAS α



CALCULO DE LOS DELTAS

$$\alpha_0 = \frac{17,4068 - 2,3461}{114,9378 - 94,1031} = 0,72286618$$

$$\alpha_u = \frac{27,0259 - 4}{127,0259 - 104} = 1$$

$$\alpha_d = \frac{4 - 0}{104 - 85,1480} = 0,212179079$$

MERCADO DE CREDITO

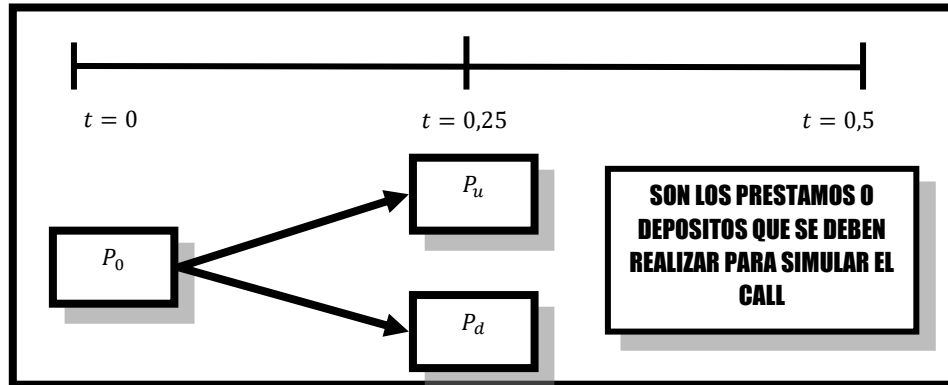
$$P_0 = -e^{-0,1 \cdot 0,25} \times \left[\frac{114,9378 \times 2,3461 - 94,1031 \times 17,4068}{114,9378 - 94,1031} \right] = 64,05625657\$$$

$$P_u = -e^{-0,1 \cdot 0,25} \times \left[\frac{127,0259 \times 4 - 104 \times 27,0259}{127,0259 - 104} \right] = 97,5309912\$$$

$$P_d = -e^{-0,1 \cdot 0,25} \times \left[\frac{104 \times 0 - 85,1480 \times 4}{104 - 85,1480} \right] = 17,62055769\$$$

El mercado de crédito está al servicio de las necesidades de la simulación. Si hacen falta acciones se sale a pedir un préstamo y se realiza una venta de acciones se deposita el producto de la venta.

ÁRBOL DEL MERCADO DE CREDITO



REBALANCEO DE LA CARTERA

En la realidad ocurre muchas veces que en cartera exista otra cantidad de acciones que no concuerden con las que se necesita para hacer nuestra cartera libre de riesgo, por lo cual hay que rebalancear la cartera para tener la cantidad de acciones que deberíamos. Por lo cual necesitamos comprar o vender una determinada cantidad de acciones y para ello o bien necesitamos financiarnos con un préstamo en el caso de la compra de acciones o depositar el producto de la venta.

En el ejemplo partimos en el momento $t = 0$ con la cantidad de acciones

$$\alpha_0$$

En el momento $t = 0,25$ tenemos dos escenarios posibles el cual es determinado por el valor que tomó el precio del activo subyacente

1. ESCENARIO UP o suba del precio del subyacente
2. ESCENARIO DOWN o baja del precio del subyacente

Si ocurre el escenario UP debemos tener en cartera la cantidad de acciones

$$\alpha_u$$

Si ocurre el escenario DOWN debemos tener en cartera la cantidad de acciones

$$\alpha_d$$

Pero en ambos casos llegamos con α_0 por lo cual dependiendo del escenario debemos comprar o vender acciones para simular el CALL

Si ocurre UP luego debemos rebalancear la cartera vendiendo o comprando

SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
TENEMOS EN CARTERA QUE TRAEMOS DEL PASADO	α_0
DEBEMOS TENER EN CARTERA	α_u
SE DEBEN VENDER O COMPRAR ACCIONES	$\alpha_0 - \alpha_u$

ESCENARIO	ACCIONES A TOMAR		MERCADO FINANCIERO
$Si \alpha_0 - \alpha_u > 0$	SOBRAN ACCIONES	VENDER LAS QUE SOBRAN	SE HACE UN DEPOSITO POR EL VALOR DE LA VENTA
$Si \alpha_0 - \alpha_u < 0$	FALTAN ACCIONES	COMPRAR LAS QUE FALTAN	SE TOMA UN PRESTAMO POR EL VALOR DE LA COMPRA
$Si \alpha_0 - \alpha_u = 0$	CERO	NO SE HACE NADA	NO SE HACE NADA

Si ocurre DOWN luego debemos rebalancear la cartera vendiendo o comprando

SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
TENEMOS EN CARTERA QUE TRAEMOS DEL PASADO	α_0
DEBEMOS TENER EN CARTERA	α_d
SE DEBEN VENDER O COMPRAR ACCIONES	$\alpha_0 - \alpha_d$

ESCENARIO	ACCIONES A TOMAR		MERCADO FINANCIERO
$Si \alpha_0 - \alpha_d > 0$	SOBRAN ACCIONES	VENDER LAS QUE SOBRAN	SE HACE UN DEPOSITO POR EL VALOR DE LA VENTA
$Si \alpha_0 - \alpha_d < 0$	FALTAN ACCIONES	COMPRAR LAS QUE FALTAN	SE TOMA UN PRESTAMO POR EL VALOR DE LA COMPRA
$Si \alpha_0 - \alpha_d = 0$	CERO	NO SE HACE NADA	NO SE HACE NADA

La cobertura tiene un costo por los préstamos tomados o un beneficio si tenemos en cuenta que se hacen depósitos, los cuales se cancelan entre si no hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

REBALANCEAR LA CARTERA EN UNA SITUACIÓN DONDE NO HAY OPORTUNIDADES DE OBTENER GANANCIAS POR ARBITRAJE

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN SHORT EN UN CALL EUROPEO

CARTERA 2

POSICIÓN LONG EN ACCIONES Y TOMAREMOS UN PRESTAMO

Es decir, que tomamos una posición SHORT en la cartera 1 y posición LONG en la cartera 2. Veremos que nuestro pay-off en cada momento serán todos nulos

EN EL MOMENTO $t = 0$ **CARTERA 2**

Hay que tomar una POSICIÓN LONG o compra de $\alpha_0 = 0,72286618$ ACCIONES y tomar un préstamo de 64,05628272\$ a pagar en $t = 0,5$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar un préstamo para financiar la compra de acciones a pagar en $t = 0,5$	64,05628272\$
Comprar la cantidad de $\alpha_0 = 0,72286618$ acciones al precio $S_0 = 104$ \$	-75,1780827\$
Tomar una posición SHORT en un CALL	11,1218\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO UP****PARA SIMULAR EL CALL DEBEMOS TENER EN CARTERA**

Hay que tener en cartera $\alpha_u = 1$ ACCIONES y tomar un préstamo de 97,5310\$

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $\alpha_0 = 0,72286618$ ACCIONES y una deuda a pagar de 65,67787524\$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
Tomar un préstamo para financiar la compra de acciones a pagar en $t = 0,5$	31,85315158\$
Comprar la cantidad de $\alpha_u - \alpha_0 = 0,27713382$ acciones al precio $S_u = 114,9378$ que hacen falta para tener α_u acciones en cartera	-31,85315158\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SALDO DE PRESTAMOS Y DEPOSITOS EN EL ESCENARIO UP A VALORES DE $t = 0,25$	
DEUDA TOMADA EN EL MOMENTO $t = 0$	65,67787524\$
DEUDA TOMADA EN EL MOMENTO $t = 0,25$	31,85315158\$
TOTAL	97,53102682\$

VALOR DE LA CARTERA 1

$$-c_u = -17,4068\$$$

VALOR DE LA CARTERA 2

$$17,4068\$ = 1 \cdot 114,9378\$ - 97,531\$$$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN**PARA SIMULAR EL CALL DEBEMOS TENER EN CARTERA**

Hay que tener en cartera $\alpha_d = 0,212179079$ ACCIONES y tomar un préstamo de 17,62060909\$

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $\alpha_0 = 0,72286618$ ACCIONES y una deuda a pagar de

$$64,05628272\$e^{0,1 \cdot 0,25} = 65,67787524\$$$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
Deposito de la ganancia por la venta de acciones para cobrar en $t = 0,5$	-48,05723933\$
Vender la cantidad de $\bar{\alpha}_0 - \alpha_d = 0,510687101$ acciones al precio $S_d = 94,1031$ que sobran para tener α_d acciones en cartera	48,05723933\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SALDO DEL PRESTAMOS Y DEPOSITOS EN EL ESCENARIO DOWN A VALORES DE $t = 0,25$	
DEUDA TOMADA EN EL MOMENTO $t = 0$	65,67787524\$
DEPOSITO TOMADA EN EL MOMENTO $t = 0,25$	-48,05723933\$
TOTAL	17,62063591\$

VALOR DE LA CARTERA 1

$$-c_d = -2,3461\$$$

VALOR DE LA CARTERA 2

$$2,3461\$ = 0,212179079 \cdot 94,1031\$ - 17,62060909\$$$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
Pagar deuda	$-64,05628272\$e^{0,1 \cdot 0,25} - 31,85315158\$e^{0,1 \cdot 0,25} = -100\$$
vender la cantidad de 1 acciones al precio $S_{uu} = 127,0259$	127,0259\$
RESULTADO DEL CALL	-27,0259\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
Pagar deuda	-100\$
Vender la cantidad de 1 acciones al precio $S_{ud} = 104\$$	104\$
RESULTADO DEL CALL	-4\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP****HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0,25$**

Hay que tener en cartera $\alpha_d = 0,212179079$ ACCIONES y una deuda de

$$17,62060909\$e^{0,1 \cdot 0,25} = 18,06667\$$$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
Pagar deuda	-18,06667\$
vender la cantidad de 0,212179079 acciones al precio $S_{du} = 104\$$	22,06667\$
RESULTADO DEL CALL	-4\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
Pagar deuda	-18,06667\$
RESULTADO DEL CALL	0\$
Vender la cantidad de 0,212179079 acciones al precio $S_{dd} = 85,1480\$$	18,0667
BENEFICIO EN $t = 0,5$	0\$

ESTRATEGIAS DE ARBITRAJE EN UNA OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL

Seguiremos con el mismo ejemplo con el cual venimos trabajando, donde cuando valuamos el CALL EUROPEO por el método BINOMIAL llegamos a que la prima era igual a

$$c = 11,1218\$$$

Pero qué ocurriría si la prima de mercado c^M es distinta, en este caso un arbitrajista podría obtener una ganancia segura y sin colocar capital alguno.

SI LA PRIMA DE MERCADO $c^M > c$

Tenemos que

$$c^M = 20\$$$

Como el CALL está sobrevaluado, es decir, vale más de lo que debería valer, tomamos una posición SHORT en el mismo

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN SHORT EN UN CALL EUROPEO

CARTERA 2

POSICIÓN LONG EN ACCIONES Y TOMAREMOS UN PRESTAMO

Es decir que tomamos una posición SHORT en la cartera 1 y posición LONG en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar un préstamo para financiar la compra de acciones a pagar en $t = 0,5$	55,1780827\$
Comprar la cantidad de $\alpha_0 = 0,72286618$ acciones al precio $S_0 = 104$ \$	-75,1780827\$
Tomar una posición SHORT en un CALL	20\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO UP****PARA SIMULAR EL CALL DEBEMOS TENER EN CARTERA**Hay que tener en cartera $\alpha_u = 1$ ACCIONES**HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$** Se tiene en cartera $\alpha_0 = 0,72286618$ ACCIONES

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
Tomar un préstamo para financiar la compra de acciones a pagar en $t = 0,5$	31,85315158\$
Comprar la cantidad de $\overline{\alpha_u - \alpha_0} = 0,27713382$ acciones al precio $S_u = 114,9378$ que hacen falta para tener α_u acciones en cartera	-31,85315158\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
Deposito de la ganancia por la venta de acciones para cobrar en $t = 0,5$	-48,05723933\$
Vender la cantidad de $\overline{\alpha_0 - \alpha_d} = 0,510687101$ acciones al precio $S_d = 94,1031$ que sobran para tener α_d acciones en cartera	48,05723933\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
Pagar deuda	$-55,1780827\$e^{0,1 \cdot 0,5} - 31,85315158\$e^{0,1 \cdot 0,25}$ $= -90,66664145\$$
vender la cantidad de 1 acciones al precio $S_{uu} = 127,0259$	127,0259\$
RESULTADO DEL CALL	-27,0259\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	9,33335855\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
Pagar deuda	-90,66664145\$
Vender la cantidad de 1 acciones al precio $S_{ud} = 104\$$	104\$
RESULTADO DEL CALL	-4\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	9,33335855\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0,25$

Hay que tener en cartera $\alpha_d = 0,212179079$ ACCIONES y una deuda de

$$17,62060909\$e^{0,1 \cdot 0,25} = 18,06667\$$$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
Pagar deuda	$-55,1780827\$e^{0,1 \cdot 0,5} = -58,0071235$
Cobrar deposito	$48,05723933\$e^{0,1 \cdot 0,25} = 49,27381414$
Vender la cantidad de 0,212179079 acciones al precio $S_{du} = 104\$$	22,06667\$
RESULTADO DEL CALL	-4\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	9,33335855\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
Pagar deuda	-58,0071235
Cobrar deposito	$48,05723933\$e^{0,1 \cdot 0,25} = 49,27381414$

RESULTADO DEL CALL	0\$
Vender la cantidad de 0,212179079 acciones al precio $S_{dd} = 85,1480\$$	18,0667
BENEFICIO EN $t = 0,5$	9,33335855\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 9,33335855\$

GANANCIA POR ARBITRAJE EN T

$$[c^M - c] \cdot e^{rT}$$

Tenemos que

$$20\$ - 11,1218\$ = 8,8782\$$$

$$8,8782\$e^{0,1 \cdot 0,5} = 9,333395048\$$$

SI LA PRIMA DE MERCADO $c^M < c$

Tenemos que

$$c^M = 5\$$$

Como el CALL está subvaluado, es decir, vale menos de lo que debería valer, tomamos una posición LONG en el mismo.

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN LONG EN UN CALL EUROPEO

CARTERA 2

POSICIÓN SHORT EN ACCIONES Y HAREMOS UN DEPOSITO

Es decir que tomamos una posición LONG en la cartera 1 y posición SHORT en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Hacer un deposito para cobrar en $t = 0,5$	-70,1780827\$
Vender en corto la cantidad de $\alpha_0 = 0,72286618$ acciones al precio $S_0 = 104\$$	75,1780827\$
Tomar una posición LONG en un CALL	-5\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP

PARA SIMULAR EL CALL DEBEMOS TENER EN CARTERA

Hay que tener en cartera $-\alpha_u = -1$ ACCIONES

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$ Se tiene en cartera $-\alpha_0 = -0,72286618$ ACCIONES

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
Hacer un deposito para cobrar en $t = 0,5$	-31,85315158\$
Vender en corto la cantidad de $\overline{\alpha_u} - \overline{\alpha_0} = 0,27713382$ acciones al precio $S_u = 114,9378$	31,85315158\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
Tomar un préstamo a pagar en $t = 0,5$	48,05723933\$
Comprar la cantidad de $\overline{\alpha_0} - \overline{\alpha_d} = 0,510687101$ acciones al precio $S_d = 94,1031$	-48,05723933\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$ **SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$** **SI OCURRE ESCENARIO UP-UP**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
Cobrar depósitos	$70,1780827\$e^{0,1 \cdot 0,5} + 31,85315158\$e^{0,1 \cdot 0,25} = 106,4357079\$$
Comprar la cantidad de 1 acciones al precio $S_{uu} = 127,0259$ para devolver las que se pidieron prestadas	-127,0259\$
RESULTADO DEL CALL	27,0259\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	6,435707892\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
Cobrar depósitos	$70,1780827\$e^{0,1 \cdot 0,5} + 31,85315158\$e^{0,1 \cdot 0,25} = 106,4357079\$$
Comprar la cantidad de 1 acciones al precio $S_{ud} = 104\$$ para devolver las que se pidieron prestadas	-104\$
RESULTADO DEL CALL	4\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	6,435707892\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
Pagar deuda	$-48,05723933\$e^{0,1 \cdot 0,25} = -49,27381414$
Cobrar deposito	$70,1780827\$e^{0,1 \cdot 0,5} = 73,77618994$
Comprar la cantidad de 0,212179079 acciones al precio $S_{du} = 104\$$	$-22,06667\$$
RESULTADO DEL CALL	$4\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	$6,4357058\$$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
Pagar deuda	$-48,05723933\$e^{0,1 \cdot 0,25} = -49,27381414$
Cobrar deposito	$70,1780827\$e^{0,1 \cdot 0,5} = 73,77618994$
RESULTADO DEL CALL	$0\$$
Comprar la cantidad de 0,212179079 acciones al precio $S_{dd} = 85,1480\$$	$-18,0667$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	$6,43567\$$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 6,435707892\$

GANANCIA POR ARBITAJE EN T

$$[c - c^M] \cdot e^{rT}$$

Tenemos que

$$11,1218\$ - 5\$ = 6,1218\$$$

$$6,1218\$e^{0,1 \cdot 0,5} = 6,435671398\$$$

SIMULACIÓN DE UNA OPCIÓN DE VENTA PUT

ACTIVO SUBYACENTE

Sean los siguientes datos

$$r = 10\% \text{ compuesta continua}$$

$$\sigma = 20\%$$

$$\Delta t = 0,25$$

$$S_0 = 104\$$$

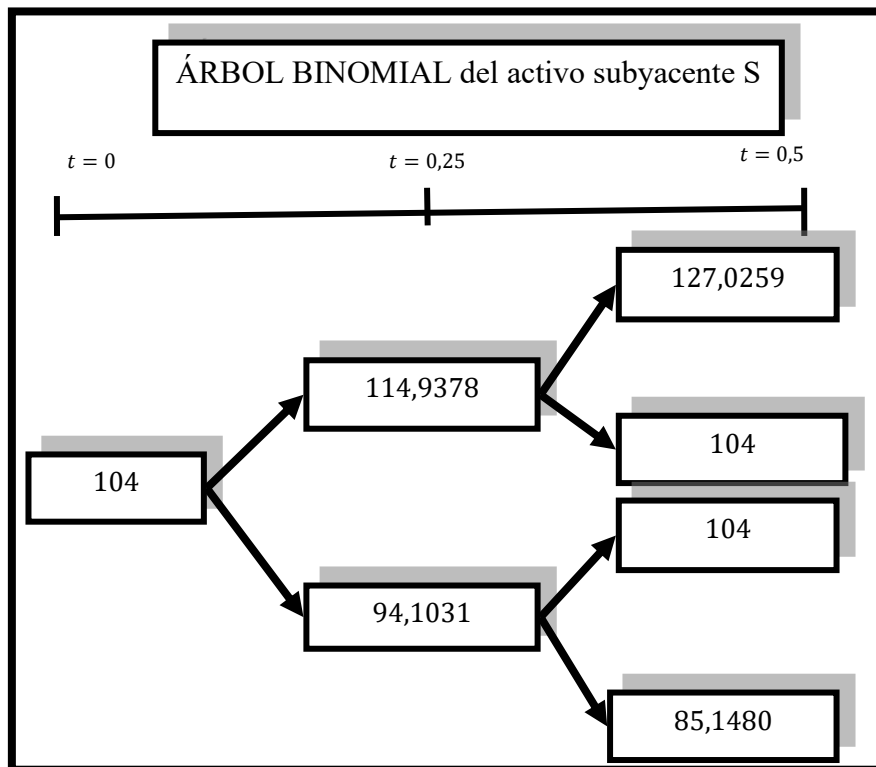
Tenemos que

$$u = e^{0,2 \cdot \sqrt{0,25}}$$

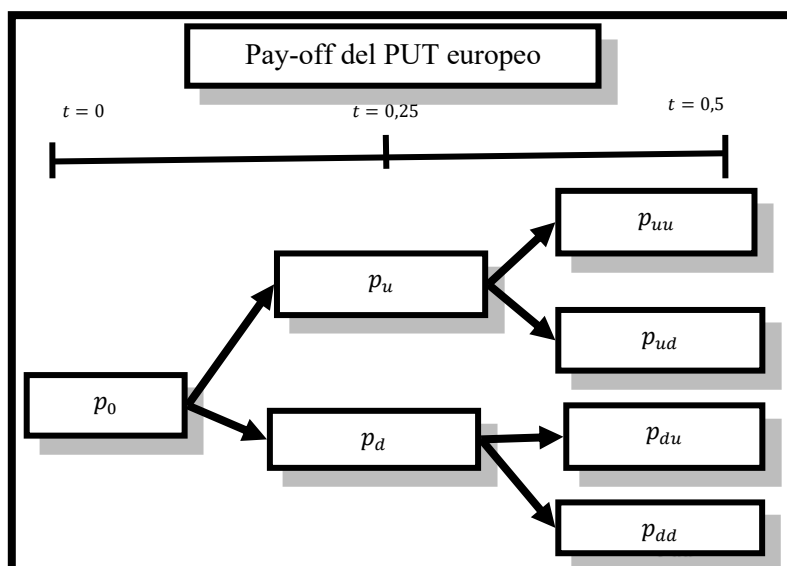
$$u = 1,10517$$

$$d = \frac{1}{e^{0,2 \cdot \sqrt{0,25}}} = \frac{1}{1,10517}$$

$$d = 0,90484$$



VALUACIÓN DE UN PUT EUROPEO EN POSICIÓN LONG



Tenemos el siguiente PUT europeo

$$K = 110$$

Vencimiento en $T = 0,5$

El activo subyacente es el que estuvimos analizando arriba

Las probabilidades riesgo neutro son las mismas que encontramos para el caso del CALL

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$\pi_{RN}^{uu} = 0,601386 \text{ y } [1 - \pi_{RN}^{uu}] = 0,398614$$

$$\pi_{RN}^{dd} = 0,398614 \text{ y } [1 - \pi_{RN}^{dd}] = 0,601386$$

$$\pi_{RN}^u = 0,601386 \text{ y } (1 - \pi_{RN}^u) = 0,398614$$

VALOR DEL CALL EN CADA NODO

Primero, obtenemos el pay-off del último nodo con el pay-off del CALL $\max(K - S_t; 0)$, de esta manera obtenemos p_{uu}, p_{ud}, p_{du} y p_{dd} y el resto de los nodos los obtenemos con la formula

$$E_{\pi^{RN}}(p_t) \cdot e^{-r \cdot T}$$

En el momento $t = 0,25$

Calculo de p_u

$$p_u = [\pi_{uu}^{RN} p_{uu} + (1 - \pi_{uu}^{RN}) p_{ud}] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

$$p_u = [0,601386 \cdot 0 + (0,398614) \cdot 6] \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25}$$

$$p_u = 2,332633112$$

Calculo de p_d

$$p_d = [\pi_{dd}^{RN} p_{dd} + (1 - \pi_{dd}^{RN}) p_{du}] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

$$p_d = [0,601386 \cdot 6 + (0,398614) \cdot 24,852] \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25}$$

$$p_d = 13,18099271$$

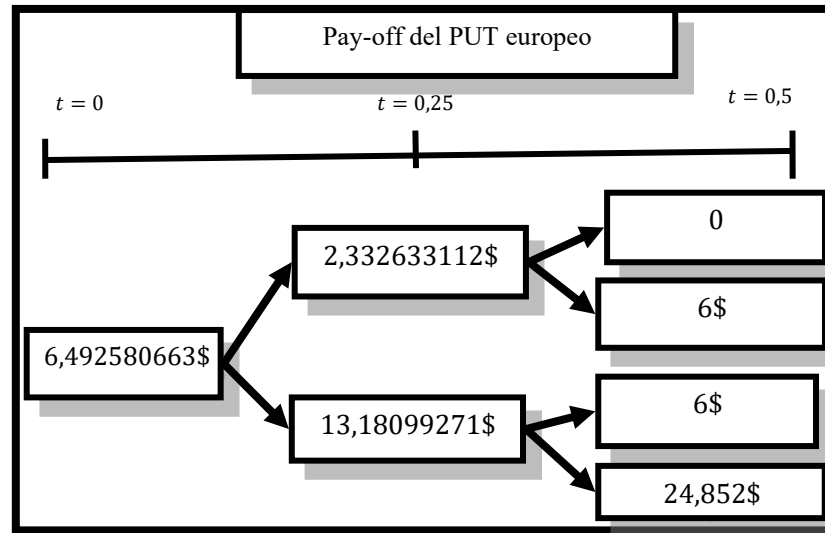
En el momento $t = 0$

Calculo p_0

$$p_0 = [\pi_u^{RN} p_u + \pi_d^{RN} p_d] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

$$p_0 = [(0,601386) \cdot 2,332633112 + (0,398614) \cdot 13,18099271] \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25}$$

$$p_0 = 6,492580663$$



CARTERA QUE SE UTILIZA PARA SIMULAR EL PUT

Está compuesta en el momento $t = 0$ por δ_0 acciones y el depósito D

En el momento $t = 0$

$$p_0 = \delta_0 S_0 + D_0$$

En el momento $t = 0,25$

$$p_u = \delta_u S_u + D_u e^{r \cdot 0,25}$$

$$p_d = \delta_d S_d + D_d e^{r \cdot 0,25}$$

Si ocurre el ESCENARIO UP $t = 0,25$

En el momento $t = 0,25$

$$p_u = \delta_u S_u + D_u$$

En el momento $t = 0,5$

$$p_{uu} = \delta_{uu} S_{uu} + D_{uu} e^{r \cdot 0,25}$$

$$p_{ud} = \delta_{ud} S_{ud} + D_{ud} e^{r \cdot 0,25}$$

Si ocurre el ESCENARIO DOWN $t = 0,25$

En el momento $t = 0,25$

$$p_d = \delta_d S_d + D_d$$

$$p_{du} = \delta_{du} S_{du} + D_{du} e^{r \cdot 0,25}$$

$$c_{dd} = \alpha_d S_{dd} + P_d e^{r \cdot 0,25}$$

Como vemos las incógnitas son δ_0, δ_u y δ_d y D_0, D_d y D_u

DETERMINACIÓN DEL ÁRBOL DE δ

En $t = 0$

Se venden en corto δ_0 acciones

$$p_0 = \delta_0 S_0 + D_0$$

En $t = 0,25$

ESCENARIO UP

$$p_u = \delta_0 S_u + D_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$$

ESCENARIO DOWN

$$p_d = \delta_0 S_d + D_0 \cdot e^{r \cdot \Delta t}$$

$$\delta_0 = \frac{(p_u - p_d)}{(S_u - S_d)} < 0$$

$$D_0 = \frac{S_u p_d - S_d p_u}{R \cdot (S_u - S_d)}$$

En $t = 0,5$

SI OCURRE UP EN $t = 0,25$

UP-UP

$$p_{uu} = D_u \cdot e^{r \Delta t} + \delta_u S_{uu}$$

UP-DOWN

$$p_{ud} = D_u \cdot e^{r \Delta t} + \delta_u S_{ud}$$

Donde

$$D_u = \frac{S_{uu} p_{ud} - S_{ud} p_{uu}}{R \cdot (S_{uu} - S_{ud})}$$

$$\delta_u = \frac{(p_{uu} - p_{ud})}{(S_{uu} - S_{ud})}$$

SI OCURRE DOWN EN $t = 0,25$

DOWN-UP

$$p_{ud} = D_d \cdot e^{r \Delta t} + \delta_d S_{ud}$$

DOWN-DOWN

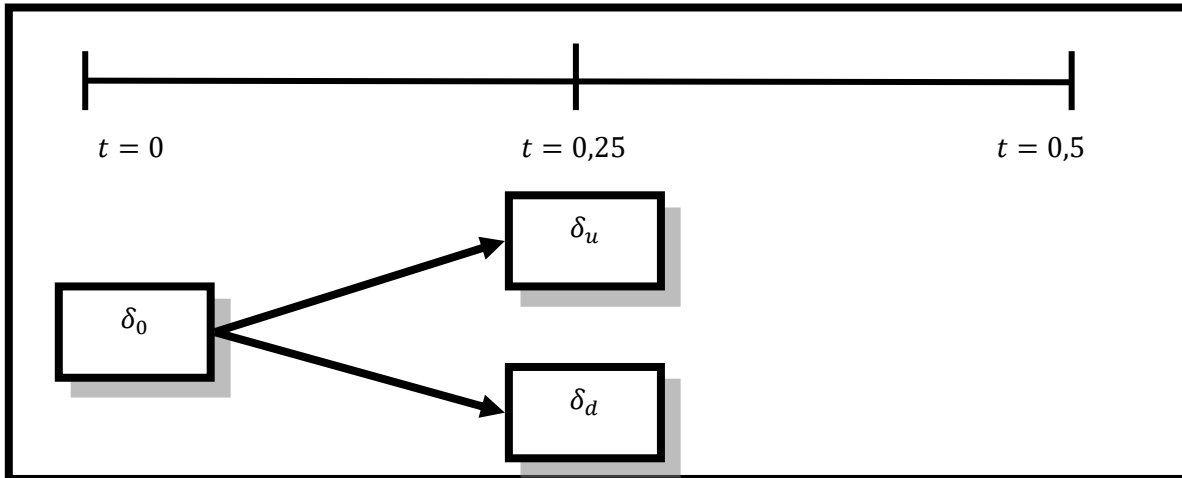
$$p_{dd} = D_d \cdot e^{r \Delta t} + \delta_d S_{dd}$$

Donde

$$D_d = \frac{S_{du}p_{dd} - S_{dd}p_{ud}}{R \cdot (S_{du} - S_{dd})}$$

$$\delta_d = \frac{(p_{du} - p_{dd})}{(S_{du} - S_{dd})}$$

ARBOL DE δ



CALCULO DE LOS δ

$$\delta_0 = \frac{2,3326 - 13,181}{114,9378 - 94,1031} = -0,520689042$$

$$\delta_u = \frac{0 - 6}{127,0259 - 104} = -0,260576133$$

$$\delta_d = \frac{6 - 24,852}{104 - 85,1480} = -1$$

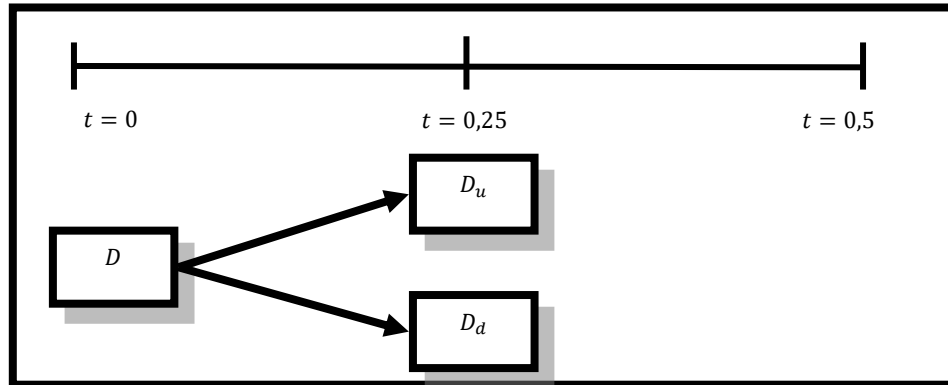
MERCADO DE CREDITO

$$D_0 = e^{-0,1 \cdot 0,25} \times \left[\frac{114,9378 \times 13,181 - 94,1031 \times 2,3326}{114,9378 - 94,1031} \right] = 60,6442369\$$$

$$D_u = e^{-0,1 \cdot 0,25} \times \left[\frac{127,0259 \times 6 - 104 \times 0}{127,0259 - 104} \right] = 32,28267803\$$$

$$D_d = e^{-0,1 \cdot 0,25} \times \left[\frac{104 \times 24,852 - 85,1480 \times 6}{104 - 85,1480} \right] = 107,2840903\$$$

ÁRBOL DEL MERCADO DE CREDITO



REBALANCEO DE LA CARTERA

En el momento $t = 0$ tomamos prestadas la cantidad de acciones

$$\delta_0$$

En el momento $t = 0,25$ tenemos dos escenarios posibles el cual es determinado por el valor que tomó el precio del activo subyacente

3. ESCENARIO UP o suba del precio del subyacente
4. ESCENARIO DOWN o baja del precio del subyacente

Si ocurre el escenario UP debemos tener prestadas en cartera la cantidad de acciones

$$\delta_u$$

Si ocurre el escenario DOWN debemos tener prestadas en cartera la cantidad de acciones

$$\delta_d$$

Pero en ambos casos llegamos con la cantidad de acciones prestadas δ_0 por lo cual dependiendo del escenario debemos comprar o vender acciones para simular el PUT

Si ocurre UP luego debemos rebalancear la cartera vendiendo o comprando

SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
TENEMOS EN CARTERA QUE TRAEMOS DEL PASADO	δ_0
DEBEMOS TENER EN CARTERA	δ_u
SE DEBEN VENDER O COMPRAR ACCIONES	$\delta_0 - \delta_u$

ESCENARIO	ACCIONES A TOMAR		MERCADO FINANCIERO
Si $\delta_0 - \delta_u > 0$	NECESIDAD DE PEDIR PRESTADA ACCIONES	VENDER EN CORTO ACCIONES	SE HACE UN DEPOSITO POR EL VALOR DE LA VENTA
Si $\delta_0 - \delta_u < 0$	NECESIDAD DE REDUCIR LA CANTIDAD DE ACCIONES PRESTADAS	COMPRAR ACCIONES	SE TOMA UN PRESTAMO POR EL VALOR DE LA COMPRA
Si $\delta_0 - \delta_u = 0$	CERO	NO SE HACE NADA	NO SE HACE NADA

Si ocurre DOWN luego debemos rebalancear la cartera vendiendo o comprando

SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
TENEMOS EN CARTERA QUE TRAEMOS DEL PASADO	δ_0
DEBEMOS TENER EN CARTERA	δ_d
SE DEBEN VENDER O COMPRAR ACCIONES	$\delta_0 - \delta_d$

ESCENARIO	ACCIONES A TOMAR		MERCADO FINANCIERO
Si $\delta_0 - \delta_d > 0$	NECESIDAD DE PEDIR PRESTADA ACCIONES	VENDER EN CORTO ACCIONES	SE HACE UN DEPOSITO POR EL VALOR DE LA VENTA
Si $\delta_0 - \delta_d < 0$	NECESIDAD DE REDUCIR LA CANTIDAD DE ACCIONES PRESTADAS	COMPRAR ACCIONES	SE TOMA UN PRESTAMO POR EL VALOR DE LA COMPRA
Si $\delta_0 - \delta_d = 0$	CERO	NO SE HACE NADA	NO SE HACE NADA

La cobertura tiene un costo por los préstamos tomados o un beneficio si tenemos en cuenta que se hacen depósitos, los cuales se cancelan entre si no hay oportunidades de obtener una ganancia por arbitraje.

EQUIVALENCIA PARA EL PUT

ACCIÓN	ES EQUIVALENTE A
TOMAR UNA POSICIÓN LONG O COMPRADA EN $\delta < 0$ ACCIONES	VENDER EN CORTO LA CANTIDAD DE $-\delta$ ACCIONES
TOMAR UNA POSICIÓN SHORT O VENDIDA EN $\delta < 0$ ACCIONES	COMPRAR LA CANTIDAD DE $-\delta$ ACCIONES

REBALANCEAR LA CARTERA EN UNA SITUACIÓN DONDE NO HAY OPORTUNIDADES DE OBTENER GANANCIAS POR ARBITRAJE

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN SHORT EN UN PUT EUROPEO

CARTERA 2

POSICIÓN LONG EN δ_0 ACCIONES Y HACEMOS UN DEPOSITO

Es decir, que tomamos una posición SHORT en la cartera 1 y posición LONG en la cartera 2. Veremos que nuestro pay-off en cada momento serán todos nulos

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Hacer un DEPOSITO a cobrar en $t = 0,5$	-60,6442369\$
COMPRAR la cantidad de $\delta_0 = -0,520689042$ acciones o VENDER EN CORTO la cantidad $-\delta_0 = 0,520689042$ acciones al precio $S_0 = 104$ \$	$(-1) \times [-0,520689042 \times 104] = 54,15166037$ \$
Tomar una posición SHORT en un PUT	6,492580663\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO UP****PARA SIMULAR EL PUT DEBEMOS TENER EN CARTERA**

$\delta_u = -0,260576133$ ACCIONES y un Deposito de $D_u = 32,28267803$ \$

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

$\delta_0 = -0,520689042$ ACCIONES y un Deposito de $D_0 = 60,6442369$ \$

Debemos comprar acciones y de esta manera disminuir la cantidad que debemos devolver.

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
Tomar un préstamo para financiar la compra de acciones a pagar en $t = 0,5$	29,89680551\$
Comprar la cantidad de $\delta_u - \delta_0 = 0,260112909$ acciones al precio $S_u = 114,9378$ que hacen falta para tener δ_u acciones en cartera	-29,89680551\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SALDO DE PRESTAMOS Y DEPOSITOS EN EL ESCENARIO UP A VALORES DE $t = 0,25$	
DEPOSITO HECHO EN EL MOMENTO $t = 0$	62,17945307\$
DEUDA TOMADA EN EL MOMENTO $t = 0,25$	-29,89680551\$
TOTAL D_u	32,28267803\$

VALOR DE LA CARTERA 1

$$-p_u = -2,332633112\$$$

VALOR DE LA CARTERA 2

$$2,332633112\$ = -0,260576133 \times 114,9378 + 32,28267803\$$$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN**PARA SIMULAR EL PUT DEBEMOS TENER EN CARTERA**

$$\delta_d = -1 \text{ ACCIONES y un Deposito de } D_d = 107,2840903\$$$

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

$$\delta_0 = -0,520689042 \text{ ACCIONES y un Deposito de } D_0 = 60,6442369\$$$

Debemos vender en corto acciones y de esta manera aumentar la cantidad que debemos devolver.

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
Deposito de la ganancia por la venta de acciones para cobrar en $t = 0,5$	-45,10464701\$
Vender en corto la cantidad de $\delta_0 - \delta_d$ 0,479310958 acciones al precio $S_d = 94,1031$	45,10464701\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SALDO DEL PRESTAMOS Y DEPOSITOS EN EL ESCENARIO DOWN A VALORES DE $t = 0,25$	
DEPOSITO HECHO EN EL MOMENTO $t = 0$	62,17945307\$
DEPOSITO HECHO EN EL MOMENTO $t = 0,25$	45,10464701\$
TOTAL D_d	107,2840903\$

VALOR DE LA CARTERA 1

$$-p_d = -13,18099271\$$$

VALOR DE LA CARTERA 2

$$13,18099271\$ = (-1) \times 94,1031\$ + 107,2840903\$$$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
Pagar deuda	$-29,89680551\$e^{0,1 \cdot 0,25} = -30,65364674\$$
Cobrar deposito	$60,6442369\$e^{0,1 \cdot 0,5} = 63,75353341$
Comprar la cantidad de $-\delta_u = 0,260576133$ acciones al precio $S_{uu} = 127,0259$ para ser devueltas	-33,09991781\$
RESULTADO DEL PUT	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
Pagar deuda	$-29,89680551\$e^{0,1 \cdot 0,25} = -30,65364674\$$
Cobrar deposito	$60,6442369\$e^{0,1 \cdot 0,5} = 63,75353341$
Comprar la cantidad de $-\delta_u = 0,260576133$ acciones al precio $S_{ud} = 104\$$ para ser devueltas	$-27,09991783\$$
RESULTADO DEL PUT	$-6\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	$0\$$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
Cobrar depósitos	$63,75353341\$ + 45,10464701\$e^{0,1 \cdot 0,25} = 110\$$
Comprar la cantidad de $-\delta_d = 1$ acciones al precio $S_{du} = 104\$$	$-104\$$
RESULTADO DEL PUT	$-6\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	$0\$$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
Cobrar depósitos	$63,75353341\$ + 45,10464701\$e^{0,1 \cdot 0,25} = 110\$$
Comprar la cantidad de $-\delta_d = 1$ acciones al precio $S_{dd} = 85,1480\$$	$-85,1480\$$
RESULTADO DEL PUT	$-24,852\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	$0\$$

ESTRATEGIAS DE ARBITRAJE DE UNA OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT

SI LA PRIMA DE MERCADO $p^M > p$

Tenemos que

$$p^M = 10\$$$

Como el PUT está sobrevaluado, es decir, vale más de lo que debería valer, tomamos una posición SHORT en el mismo

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN SHORT EN UN PUT EUROPEO

CARTERA 2

POSICIÓN LONG EN δ_0 ACCIONES Y HACEMOS UN DEPOSITO

Es decir, que tomamos una posición SHORT en la cartera 1 y posición LONG en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Hacer un DEPOSITO a cobrar en $t = 0,5$	-64,15166037\$
VENDER EN CORTO la cantidad $-\delta_0 = 0,520689042$ acciones al precio $S_0 = 104$ \$	54,15166037\$
Tomar una posición SHORT en un PUT	10\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
Tomar un préstamo para financiar la compra de acciones a pagar en $t = 0,5$	29,89680551\$
Comprar la cantidad de $\delta_u - \delta_0 = 0,260112909$ acciones al precio $S_u = 114,9378$ que hacen falta para tener δ_u acciones en cartera	-29,89680551\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
Deposito de la ganancia por la venta de acciones para cobrar en $t = 0,5$	-45,10464701\$
Vender en corto la cantidad de $\delta_0 - \delta_d = 0,479310958$ acciones al precio $S_d = 94,1031$	45,10464701\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
Pagar deuda	$-29,89680551\$e^{0,1 \cdot 0,25} = -30,65364674\$$
Cobrar deposito	$64,15166037\$e^{0,1 \cdot 0,5} = 67,44078633$
Comprar la cantidad de $-\delta_u = 0,260576133$ acciones al precio $S_{uu} = 127,0259$ para ser devueltas	$-33,09991781\$$
RESULTADO DEL PUT	$0\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	$3,687221781\$$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
Pagar deuda	$-29,89680551\$e^{0,1 \cdot 0,25} = -30,65364674\$$
Cobrar deposito	$67,44078633\$$
Comprar la cantidad de $-\delta_u = 0,260576133$ acciones al precio $S_{ud} = 104\$$ para ser devueltas	$-27,09991783\$$
RESULTADO DEL PUT	$-6\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	$3,68722176\$$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
Cobrar depósitos	$67,44078633\$ + 45,10464701\$e^{0,1 \cdot 0,25} = 113,6872629\$$
Comprar la cantidad de $-\delta_d = 1$ acciones al precio $S_{du} = 104\$$	$-104\$$
RESULTADO DEL PUT	$-6\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	$3,687262915\$$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
Cobrar depósitos	113,6872629\$
Comprar la cantidad de $-\delta_d = 1$ acciones al precio $S_{dd} = 85,1480$ \$	-85,1480\$
RESULTADO DEL PUT	-24,852\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	3,6872629\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 3,687262915\$

GANANCIA POR ARBITAJE EN T

$$[p^M - p] \cdot e^{rT}$$

Tenemos que

$$10\$ - 6,492580663\$ = 3,507419337\$$$

$$3,507419337\$ e^{0,1 \cdot 0,5} = 3,687248572\$$$

SI LA PRIMA DE MERCADO $p^M < p$

Tenemos que

$$p^M = 3\$$$

Como el PUT está subvaluado, es decir, vale menos de lo que debería valer, tomamos una posición LONG en el mismo.

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN LONG EN UN PUT EUROPEO

CARTERA 2

POSICIÓN SHORT EN δ_0 ACCIONES Y HACEMOS UN PRESTAMO

Es decir, que tomamos una posición LONG en la cartera 1 y posición SHORT en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Hacer un PRESTAMO a cobrar en $t = 0,5$	57,15166037\$
COMPRAR la cantidad $-\delta_0 = 0,520689042$ acciones al precio $S_0 = 104$ \$	-54,15166037\$
Tomar una posición LONG en un PUT	-3\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO UP**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
Hacer un deposito a cobrar en $t = 0,5$	-29,89680551\$
Vender la cantidad de $\delta_u - \delta_0$ 0,260112909 acciones al precio $S_u = 114,9378$ que hacen falta para tener $-\delta_u$ acciones en cartera	29,89680551\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
Tomar un préstamo a pagar en $t = 0,5$	45,10464701\$
Comprar la cantidad de $\delta_0 - \delta_d$ 0,479310958 acciones al precio $S_d = 94,1031$	-45,10464701\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$ **SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$** **SI OCURRE ESCENARIO UP-UP**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
Cobrar deposito	$29,89680551\$e^{0,1 \cdot 0,25} = 30,65364674\$$
Pagar préstamo	$-57,15166037\$e^{0,1 \cdot 0,5} = -60,08188866$
Vender la cantidad de $-\delta_u = 0,260576133$ acciones al precio $S_{uu} = 127,0259$ para liquidar la cartera	33,09991781\$
RESULTADO DEL PUT	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	3,671675894\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
Cobrar deposito	$29,89680551\$e^{0,1 \cdot 0,25} = 30,65364674\$$
Pagar préstamo	$-57,15166037\$e^{0,1 \cdot 0,5} = -60,08188866$
Vender la cantidad de $-\delta_u = 0,260576133$ acciones al precio $S_{ud} = 104\$$	27,09991783\$
RESULTADO DEL PUT	6\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	3,67167591\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
Pagar préstamo	$-60,08188866\$ - 45,10464701\$e^{0,1 \cdot 0,25}$ $= -106,3283653\$$
Vender la cantidad de $-\delta_d = 1$ acciones al precio $S_{du} = 104\$$	104\$
RESULTADO DEL PUT	6\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	3,671634755\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
Pagar préstamo	-106,3283653\$
Vender la cantidad de $-\delta_d = 1$ acciones al precio $S_{dd} = 85,1480\$$	85,1480\$
RESULTADO DEL PUT	24,852\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	3,6716347\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 3,671634755\$

GANANCIA POR ARBITRAJE EN T

$$[p - p^M] \cdot e^{rT}$$

Tenemos que

$$6,492580663\$ - 3\$ = 3,492580663\$$$

$$3,492580663\$e^{0,1 \cdot 0,5} = 3,671649103\$$$

DIVISIBILIDAD DEL MERCADO DE CRÉDITO

Esto implica que se puede tomar una posición LONG o SHORT en una parte fraccionaria de un bono, es decir, que se puede comprar $\frac{1}{2}$ de bono, $\frac{3}{4}$ de bono o incluso vender $2\frac{1}{2}$ bonos. Todos los bonos del mercado se pueden transformar en operaciones con BONOS CERO CUPÓN, por ello trataremos con ellos solamente

DIVISIBILIDAD DEL MERCADO DE FINANCIERO

Esto implica que se puede tomar una posición LONG o SHORT en una parte fraccionaria de un activo financiero, es decir, que se puede comprar $\frac{1}{2}$ de acción, $\frac{3}{4}$ de acción o incluso vender $2\frac{1}{2}$ de acciones

BONO CERO CUPON B LIBRE DE RIESGO

Sea el siguiente Bono Cero Cupón

Fecha de vencimiento: 6 meses

Valor nominal: 100

Como estamos trabajando en tiempo continuo y debemos obtener los diferentes precios. Luego

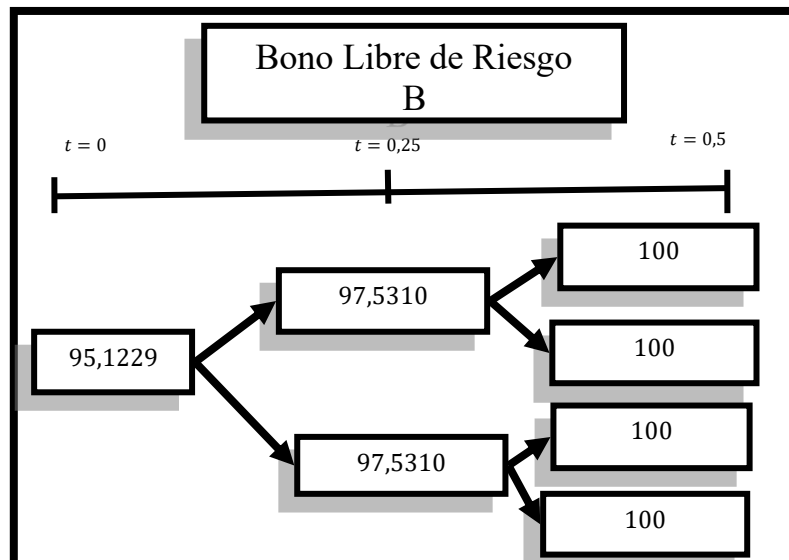
El valor del bono cero cupón en $t = 0,25$ es igual a

$$P(0; 0,25) = 100 \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25} = 97,5310$$

El valor del bono cero cupón en $t = 0$ es igual a

$$P(0; 0) = 100 \cdot e^{-0,1 \cdot 0,5} = 95,1229$$

t	$P(0; t)$
0	95,1229\$
0,25	97,5310\$
0,5	100\$



Cuando realizamos las simulaciones trabajamos directamente con los montos de los préstamos, desde ahora trabajaremos con fracciones este bono. Esto implica que deseamos tomar un préstamo en el momento $t = 0$ de 1590\$ a seis meses debemos emitir 16,71521789 del BONO CERO CUPÓN B

$$1590\$ = \beta \times P(0; 0)$$

$$\beta = \frac{1590\$}{95,1229\$} = 16,71521789$$

DIFERENCIA ENTRE SIMULACIÓN(Replica) Y COBERTURA CON OPCIONES

SIMULACIÓN DE UNA CARTERA

EN EL MOMENTO $t = 0$

$$c_0 = \alpha_0 S_0 + \beta_0 P_0$$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

Cartera		Pay-off del CALL
$S_u = 114,9378$	$P_u = 97,5310$	$c_u = 17,4068$
$S_d = 94,1031$	$P_d = 97,5310$	$c_d = 2,3461$

Escenario UP

$$c_u = \alpha_0 S_u + \beta_0 P_u$$

Escenario DOWN

$$c_d = \alpha_0 S_d + \beta_0 P_d$$

Para encontrar los valores debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} S_u & P_u \\ S_d & P_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_u \\ c_d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 114,9378 & 97,5310 \\ 94,1031 & 97,5310 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,4068 \\ 2,3461 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por CRAMER

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} S_u & P_u \\ S_d & P_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 114,9378 & 97,5310 \\ 94,1031 & 97,5310 \end{vmatrix}$$

$$= (114,9378 \cdot 97,5310) - (94,1031 \cdot 97,5310) = 2032,0291$$

El cual es distinto de cero por lo cual

$$\beta_0 = \frac{\begin{vmatrix} S_u & c_u \\ S_d & c_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & P_u \\ S_d & P_d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 114,9378 & 17,4068 \\ 94,1031 & 2,3461 \end{vmatrix}}{2032,0291} = \frac{-1368,3783}{2032,0291} = -0,6734$$

$$\alpha_0 = \frac{\begin{vmatrix} c_u & P_u \\ c_d & P_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & P_u \\ S_d & P_d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 17,4068 & 97,5310 \\ 2,3461 & 97,5310 \end{vmatrix}}{2032,0291} = \frac{1468,8851}{2032,0291} = 0,7229$$

Estrategia			
	Cartera		Pay-off del CALL
Subyacente	α_0	P	β_0
$S_u = 114,9378$	0,7229	$P_u = 97,5310$	-0,6734
$S_d = 94,1031$		$P_d = 97,5310$	
			$c_u = 17,4068$
			$c_d = 2,3461$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

Escenario UP

$$c_{uu} = \alpha_u S_{uu} + \beta_u p_{uu}$$

$$c_{ud} = \alpha_u S_{ud} + \beta_u p_{ud}$$

Estrategia		
Cartera		Pay-off del CALL
$S_{uu} = 127,0259$	$P_{uu} = 100$	$c_{uu} = 27,0259$
$S_{ud} = 104$	$P_{ud} = 100$	$c_{ud} = 4$
Estrategia		
Cartera		Pay-off del CALL
$S_{du} = 104$	$P_{du} = 100$	$c_{du} = 4$
$S_{dd} = 85,1480$	$P_{dd} = 100$	$c_{dd} = 0$

Para encontrar los valores debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} S_{uu} & p_{uu} \\ S_{ud} & p_{ud} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{uu} \\ c_{ud} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 127,0259 & 100 \\ 104 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27,0259 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por CRAMER

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} S_{uu} & p_{uu} \\ S_{ud} & p_{ud} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 127,0259 & 100 \\ 104 & 100 \end{vmatrix}$$

$$= (127,0259 \cdot 100) - (104 \cdot 100) = 2302,59$$

El cual es distinto de cero por lo cual

$$\beta_u = \frac{\begin{vmatrix} S_{uu} & c_{uu} \\ S_{ud} & c_{ud} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{uu} & p_{uu} \\ S_{ud} & p_{ud} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 127,0259 & 27,0259 \\ 104 & 4 \end{vmatrix}}{2302,59} = \frac{-2302,59}{2302,59} = -1$$

$$\alpha_u = \frac{\begin{vmatrix} c_{uu} & p_{uu} \\ c_{ud} & p_{ud} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{uu} & p_{uu} \\ S_{ud} & p_{ud} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 27,0259 & 100 \\ 4 & 100 \end{vmatrix}}{2302,59} = \frac{2302,59}{2302,59} = 1$$

Escenario DOWN

$$c_{du} = \alpha_d S_{du} + \beta_d p_{du}$$

$$c_{dd} = \alpha_d S_{dd} + \beta_d p_{dd}$$

Para encontrar los valores debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} S_{du} & p_{du} \\ S_{dd} & p_{dd} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{du} \\ c_{dd} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 104 & 100 \\ 85,1480 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se resuelve por CRAMER

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} S_{du} & p_{du} \\ S_{dd} & p_{dd} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 104 & 100 \\ 85,1480 & 100 \end{vmatrix}$$

$$= (104 \cdot 100) - (85,1480 \cdot 100) = 1885,2$$

El cual es distinto de cero por lo cual

$$\beta_d = \frac{\begin{vmatrix} S_{du} & c_{du} \\ S_{dd} & c_{dd} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{du} & p_{du} \\ S_{dd} & p_{dd} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 104 & 4 \\ 85,1480 & 0 \end{vmatrix}}{1885,2} = \frac{-340,592}{1885,2} = -0,1807$$

$$\alpha_d = \frac{\begin{vmatrix} c_{du} & p_{du} \\ c_{dd} & p_{dd} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{du} & p_{du} \\ S_{dd} & p_{dd} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 100 \\ 0 & 100 \end{vmatrix}}{1885,2} = \frac{400}{1885,2} = 0,2122$$

Estrategia				
Cartera				Pay-off del CALL
Subyacente	α_u	P	β_u	Call
$S_{uu} = 127,0259$	1	$P_{uu} = 100$	-1	$c_{uu} = 27,0259$
$S_{ud} = 104$		$P_{ud} = 100$		$c_{ud} = 4$
Cartera				Pay-off del CALL
Subyacente	α_d	P	β_d	Call
$S_{du} = 104$	0,2122	$P_{du} = 100$	-0,1807	$c_{du} = 4$
$S_{dd} = 85,1480$		$P_{dd} = 100$		$c_{dd} = 0$

RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN*EN $t = 0$*

CARTERA SIMULADORA		SIMULADO: Cartera con el CALL comprado
Se toma préstamo emitiendo $-\beta_0 = 0,6734$ bono cero cupón $P_0 = 95,1229\$$ por 6 meses	TOTAL PASIVO $-64,05576086\$$	TOTAL ACTIVO COMPRA CALL $11,1218\$$
Compra $\alpha_0 = 0,7229$ acciones a un precio de $S_0 = 104\$$	TOTAL ACTIVO $75,1816\$$	
PATRIMONIO NETO $11,1218\$$		PATRIMONIO NETO $11,1218\$$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

ESCENARIO UP		
CARTERA SIMULADORA		SIMULADO: Cartera con el CALL comprado
Se tiene en cartera como deuda la cantidad de $-\beta_u = 1$ bono cero cupón $P_u = 97,5310\$$ por 3 meses	TOTAL PASIVO $-97,5310\$$	TOTAL ACTIVO Valor del CALL $17,4068\$$
Se tiene en cartera la cantidad $\alpha_u = 1$ acciones a un precio de $S_u = 114,9378\$$	TOTAL ACTIVO $114,9378\$$	
PATRIMONIO NETO $17,4068$		PATRIMONIO NETO $17,4068\$$

ESCENARIO DOWN		
CARTERA SIMULADORA		SIMULADO: Cartera con el CALL comprado
Se tiene en cartera como deuda la cantidad de $-\beta_d = 0,1807$ De un bono cero cupón $P_d = 97,5310\$$ por 3 meses	TOTAL PASIVO $-17,6238517\$$	TOTAL ACTIVO VALOR DEL CALL $2,3461\$$
Se tiene en cartera la cantidad $\alpha_d = 0,2122$	TOTAL ACTIVO $19,96867782\$$	

acciones a un precio de $S_d = 94,1031\\$		
PATRIMONIO NETO 2,3461\$		PATRIMONIO NETO 2,3461\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

ESCENARIO UP-UP		
CARTERA SIMULADORA		SIMULADO: Cartera con el CALL comprado
DEUDA EN CARTERA	PASIVO -100\$	TOTAL DEL ACTIVO VALOR DEL CALL 27,0259
Se tiene en cartera la cantidad $\alpha_u = 1$ acciones a un precio de $S_{uu} = 127,0259\\$	ACTIVO 127,0259\$	
PATRIMONIO NETO 27,0259		PATRIMONIO NETO 27,0259

ESCENARIO UP-DOWN		
CARTERA SIMULADORA		SIMULADO: Cartera con el CALL comprado
Deuda en cartera	PASIVO -100\$	TOTAL ACTIVO VALOR DEL CALL 4\$
Se tiene en cartera la cantidad $\alpha_u = 1$ acciones a un precio de $S_{ud} = 104\\$	ACTIVO 104\$	
PATRIMONIO NETO 4\$		PATRIMONIO NETO 4\$

ESCENARIO DOWN-UP		
CARTERA SIMULADORA		SIMULADO: Cartera con el CALL comprado
Deuda en cartera	PASIVO $-17,6238517\$e^{0,1 \cdot 0,25}$ = -18,07	TOTAL ACTIVO VALOR DEL CALL 4\$
Se tiene en cartera la cantidad $\alpha_d = 0,2122$ acciones a un precio de $S_{ud} = 104\\$	ACTIVO 22,0688\$	
PATRIMONIO NETO 4\$		PATRIMONIO NETO 4\$

ESCENARIO DOWN-DOWN		
CARTERA SIMULADORA		SIMULADO: Cartera con el CALL comprado
Deuda en cartera	PASIVO -18,07\$	TOTAL ACTIVO

Se tiene en cartera la cantidad $\alpha_d = 0,2122$ acciones a un precio de $S_{dd} = 85,1480\\$	ACTIVO 18,07\$	VALOR DEL CALL 0\$
PATRIMONIO NETO 0\$		PATRIMONIO NETO 0\$

COBERTURA DE UNA CARTERA

El objetivo es, en contraste con simulación, buscar una cartera que se mueva de manera inversa y compense las pérdidas y las ganancias.

Tomamos la cartera que utilizamos para simular el CALL en posición LONG, pero, en este caso tomaremos una posición SHORT en el CALL.

EN EL MOMENTO $t = 0$

CARTERA		Cartera con el CALL vendido
Se toma préstamo emitiendo $-\beta_0 = 0,6734$ bono cero cupón $P_0 = 95,1229\\$ por 6 meses	TOTAL PASIVO -64,05576086\$	TOTAL ACTIVO COMPRA CALL -11,1218\$
Compra $\alpha_0 = 0,7229$ acciones a un precio de $S_0 = 104\\$	TOTAL ACTIVO 75,1816\$	
PATRIMONIO NETO 11,1218\$		PATRIMONIO NETO -11,1218\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

ESCENARIO UP		
CARTERA		Cartera con el CALL vendido
Se tiene en cartera como deuda la cantidad de $-\beta_u = 1$ bono cero cupón $P_u = 97,5310\$$ por 3 meses	TOTAL PASIVO $-97,5310\$$	TOTAL ACTIVO Valor del CALL $-17,4068\$$
Se tiene en cartera la cantidad $\alpha_u = 1$ acciones a un precio de $S_u = 114,9378\$$	TOTAL ACTIVO $114,9378\$$	
PATRIMONIO NETO $17,4068$		PATRIMONIO NETO $-17,4068\$$

ESCENARIO DOWN		
CARTERA		Cartera con el CALL vendido
Se tiene en cartera como deuda la cantidad de $-\beta_d = 0,1807$ De un bono cero cupón $P_d = 97,5310\$$ por 3 meses	TOTAL PASIVO $-17,6238517\$$	TOTAL ACTIVO VALOR DEL CALL $-2,3461\$$
Se tiene en cartera la cantidad $\alpha_d = 0,2122$ acciones a un precio de $S_d = 94,1031\$$	TOTAL ACTIVO $19,96867782\$$	
PATRIMONIO NETO $2,3461\$$		PATRIMONIO NETO $-2,3461\$$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

ESCENARIO UP-UP		
CARTERA		Cartera con el CALL vendido
DEUDA EN CARTERA	PASIVO $-100\$$	TOTAL DEL ACTIVO VALOR DEL CALL $-27,0259$
Se tiene en cartera la cantidad $\alpha_u = 1$ acciones a un precio de $S_{uu} = 127,0259\$$	ACTIVO $127,0259\$$	
PATRIMONIO NETO $27,0259$		PATRIMONIO NETO $-27,0259$

ESCENARIO UP-DOWN		
CARTERA		Cartera con el CALL vendido
Deuda en cartera	PASIVO $-100\$$	TOTAL ACTIVO VALOR DEL CALL $-4\$$
Se tiene en cartera la cantidad $\alpha_u = 1$ acciones a un precio de $S_{ud} = 104\$$	ACTIVO $104\$$	
PATRIMONIO NETO $4\$$		PATRIMONIO NETO $-4\$$

ESCENARIO DOWN-UP		
CARTERA		Cartera con el CALL vendido
Deuda en cartera	PASIVO $-17,6238517\$e^{0,1 \cdot 0,25}$ $= -18,07$	TOTAL ACTIVO VALOR DEL CALL $-4\$$
Se tiene en cartera la cantidad $\alpha_d = 0,2122$ acciones a un precio de $S_{ud} = 104\$$	ACTIVO $22,0688\$$	
PATRIMONIO NETO 4\$		PATRIMONIO NETO -4\$

ESCENARIO DOWN-DOWN		
CARTERA		Cartera con el CALL vendido
Deuda en cartera	PASIVO $-18,07\$$	TOTAL ACTIVO VALOR DEL CALL $0\$$
Se tiene en cartera la cantidad $\alpha_d = 0,2122$ acciones a un precio de $S_{dd} = 85,1480\$$	ACTIVO $18,07\$$	
PATRIMONIO NETO 0\$		PATRIMONIO NETO 0\$

VALUACIÓN DE OPCIONES SOBRE OTROS ACTIVOS POR EL MÉTODO DE ÁRBOLES BINOMIALES

TIPOS DE OPCIONES

Hay más tipo de opciones, algunas de las más importantes son las siguientes

1. OPCIONES SOBRE ACCIONES QUE PAGAN UN RENDIMIENTO DE DIVIDENDOS CONTINUO
2. OPCIONES SOBRE ÍNDICES BURSÁTILES
3. OPCIONES SOBRE DIVISAS
4. OPCIONES SOBRE FUTUROS

Podemos construir y usar ÁRBOLES BINOMIALES para este tipo de opciones exactamente en la misma forma que lo hicimos para las opciones sobre acciones que no pagan dividendos, excepto que las ecuaciones para obtener las PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO cambian.

ECUACIONES PARA OBTENER LAS PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO SEGÚN EL TIPO DE OPCIÓN

OPCIONES SOBRE ACCIONES QUE PAGAN UN RENDIMIENTO DE DIVIDENDOS CONTINUO

En primer lugar, considere una acción que paga un rendimiento de dividendo conocido, a la tasa q

RENDIMIENTO TOTAL EN UN MUNDO NEUTRAL AL RIESGO

Hay que realizar una distinción entre:

1. Ganancia de capital
2. Un rendimiento continuo que proporciona un activo en particular.

En el caso del primero se hace referencia a las ganancias de capital que ocurren como consecuencia de los movimientos en los valores de los activos, estos movimiento son desconocidos a priori y por lo tanto inciertos. Como ejemplo pensemos en una casa que fue construida en una zona en donde no había subtes, pasado un tiempo se construye una estación de subte delante de la casa, lo cual genera que la misma aumente de valor. Otro ejemplo son las acciones que como consecuencias de las expectativas sobre la evolución futura de la economía del país y la especulación financiera sus precios resultan impactados.

En el caso del segundo un rendimiento continuo pensemos en los rendimientos que proporciona un activo de manera continua, como pueden ser las acciones que otorgan dividendos continuos.

La suma de ambos da como resultado el RENDIMIENTO TOTAL, el cual en un mundo NEUTRAL AL RIESGO es igual a r . Por lo tanto, las ganancias de capital deben proporcionar un rendimiento $r - q$

PAGO ESPERADO DE LA ACCIÓN QUE PAGA UN RENDIMIENTO DE DIVIDENDOS CONTINUO

El interés del modelo recae en las ganancias de capital únicamente porque estamos modelizando los movimientos en el valor del activo subyacente. Por lo tanto si la acción se inicia en S_0 , su valor esperado después de un intervalo de tiempo Δt debe ser igual a $S_0 \cdot e^{(r-q) \times \Delta t}$. Por lo tanto

$$E_{RIESGO NEUTRO}[S_t] = S_0 \cdot e^{(r-q) \times \Delta t}$$

$$S_u \cdot p + S_d \cdot (1 - p) = S_0 \times e^{(r-q) \times \Delta t}$$

Donde si sube la cotización

$$S_{UP} = S_0 \cdot u$$

Si baja la cotización

$$S_{DOWN} = S_0 \cdot d$$

$$S_0 \cdot u \cdot p + S_0 \cdot d \cdot (1 - p) = S_0 \cdot e^{(r-q) \times \Delta t}$$

$$u \cdot p + d \cdot (1 - p) = e^{(r-q) \times \Delta t}$$

$$u \cdot p + d - d \cdot p = e^{(r-q) \times \Delta t}$$

$$p(u - d) + d = e^{(r-q) \times \Delta t}$$

$$p = \frac{e^{(r-q) \times \Delta t} - d}{u - d}$$

OPCIONES SOBRE ÍNDICES BURSÁTILES

En primer lugar, considere un ÍNDICE BURSÁTIL, donde las acciones subyacentes al índice proporcionan un rendimiento de dividendo conocido, a la tasa q . Por lo tanto la valuación de una opción sobre un índice bursátil es muy similar a la valuación de una acción que paga un rendimiento de dividendos conocido.

$$p = \frac{e^{(r-q) \times \Delta t} - d}{u - d}$$

OPCIONES SOBRE DIVISAS

Una divisa se considera un activo que proporciona un rendimiento a la tasa de interés extranjera libre de riesgo r_f . Por analogía con el caso del índice bursátil, podemos construir un árbol para opciones sobre una divisa donde las PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO son iguales a

$$p = \frac{e^{(r-r_f) \times \Delta t} - d}{u - d}$$

OPCIONES SOBRE FUTUROS

PAGO ESPERADO DEL FUTURO

El rendimiento esperado en un mundo neutral cuando, como en este caso, no se colocó capital al inicio, porque, como sabemos no hay que pagar para hacer un CONTRATO A FUTURO, es igual a cero

Por lo tanto

$$F_u \cdot p + F_d \cdot (1 - p) = F_0$$

Donde si sube la cotización

$$F_{UP} = F_0 \cdot u$$

Si baja la cotización

$$F_{DOWN} = F_0 \cdot d$$

$$F_0 \cdot u \cdot p + F_0 \cdot d \cdot (1 - p) = F_0$$

$$u \cdot p + d \cdot (1 - p) = 1$$

$$u \cdot p + d - d \cdot p = 1$$

$$p(u - d) + d = 1$$

$$p = \frac{1 - d}{u - d}$$

EJEMPLOS

VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE VENTA SOBRE UN ÍNDICE BURSÁTIL ENUNCIADO

Una opción de venta europea a dos meses sobre un índice bursátil tiene un precio de ejercicio de 480\$. El nivel actual del índice es de 484\$, la tasa de interés libre de riesgo es de 10% anual, el rendimiento de dividendos sobre el índice es de 3% anual y la volatilidad del índice es de 25% anual. Divida la vida de la opción en cuatro periodos quincenales y use el método de ARBOLES BINOMIALES para calcular el valor de la opción.

RESOLUCIÓN

DATOS DEL ÍNDICE

NIVEL DEL ÍNDICE ACTUAL

$$I_0 = 484\$$$

VOLATILIDAD DEL ÍNDICE

$$\sigma = 0,25$$

TASA DE INTERÉS CONTINUAMENTE COMPUESTA

$$r = 0,1$$

RENDIMIENTO DE DIVIDENDOS SOBRE EL ÍNDICE

$$q = 0,03$$

OPCIÓN DE VENTA EUROPEA SOBRE ÍNDICE

PRECIO DE EJERCICIO

$$K = 480\$$$

VENCIMIENTO

$$\text{En un año } T = \frac{1}{12} \text{ por lo tanto } \Delta t = \frac{15}{360}$$

La construcción un árbol de ÍNDICE es semejante a una acción que paga rendimiento a una tasa continúa q y en donde la tasa es igual al rendimiento de dividendos sobre el índice.

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$P = \frac{a - d}{u - d}$$

Donde

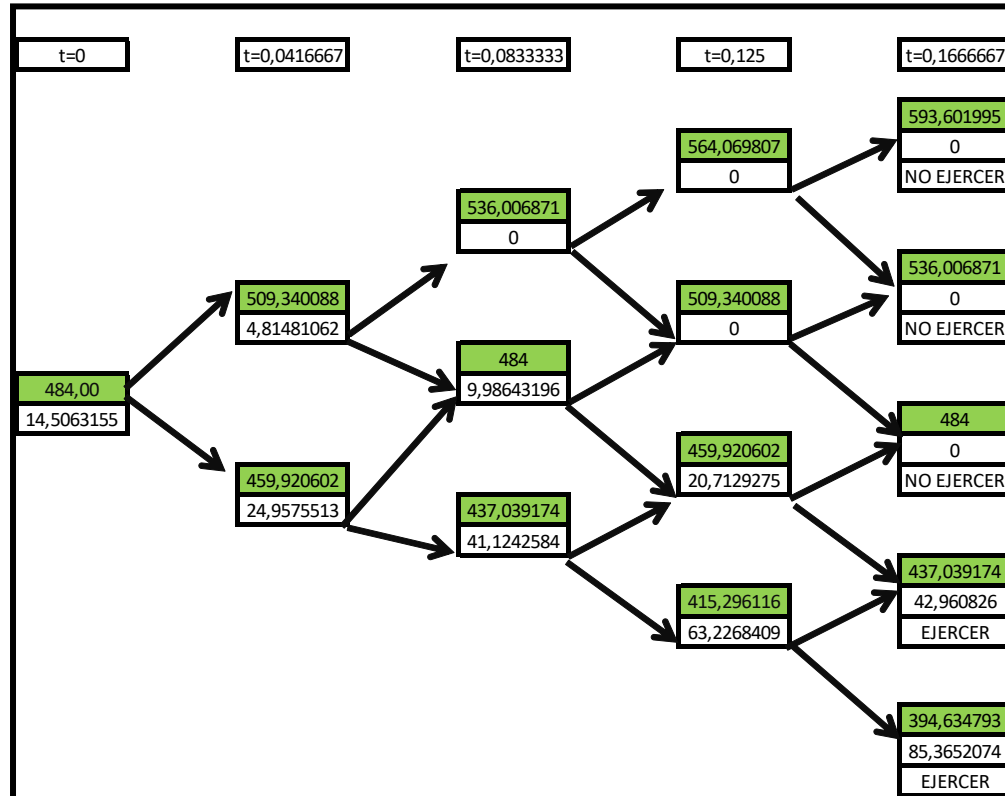
$$a = e^{(r-q) \times \Delta t}$$

ÍNDICE		DATOS	DATOS DEL PUT EUROPEO SOBRE ÍNDICE
u	1,0523556	VOLATILIDAD DEL ÍNDICE	STRIKE
d	0,9502492	$\sigma = 0,25$	$K = 480\$$
a	1,00292092	TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO	VENCIMIENTO
p	0,5158517	$r = 0,1$	$T = \frac{2}{12}$
$(1 - p)$	0,4841483	RENDIMIENTO DE DIVIDENDO SOBRE EL ÍNDICE	Δt
I_0	484\$	$q = 0,03$	$\Delta t = \frac{15}{365}$

El valor de prima del PUT es de 14,5063155\$

RESULTADOS

Los resultados del árbol de cuatro pasos fueron realizados con el EXCEL



VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE VENTA SOBRE UNA DIVISA

ENUNCIADO

Considere una opción de venta europea a un año sobre la LIBRE BRITANICA. El tipo de cambio actual es de 1,61\$, el precio de ejercicio es de 1,60\$, la tasa de interés libre de riesgo estadounidense es de 8% anual, la tasa de interés libre de riesgo británica es de 9% anual y la volatilidad del tipo de cambio en LIBRAS ESTERLINAS es de 12% anual. Se divide la vida del derivado en cuatro intervalos de un trimestre cada uno con el propósito de construir el árbol.

RESOLUCIÓN

DATOS DEL TIPO DE CAMBIO

PRECIO DEL TIPO DE CAMBIO ACTUAL

$$TC_0 = 1,61\$$$

VOLATILIDAD DEL TIPO DE CAMBIO

$$\sigma = 0,12$$

TASA DE INTERÉS CONTINUAMENTE COMPUESTA LOCAL

$$r = 0,08$$

TASA DE INTERÉS CONTINUAMENTE COMPUESTA INTERNACIONAL

$$r_f = 0,09$$

OPCIÓN DE VENTA EUROPEA SOBRE LIBRA ESTERLINA

PRECIO DE EJERCICIO

$$K = 1,60\$$$

VENCIMIENTO

$$\text{En un año } T = 1 \text{ por lo tanto } \Delta t = \frac{3}{12}$$

La construcción un árbol de TIPO DE CAMBIO es semejante a una acción que paga rendimiento a una tasa continua q y en donde la tasa es igual a

$$q = r_f$$

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$P = \frac{a - d}{u - d}$$

Donde para el caso de una acción que paga rendimiento a una tasa continua q

$$a = e^{(r-q) \times \Delta t}$$

Para el caso de divisas

$$a = e^{(r-r_f) \times \Delta t}$$

Por lo tanto

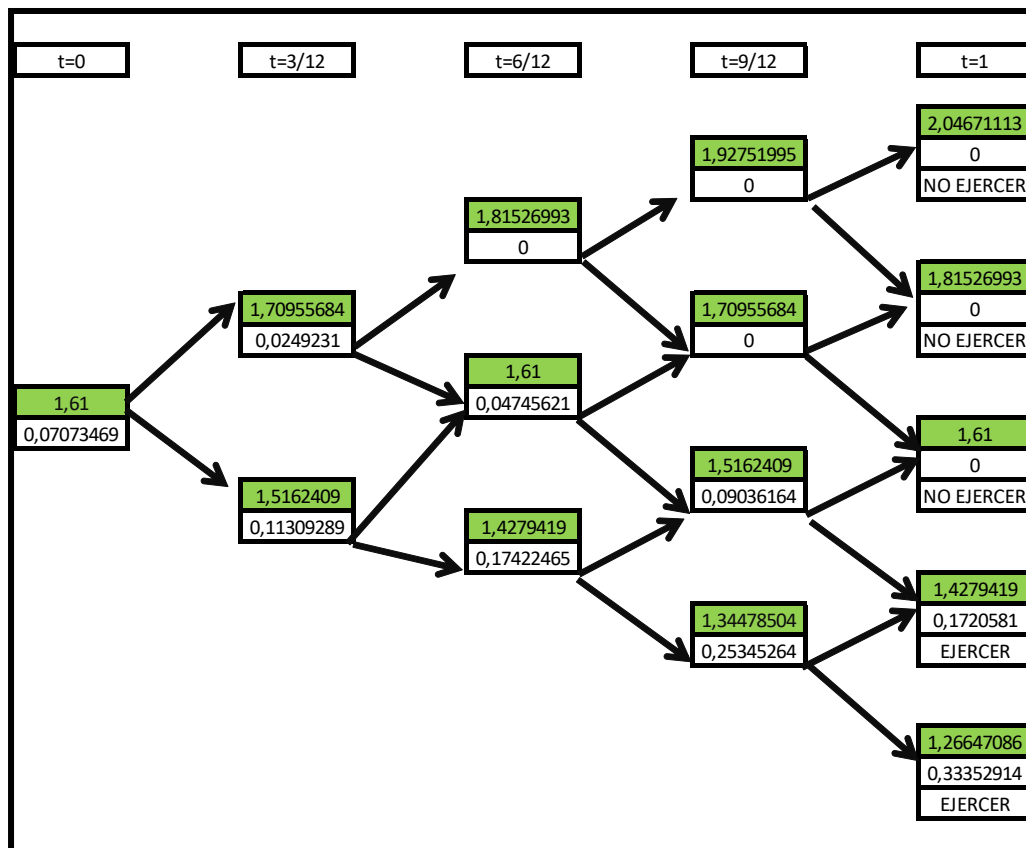
$$P = \frac{e^{(r-r_f) \times \Delta t} - d}{u - d}$$

Los cálculos se resumen en la siguiente tabla

TIPO DE CAMBIO		DATOS	DATOS DEL PUT EUROPEO SOBRE LA LIBRA ESTERLINA
u	1,0618365	VOLATILIDAD DEL TIPO DE CAMBIO	STRIKE
d	0,9417645	$\sigma = 0,12$	$K = 1,60\$$
a	0,99750312	TASA DE INTERÉS LOCAL	VENCIMIENTO
p	0,4642097	$r = 0,08$	$T = 1$
$(1 - p)$	0,5357903	TASA DE INTERÉS INTERNACIONAL	Δt
TC_0	1,61\$	$q = r_f = 0,09$	$\Delta t = \frac{3}{12} = 0,25$

RESULTADOS

Los resultados del árbol de cuatro pasos fueron realizados con el EXCEL



VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA SOBRE FUTUROS

ENUNCIADO

Considere una opción de compra europea a cuatro meses de futuros sobre índices. El precio de futuros actual es de 300\$, el precio de ejercicio es de 300\$, la tasa de interés libre de riesgo es de 8% anual y la volatilidad del índice es de 30% anual. Se divide la vida del derivado en cuatro intervalos de un mes con el propósito de construir el árbol.

RESOLUCIÓN

DATOS DEL CONTRATO DE FUTURO

PRECIO DEL FUTURO ACTUAL

$$F_0 = 300\$$$

VOLATILIDAD DEL INDICE

$$\sigma = 0,3$$

TASA DE INTERÉS CONTINUAMENTE COMPUESTA

$$r = 0,08$$

OPCIÓN DE COMPRA EUROPEO SOBRE FUTURO

PRECIO DE EJERCICIO

$$K = 300\$$$

VENCIMIENTO

$$\text{En cuatro meses o } T = \frac{4}{12} \text{ por lo tanto } \Delta t = \frac{1}{12}$$

Como un contrato a futuro es semejante a una acción que paga rendimiento a una tasa continua q y en donde la tasa es igual a

$$q = r$$

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$P = \frac{a - d}{u - d}$$

Donde para el caso de una acción que paga rendimiento a una tasa continua q

$$a = e^{(r-q) \times \Delta t}$$

Para el caso de contratos a futuros

$$a = e^{(r-r) \times \Delta t} = 1$$

Por lo tanto

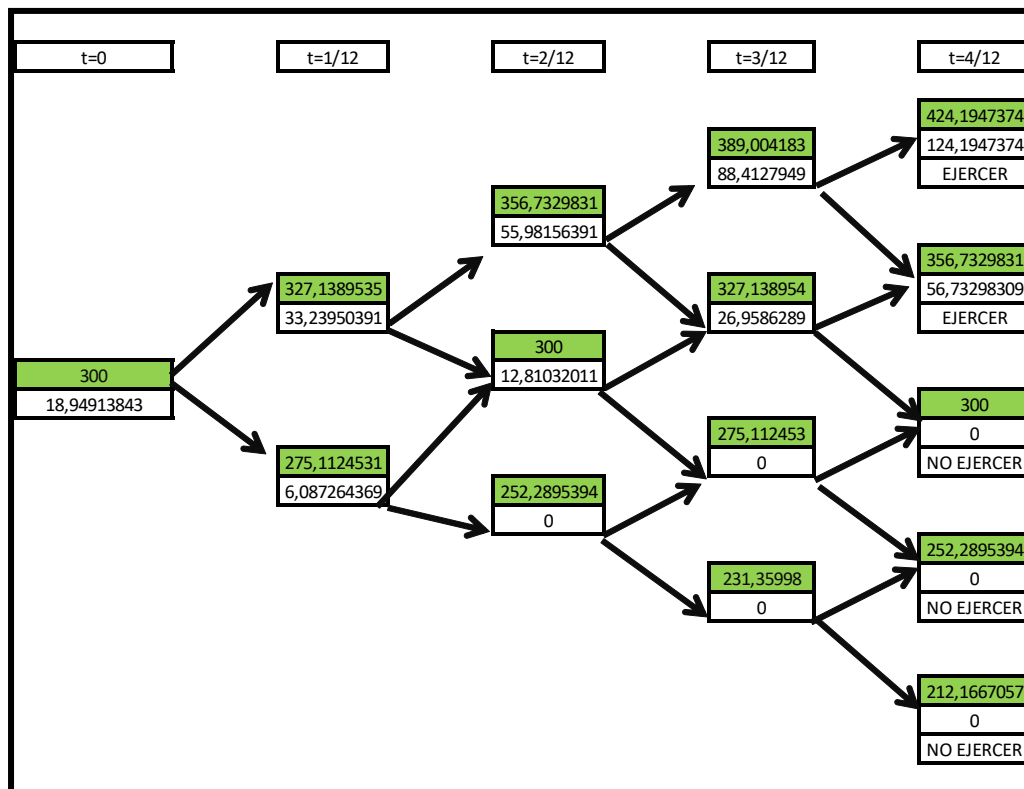
$$P = \frac{1 - d}{u - d}$$

Los cálculos se resumen en la siguiente tabla

CONTRATO A FUTURO		DATOS	DATOS DEL CALL EUROPEO SOBRE FUTURO
u	1,0904632	VOLATILIDAD	STRIKE
d	0,9170415	$\sigma = 0,3$	$k = 300\$$
a	1	TASA DE INTERÉS	VENCIMIENTO
p	0,4783629	$r = 0,08$	$T = \frac{4}{12}$
$(1 - p)$	0,5216371	TASA DE RENDIMIENTO	Δt
F_0	300\$	$q = r$	$\Delta t = \frac{1}{12}$

RESULTADOS

Los resultados del árbol de cuatro pasos fueron realizados con el EXCEL



VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA CALL SOBRE UNA DIVISA

PARTE a)

DATOS DEL TIPO DE CAMBIO

PRECIO DEL TIPO DE CAMBIO ACTUAL

$$TC_0 = 3,1\$$$

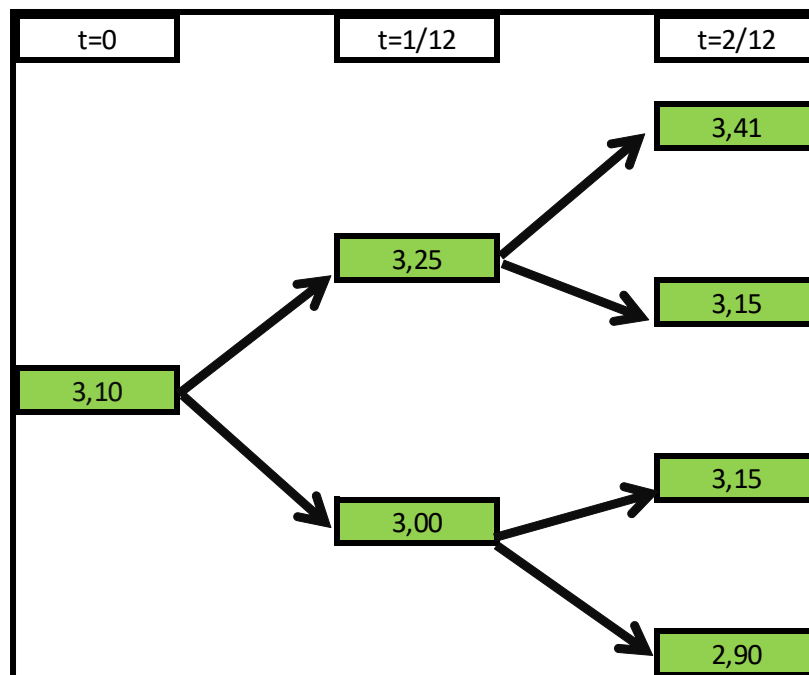
TASA DE INTERÉS CONTINUAMENTE COMPUESTA LOCAL

$$r = 0,02$$

TASA DE INTERÉS CONTINUAMENTE COMPUESTA INTERNACIONAL

$$r_f = 0,01$$

EL ÁRBOL DE DOS PASOS DEL TIPO DE CAMBIO ES EL SIGUIENTE



OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA SOBRE DIVISAS

PRECIO DE EJERCICIO

$$K = 3,12\$$$

VENCIMIENTO

$$\text{En un año } T = \frac{2}{12} \text{ por lo tanto } \Delta t = \frac{1}{12}$$

La construcción un árbol de TIPO DE CAMBIO es semejante a una acción que paga rendimiento a una tasa continua q y en donde la tasa es igual a

$$q = r_f$$

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$P = \frac{a - d}{u - d}$$

Donde para el caso de una acción que paga rendimiento a una tasa continua q

$$a = e^{(r-q) \times \Delta t}$$

Para el caso de divisas

$$a = e^{(r-r_f) \times \Delta t}$$

Por lo tanto

$$P = \frac{e^{(r-r_f) \times \Delta t} - d}{u - d}$$

CALCULO DE LOS FACTORES u y d

$$TC_{UP} = TC_0 \times u$$

$$TC_{DOWN} = TC_0 \times d$$

Por lo tanto

$$u = \frac{TC_{UP}}{TC_0} = \frac{3,25\$}{3,1\$} = 1,04838710$$

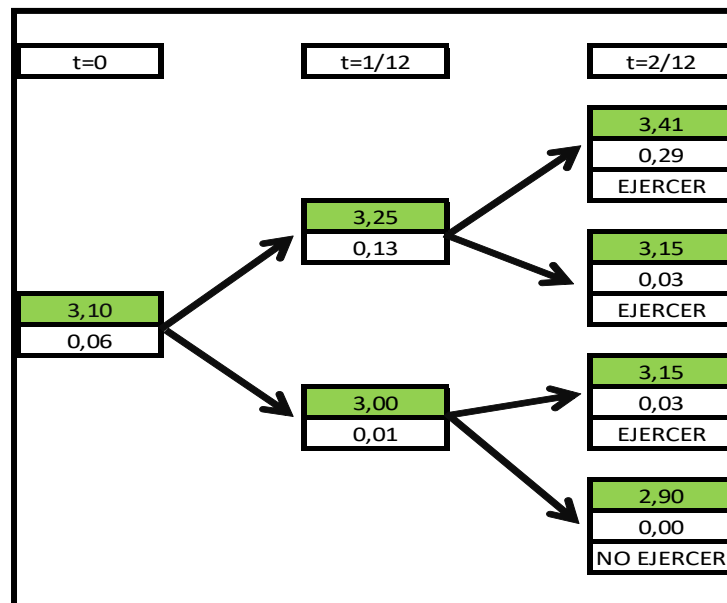
$$d = \frac{TC_{down}}{TC_0} = \frac{3\$}{3,1\$} = 0,96774194$$

Los cálculos se resumen en la siguiente tabla

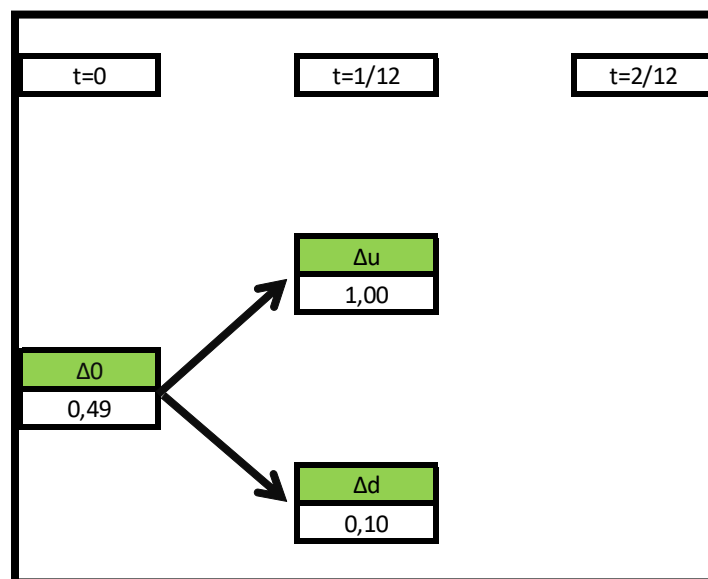
TIPO DE CAMBIO		DATOS	DATOS DEL CALL EUROPEO SOBRE DIVISAS
u	1,04838710	VOLATILIDAD DEL TIPO DE CAMBIO	STRIKE
d	0,96774194		$K = 3,12\$$
a	1,00083368	TASA DE INTERÉS LOCAL	VENCIMIENTO
p	0,41033764	$r = 0,02$	$T = \frac{2}{12} = 0,1666667$
$(1 - p)$	0,58966236	TASA DE INTERÉS INTERNACIONAL	$FD = 0,9983347$
TC_0	3,10\$	$q = r_f = 0,01$	$\Delta t = \frac{1}{12} = 0,083333$

RESULTADOS

Los resultados del árbol de dos pasos fueron realizados con el EXCEL



ÁRBOL DE DELTAS



PARTE b)

ESTRATEGIAS DE ARBITRAJE EN UNA OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL SOBRE DIVISAS

La prima del CALL SOBRE DIVISAS es igual a

$$c = 0,06\$$$

Pero qué ocurriría si la prima de mercado c^M es distinta, en este caso un arbitrajista podría obtener una ganancia segura y sin colocar capital alguno.

SI LA PRIMA DE MERCADO $c^M > c$

Tenemos que

$$c^M = 1\$$$

Como el CALL está sobrevaluado, es decir, vale más de lo que debería valer, tomamos una posición SHORT en el mismo

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN SHORT EN UN CALL EUROPEO SOBRE DIVISAS

CARTERA 2

POSICIÓN LONG EN DIVISAS Y TOMAREMOS UN PRESTAMO

Es decir que tomamos una posición SHORT en la cartera 1 y posición LONG en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar un préstamo para financiar la compra de divisas a pagar en $t = 0,5$	0,519\$
Comprar la cantidad de $\alpha_0 = 0,49$ unidades de DIVISAS al precio $S_0 = 3,10\$$	-1,519\$
Tomar una posición SHORT en un CALL SOBRE DIVISAS	1\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP

PARA SIMULAR EL CALL DEBEMOS TENER EN CARTERA

Hay que tener en cartera $\alpha_u = 1$ UNIDADES DE MONEDA EXTRANJERA

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $\alpha_0 = 0,49$ UNIDADES DE MONEDA EXTRANJERA

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
Tomar un préstamo para financiar la compra de divisas a pagar en $t = 0,5$	1,6575\$
Comprar la cantidad de $\bar{\alpha}_u - \alpha_0 = 0,51$ de MONEDA EXTRANJERA al precio $S_u = 3,25\$$ que hacen falta para tener α_u UNIDADES DE DIVISAS en cartera	-1,6575\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
Deposito de la ganancia por la venta de divisas para cobrar en $t = 0,5$	-1,17\$
Vender la cantidad de $\bar{\alpha}_0 - \bar{\alpha}_d = 0,39$ de UNIDADES DE MONEDA EXTRANJERA al precio $S_d = 3\$$ que sobran para tener α_d DIVISAS en cartera	1,17\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$ **SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$** **SI OCURRE ESCENARIO UP-UP**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
Pagar deuda	$-0,519\$e^{0,02 \cdot \frac{2}{12}} - 1,6575\$e^{0,02 \cdot \frac{1}{12}} = -2,18099769\$$
VENDER la cantidad de 1 DIVISA al precio $S_{uu} = 3,41\$$	3,41\$
RESULTADO DEL CALL	-0,29\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	0,93900231\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
Pagar deuda	-2,18099769\$
VENDER la cantidad de 1 DIVISA al precio $S_{ud} = 3,15\$$	3,15\$
RESULTADO DEL CALL	-0,03\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	0,93900231\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
Pagar deuda	$-0,519\$e^{0,02 \cdot \frac{2}{12}} = -0,520732886\$$
Cobrar deposito	$1,17\$e^{0,02 \cdot \frac{1}{12}} = 1,171951626\$$
Vender la cantidad de 0,10 DE DIVISA al precio $S_{du} = 3,15\$$	0,315\$
RESULTADO DEL CALL	-0,03\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	0,93621874\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
Pagar deuda	$-0,519\$e^{0,02 \cdot \frac{2}{12}} = -0,520732886\$$
Cobrar deposito	$1,17\$e^{0,02 \cdot \frac{1}{12}} = 1,171951626\$$
Vender la cantidad de 0,10 DE DIVISA al precio $S_{uu} = 2,90\$$	0,29\$
RESULTADO DEL CALL	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	0,94121874\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 0,943138561\$

GANANCIA POR ARBITAJE EN T

$$[c^M - c] \cdot e^{rT}$$

Tenemos que

$$1\$ - 0,06\$ = 0,94\$$$

$$0,94\$e^{0,02 \cdot \frac{2}{12}} = 0,943138561\$$$

SI LA PRIMA DE MERCADO $c^M < c$

Tenemos que

$$c^M = 0,02\$$$

Como el CALL está subvaluado, es decir, vale menos de lo que debería valer, tomamos una posición LONG en el mismo.

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN LONG EN UN CALL EUROPEO SOBRE DIVISAS

CARTERA 2

POSICIÓN SHORT EN DIVISAS Y HAREMOS UN DEPOSITO

Es decir que tomamos una posición LONG en la cartera 1 y posición SHORT en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Hacer un deposito para cobrar en $t = 0,5$	-1,499\$
Vender en corto la cantidad de $\alpha_0 = 0,49$ de DIVISAS al precio $S_0 = 3,10\$$	1,519\$
Tomar una posición LONG en un CALL	-0,02\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP

PARA SIMULAR EL CALL DEBEMOS TENER EN CARTERA

Hay que tener en cartera $-\alpha_u = -1$ DIVISAS

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $-\alpha_0 = -0,49$ DIVISAS

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
Hacer un depósito para cobrar en $t = 0,5$	-1,6575\$
Vender en corto la cantidad de $\overline{\alpha_u} - \overline{\alpha_0} = 0,51$ DIVISAS al precio $S_u = 3,25$ \$	1,6575\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
Tomar un préstamo a pagar en $t = 0,5$	1,17\$
Comprar la cantidad de $\overline{\alpha_0} - \overline{\alpha_d} = 0,39$ DIVISAS al precio $S_d = 3$ \$	-1,17\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
Cobrar depósitos	$1,499\$ e^{0,02 \cdot \frac{2}{12}} + 1,6575\$ e^{0,02 \cdot \frac{1}{12}} = 3,164269807\$$
Comprar la cantidad de 1 DIVISAS al precio $S_{uu} = 3,41$ \$ para devolver	-3,41\$
RESULTADO DEL CALL	0,29\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	0,044269807\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
Cobrar depósitos	3,164269807\$
Comprar la cantidad de 1 DIVISAS al precio $S_{ud} = 3,15$ \$ para devolver	-3,15\$
RESULTADO DEL CALL	0,03\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	0,044269807\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
Pagar deuda	$-1,17\$ \times e^{0,02 \cdot \frac{1}{12}} = -1,171951626$
Cobrar deposito	$1,499\$ e^{0,02 \cdot \frac{2}{12}} = 1,504005004$
Comprar la cantidad de 0,10 DIVISAS al precio $S_{du} = 3,15\$$ para devolver	$-0,315\$$
RESULTADO DEL CALL	$0,03\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	$0,047053378\\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN- DOWN	
Pagar deuda	$-1,17\$ \times e^{0,02 \cdot \frac{1}{12}} = -1,171951626$
Cobrar deposito	$1,499\$ e^{0,02 \cdot \frac{2}{12}} = 1,504005004$
Comprar la cantidad de 0,10 DIVISAS al precio $S_{dd} = 2,90\$$ para devolver	$-0,29\$$
RESULTADO DEL CALL	$0\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	$0,042053378\\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a $0,040133555\$$

GANANCIA POR ARBITAJE EN T

$$[c - c^M] \cdot e^{rT}$$

Tenemos que

$$0,06\$ - 0,02\$ = 0,04\$$$

$$0,04\$ e^{0,02 \cdot \frac{2}{12}} = 0,040133555\$$$

Hay diferencias porque se trabajó con números redondeados.

OPCIONES SOBRE FUTUROS

VALUACIÓN DE OPCIONES SOBRE FUTUROS

ÁRBOL BINOMIAL DE UN PASO

OPCIÓN DE COMPRA SOBRE FUTUROS EUROPEA CALL

PRECIO DEL FUTURO EN EL MOMENTO $t = 0$

$$F_0 = 100\$$$

Es el precio que se pacta comprar o vender, dependiendo de la posición que se tome, un determinado activo en una fecha futura H , la cual para lo que resta es desconocida y no es importante para los fines de la valuación de la opción.

PRECIO DEL FUTURO EN EL MOMENTO $t = T$

La fuente de incertidumbre proviene del precio que toma el futuro en el momento T .

PRECIO DEL FUTURO EN EL MOMENTO $t = T$	
Sube la cotización	Baja la cotización
ESCENARIO UP	ESCENARIO DOWN

Si sube la cotización

$$F_{UP} = F_0 \cdot u$$

Si baja la cotización

$$F_{DOWN} = F_0 \cdot d$$

Esto ocurre sin importar la probabilidad de ocurrencia de cada suceso

En nuestro ejemplo

Si sube la cotización

$$F_{UP} = 115\$$$

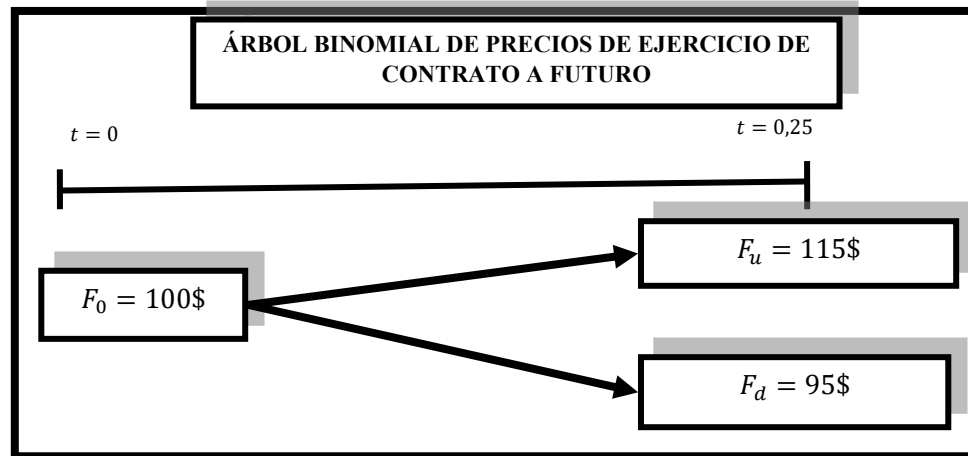
Si baja la cotización

$$F_{DOWN} = 95\$$$

Donde la variable aleatoria F_T que suponemos puede tomar sólo dos valores, es el precio que se pacta para comprar o vender, dependiendo de la posición que se tome, del mismo activo que se pacto un precio de F_0 en el momento $t = 0$ y en la misma fecha futura H .

TASA DE INTERES LIBRE DE RIESGO PARA EL PERIODO

$$r = 5\%$$



VALOR DEL CONTRATO A FUTURO QUE SE PACTO EN EL MOMENTO $t = 0$

VALOR DEL CONTRATO A FUTURO EN EL MOMENTO $t = 0$

En el momento en que se firmó el contrato su valor es de cero.

VALOR DEL CONTRATO A FUTURO EN EL MOMENTO $t = T$

La persona que realizó el contrato en el momento $t = 0$ lo conservó en su poder hasta el momento $t = T$, donde realizar el mismo contrato, con todos los términos iguales exceptuando que cambio el precio de ejercicio del contrato el cual pasó a ser F_T . Por lo cual hay dos escenarios posibles para determinar el valor del contrato que se realizó en $t = 0$.

ESCENARIO UP

El precio de ejercicio del contrato que se realiza en $t = T$ es

$$F_{UP} = 115\$$$

EN EL CASO DE UNA COMPRA

Si el contrato de futuro que se realizó en $t = 0$ fue para comprar un activo, luego, en el momento T se tiene un contrato para comprar en la fecha H al precio $F_0 = 100\$$ cuando realizar el mismo contrato tiene un precio de $F_{UP} = 115\$$ por lo cual el tenedor del primer contrato tiene una ganancia porque el pacto comprar el activo a un precio menor al que se puede realizar en T .

EN LA FECHA H

CONTRATO DE FUTURO HECHO EN EL MOMENTO $t = 0$

$$\text{PRECIO DE COMPRA } F_0 = 100\$$$

CONTRATO DE FUTURO HECHO EN EL MOMENTO $t = T$

$$\text{PRECIO DE COMPRA } F_{UP} = 115\$$$

GANANCIA EN EL MOMENTO H

$$F_T - F_0 = 115\$ - 100\$ = 15\$$$

GANANCIA EN EL MOMENTO $t = T$

$$\frac{[F_T - F_0]}{1 + r} = \frac{15\$}{1,05} = 14,2857\$$$

El cual es el valor del contrato en el momento T

EN EL CASO DE UNA VENTA

Si el contrato de futuro que se realizó en $t = 0$ fue para vender un activo, luego

EN LA FECHA H

CONTRATO DE FUTURO HECHO EN EL MOMENTO $t = 0$

PRECIO DE VENTA $F_0 = 100\$$

CONTRATO DE FUTURO HECHO EN EL MOMENTO $t = T$

PRECIO DE VENTA $F_{UP} = 115\$$

PERDIDA EN EL MOMENTO H

$$F_0 - F_{UP} = 100\$ - 115\$ = -15\$$$

PERDIDA EN EL MOMENTO $t = T$

$$\frac{[F_0 - F_T]}{1 + r} = -\frac{15\$}{1,05} = -14,2857\$$$

El cual es el valor del contrato en el momento T.

ESCENARIO DOWN

El precio de ejercicio del contrato que se realiza en $t = T$ es

$$F_{DOWN} = 95\$$$

EN EL CASO DE UNA COMPRA

EN LA FECHA H

CONTRATO DE FUTURO HECHO EN EL MOMENTO $t = 0$

PRECIO DE COMPRA $F_0 = 100\$$

CONTRATO DE FUTURO HECHO EN EL MOMENTO $t = T$

PRECIO DE COMPRA $F_{DOWN} = 95\$$

PERDIDA EN EL MOMENTO H

$$F_T - F_0 = 95\$ - 100\$ = -5\$$$

PERDIDA EN EL MOMENTO $t = T$

$$\frac{[F_T - F_0]}{1 + r} = -\frac{5\$}{1,05} = -4,7619\$$$

El cual es el valor del contrato en el momento T

EN EL CASO DE UNA VENTA

Si el contrato de futuro que se realizó en $t = 0$ fue para vender un activo, luego

EN LA FECHA H

CONTRATO DE FUTURO HECHO EN EL MOMENTO $t = 0$

PRECIO DE VENTA $F_0 = 100\$$

CONTRATO DE FUTURO HECHO EN EL MOMENTO $t = T$

PRECIO DE VENTA $F_{DOWN} = 95\$$

GANANCIA EN EL MOMENTO H

$$F_0 - F_{DOWN} = 100\$ - 95\$ = 5\$$$

GANANCIA EN EL MOMENTO $t = T$

$$\frac{[F_0 - F_T]}{1 + r} = \frac{5\$}{1,05} = 4,7619\$$$

El cual es el valor del contrato en el momento T. Cuando realicemos estrategias de arbitraje no haremos las actualizaciones.

CALL SOBRE FUTUROS EUROPEO

En la fecha de ejercicio del CALL si se EJERCE, el TOMADOR obtiene una POSICIÓN LONG en un CONTRATO A FUTURO a un precio de ejercicio de F_T plus una cantidad de dinero igual a

$$\text{máx}[F_T - K; 0]$$

Donde la fecha de vencimiento del contrato a futuro es mayor o igual a la del CALL. En caso de que las fechas coincidan luego

$$F_T = S_T$$

El TOMADOR obtendría un contrato a futuro con PRECIO DE EJERCICIO igual al PRECIO DE MERCADO DEL ACTIVO. Esto ocurre porque el precio del contrato a futuro converge al precio de mercado en la fecha de cierre del futuro. En este caso el CALL SOBRE FUTUROS es igual a un CALL SOBRE EL ACTIVO SUBYACENTE que se intenta comprar o vender con el FUTURO y ambos deben valer lo mismo.

PUT SOBRE FUTUROS EUROPEO

En la fecha de ejercicio del PUT si se EJERCE, el TOMADOR obtiene una POSICIÓN SHORT en un CONTRATO A FUTURO a un precio de ejercicio de F_T plus una cantidad de dinero igual a

$$\text{máx}[K - F_T; 0]$$

Donde la fecha de vencimiento del contrato a futuro es mayor o igual a la del PUT.

VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA SOBRE FUTUROS

PRIMA DE LA OPCIÓN DE COMPRA

Sea una opción de compra sobre futuros CALL cuya PRIMA es igual a

$$c = POC$$

La cual buscamos valorar.

CARACTERÍSTICAS DEL CALL

PRECIO DE EJERCICIO K

$$96\$$$

TIEMPO DE VENCIMIENTO

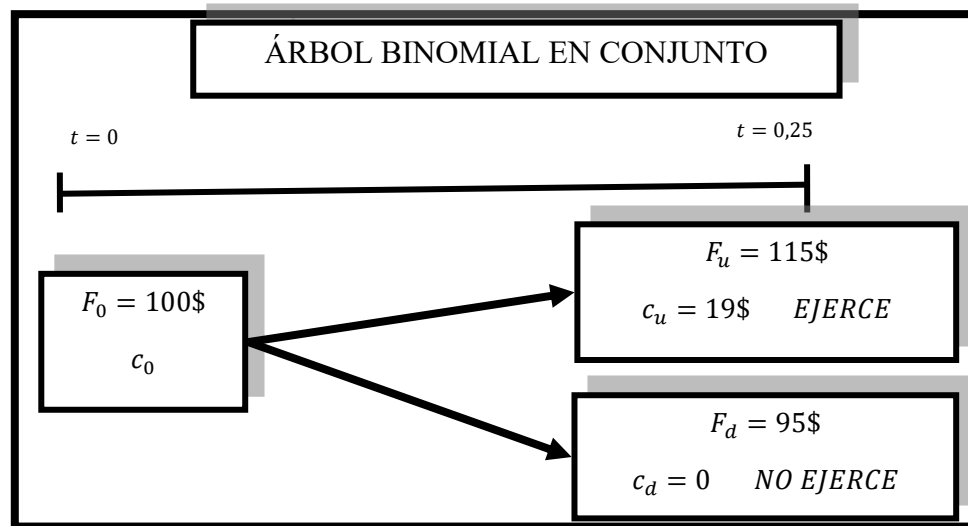
$$T = t + \Delta t = 0,25$$

CONTRATO FUTURO SUBYACENTE

Una POSICIÓN LONG en un FUTURO con PRECIO DE EJERCICIO F_T con fecha de ejercicio H

Al vencimiento $\overline{t + \Delta t}$ el CALL se lo puede EJERCER o NO EJERCER y el payoff del mismo es igual a

$$\max[F_T - K; 0]$$



EL DELTA Δ_0

$$\Delta_0 = \frac{c_u - c_d}{F_u - F_d}$$

$$\Delta_0 = \frac{c_u - c_d}{F_0[u - d]}$$

En nuestro ejemplo

$$\Delta_0 = \frac{15 - 0}{115 - 95} = 0,75$$

PAGO ESPERADO DEL FUTURO

El rendimiento esperado en un mundo neutral cuando, como en este caso, no se colocó capital al inicio, porque, como sabemos no hay que pagar para hacer un CONTRATO A FUTURO, es igual a cero

Por lo tanto

$$F_u \cdot p + F_d \cdot (1 - p) = F_0$$

Donde si sube la cotización

$$F_{UP} = F_0 \cdot u$$

Si baja la cotización

$$F_{DOWN} = F_0 \cdot d$$

$$F_0 \cdot u \cdot p + F_0 \cdot d \cdot (1 - p) = F_0$$

$$u \cdot p + d \cdot (1 - p) = 1$$

$$u \cdot p + d - d \cdot p = 1$$

$$p(u - d) + d = 1$$

$$p = \frac{1 - d}{u - d}$$

$$1 - p = 1 - \frac{1 - d}{u - d} = \frac{u - d - 1 + d}{u - d} = \frac{u - 1}{u - d}$$

DETERMINACIÓN DE LA PRIMA DEL CALL

$$c = \frac{c_u \cdot p + c_d \cdot (1 - p)}{R}$$

Es el valor actual del valor esperado utilizando las probabilidades RIESGO NEUTRO.

$$c = \frac{E_{RIESGO NEUTRO}(c_t)}{1 + r}$$

En nuestro ejemplo

PROBABILIDAD RIESGO NEUTRO

$$p = \frac{1 - 0,95}{1,15 - 0,95} = \frac{1}{4} \quad y \quad 1 - p = \frac{3}{4}$$

FACTORES

$$d = \frac{95}{100} = 0,95 \quad u = \frac{115}{100} = 1,15$$

CALCULO DE LA PRIMA

$$c = \frac{19 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4}}{1,05} = 4,5238\$$$

FACTORES EN TIEMPO CONTINUO

$$u = e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}}$$

$$d = \frac{1}{u}$$

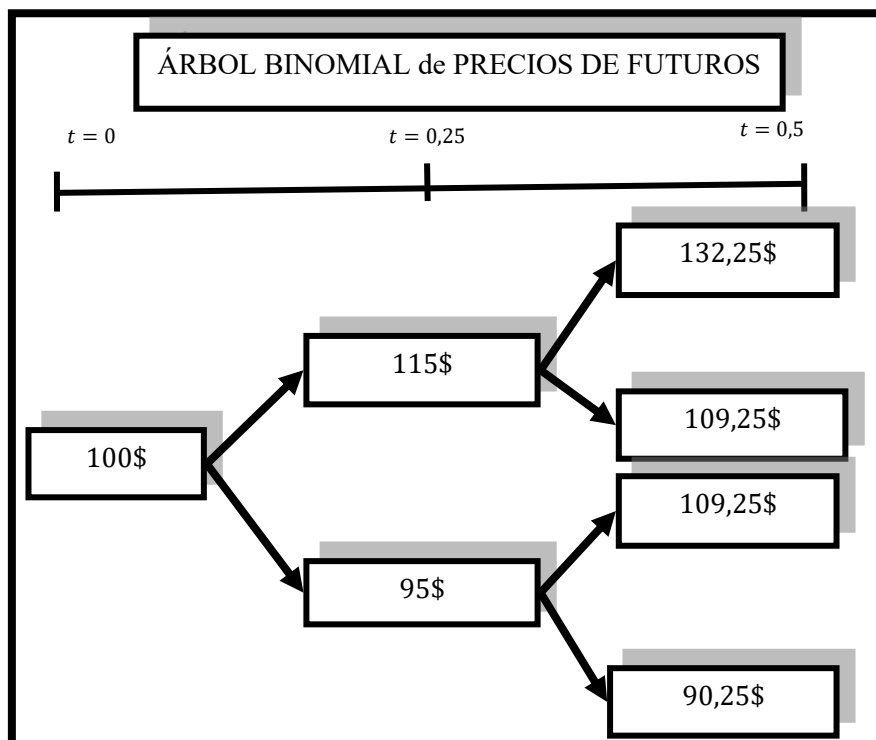
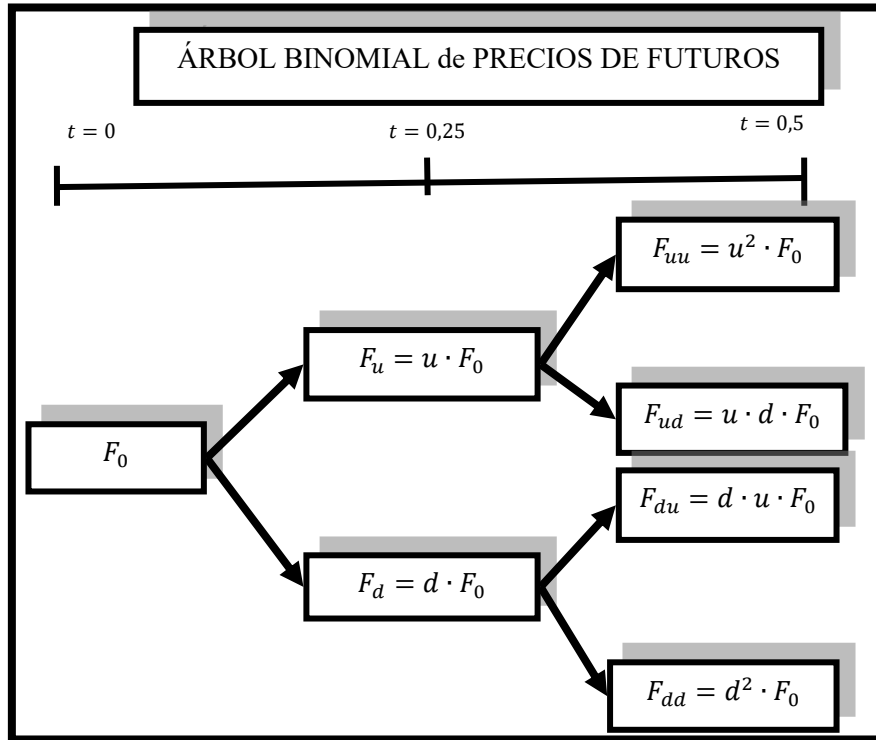
Como vemos los factores no dependen de la probabilidad de ocurrencia del evento sino de la volatilidad de la acción σ

FACTORES EN TIEMPO DISCRETO

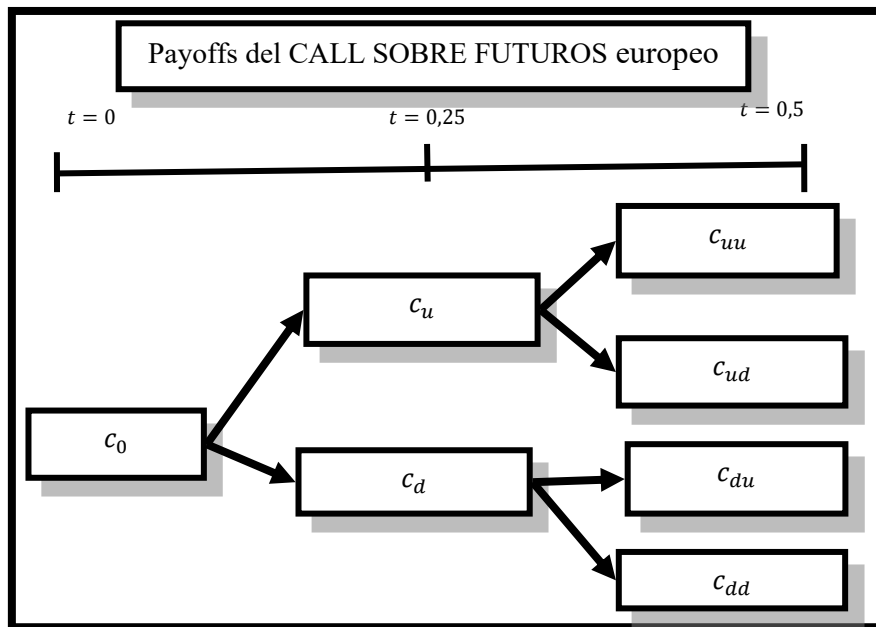
$$u = \frac{F_u}{F_0} \quad d = \frac{F_d}{F_0}$$

ÁRBOL BINOMIAL DE DOS PASOS EN TIEMPO DISCRETO**VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA****HORIZONTE DE TIEMPO**

Suponemos que $\Delta t = 0,25$ y que $t = 0$ y trabajaremos con un ÁRBOL BINOMIAL de dos pasos.

CONTRATO A FUTURO SUBYACENTE

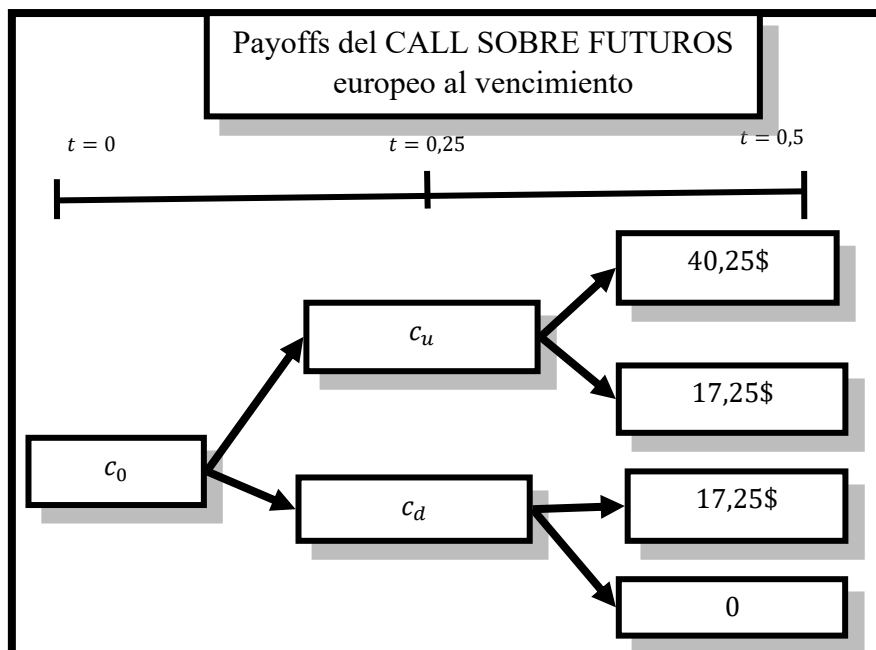
OPCIÓN DE COMPRA SOBRE FUTUROS



En el momento $t = 0,5$, el último payoffs del árbol binomial del CALL se utiliza la fórmula

$$\max[F_T - K; 0]$$

Con un PRECIO DE EJERCICIO $K = 92\$$



PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$\pi = \frac{1-d}{u-d} \quad \overline{1-\pi} = \frac{u-1}{u-d}$$

Donde u , y d se mantienen constantes a lo largo de la vida del derivado, por lo cual las probabilidades riesgo neutro también son constantes

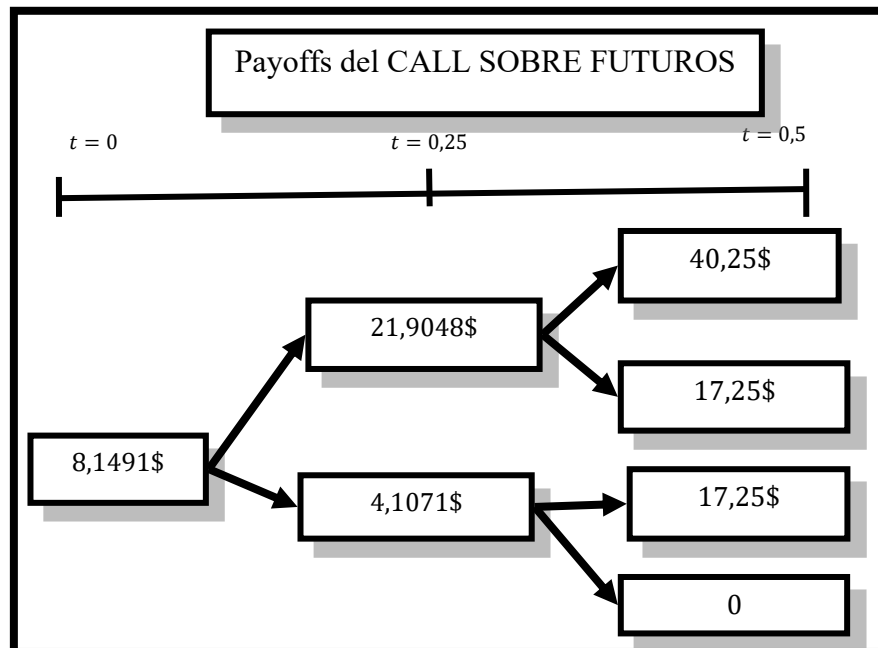
En nuestro ejemplo

$$\pi = \frac{1-0,95}{1,15-0,95} = \frac{1}{4} \quad y \quad \overline{1-\pi} = \frac{3}{4}$$

$$c_u = \frac{40,25\$ \times \left[\frac{1}{4}\right] + 17,25\$ \times \left[\frac{3}{4}\right]}{1,05} = 21,9048\$$$

$$c_d = \frac{17,25\$ \times \left[\frac{1}{4}\right] + 0 \times \left[\frac{3}{4}\right]}{1,05} = 4,1071\$$$

$$c = \frac{20,9524 \times \left[\frac{1}{4}\right] + 3,8690 \times \left[\frac{3}{4}\right]}{1,05} = 8,1491\$$$



CALCULO DEL ARBOL DE DELTAS

$$\Delta_0 = \frac{c_u - c_d}{F_u - F_d} = \frac{21,9048\$ - 4,1071\$}{115\$ - 95\$} = 0,889885$$

$$\Delta_u = \frac{c_{uu} - c_{ud}}{F_{uu} - F_{ud}} = \frac{40,25\$ - 17,25\$}{132,25\$ - 109,25\$} = 1$$

$$\Delta_d = \frac{c_{du} - c_{dd}}{F_{du} - F_{dd}} = \frac{17,25\$ - 0\$}{109,25\$ - 90,25\$} = 0,907895$$

PRECIO DE FUTUROS COMO UN ACTIVO QUE PROPORCIONA UN RENDIMIENTO

Hay un resultado general que hace que el análisis de las opciones sobre futuros sea semejante al análisis de las opciones sobre una acción que paga un rendimiento de dividendos conocido. Este resultado es que los precios de futuros se comportan de la misma forma que una acción que paga un rendimiento de dividendos igual a la tasa de interés libre de riesgo doméstica r . Esto último implica que $r = q$

PRIMERA SEÑAL

Una señal de ellos se cuando comparamos las ecuaciones de la probabilidad riesgo neutro de ambas

PROBABILIDAD RIESGO NEUTRO DE UN ACCIÓN QUE PAGA UN RENDIMIENTO DE DIVIDENDOS CONOCIDO

$$p = \frac{e^{r-q} - d}{u - d}$$

PROBABILIDAD RIESGO NEUTRO DE FUTUROS

$$p = \frac{1 - d}{u - d}$$

SEGUNDA SEÑAL

Otra señal es cuando comparamos los límites inferiores de los precios opciones y la CALL-PUT-PARITY tanto de futuros como de acciones que pagan un rendimiento de dividendos. Cuando reemplazamos por los precios de futuros y $q = r$ los límites inferiores de los precios opciones y la CALL-PUT-PARITY de la acción que paga un rendimiento de dividendos es igual a la de futuros.

TERCERA SEÑAL

Un contrato a futuro requiere una inversión inicial para llevarse a cabo de cero. Por lo cual en un mundo neutral al riesgo, el beneficio esperado de una inversión de cero también debe ser de cero. Se deduce que la tasa de crecimiento esperada del precio de futuros en un mundo neutral al riesgo debe de ser de cero.

Una acción que paga un rendimiento de dividendos crece a una tasa de crecimiento esperada de $r - q$ en un mundo neutral al riesgo. Si establecemos que $r = q$ luego la tasa de crecimiento de la acción es de cero, lo que es semejante a un precio de futuros.

ESTRATEGIAS DE ARBITRAJE EN UNA OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL SOBRE FUTUROS

Seguiremos con el mismo ejemplo con el cual venimos trabajando, donde cuando valuamos el CALL llegamos a que la prima era igual a

$$c = 8,1491\$$$

Pero qué ocurriría si la prima de mercado c^M es distinta, en este caso un arbitrajista podría obtener una ganancia segura y sin colocar capital alguno.

SI LA PRIMA DE MERCADO $c^M > c$

Tenemos que

$$c^M = 20\$$$

Como el CALL está sobrevaluado, es decir, vale más de lo que debería valer, tomamos una posición SHORT en el mismo

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN SHORT EN UN CALL EUROPEO SOBRE FUTUROS

CARTERA 2

POSICIÓN LONG EN FUTUROS Y HAREMOS UN DEPOSITO

Es decir que tomamos una posición SHORT en la cartera 1 y posición LONG en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Hacer un deposito a cobrar en $t = 0,5$	-20\$
Tomar una POSICIÓN LONG en la cantidad de $\alpha_0 = 0,889885$ CONTRATOS DE FUTUROS al precio de ejercicio $F_0 = 100\$$	0\$
Tomar una posición SHORT en un CALL	20\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP

DEBEMOS TENER EN CARTERA

Hay que tener en cartera $\alpha_u = 1$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $\alpha_0 = 0,889885$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\alpha_0 = 0,889885$ con precio de ejercicio $F_0 = 100\$$ en POSICIÓN LONG.	$\alpha_0 \times (F_u - F_0) = 0,889885 \times (115\$ - 100\$) = 13,348275\$$
Tomar una POSICIÓN LONG en la cantidad de $\alpha_u = 1$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_u = 115\$$	0\$
DEPOSITO A COBRAR EN EL PROXIMO PERIODO	-13,348275\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN

DEBEMOS TENER EN CARTERA

Hay que tener en cartera $\alpha_d = 0,90789$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $\alpha_0 = 0,889885$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\alpha_0 = 0,889885$ con precio de ejercicio $F_0 = 100\$$ en POSICIÓN LONG	$\alpha_0 \times (F_d - F_0) = 0,889885 \times (95\$ - 100\$) = -4,449425\$$
Tomar una POSICIÓN LONG en la cantidad de $\alpha_d = 0,90789$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_d = 95\$$	0\$
PRESTAMO A PAGAR EN EL PROXIMO PERIODO	4,449425\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
COBRAR DEPOSITO	$20\$ \times (1 + 0,05)^2 = 22,05\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_u = 1$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_u = 115\$$ en POSICIÓN LONG	$\alpha_u \times (F_{uu} - F_u) = 132,25\$ - 115\$ = 17,25$
DEPOSITO	$13,348275\$ \times (1,05) = 14,0157\$$
RESULTADO DEL CALL	-40,25\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	13,0657\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
COBRAR DEPOSITO	$20\$ \times (1 + 0,05)^2 = 22,05\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_u = 1$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_u = 115\$$ en POSICIÓN LONG	$\alpha_u \times (F_{ud} - F_u) = 109,25\$ - 115\$ = -5,75$
DEPOSITO	$13,348275\$ \times (1,05) = 14,0157\$$
RESULTADO DEL CALL	$-17,25\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	13,0657\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP****HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0,25$**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
COBRAR DEPOSITO	$20\$ \times (1 + 0,05)^2 = 22,05\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_d = 0,90789$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_d = 95\$$ en POSICIÓN LONG	$\alpha_d \times (F_{ud} - F_d) = 0,90789 \times (109,25\$ - 95\$) = 12,9374\$$
PRESTAMO	$-4,449425\$ \times (1,05) = -4,6719\$$
RESULTADO DEL CALL	$-17,25\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	13,0655\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
COBRAR DEPOSITO	$20\$ \times (1 + 0,05)^2 = 22,05\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_d = 0,90789$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_d = 95\$$ en POSICIÓN LONG	$\alpha_d \times (F_{dd} - F_d) = 0,90789 \times (90,25\$ - 95\$) = -4,3124775\$$
PRESTAMO	$-4,449425\$ \times (1,05) = -4,6719\$$
RESULTADO DEL CALL	$0\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	13,0656\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 13,0657\$

GANANCIA POR ARBITAJE EN T

$$[c^M - c] \times (1 + r)^2$$

Tenemos que

$$20\$ - 8,1491\$ = 11,8509\$$$

$$11,8509\$ \times 1,05^2 = 13,06561725$$

SI LA PRIMA DE MERCADO $c^M < c$

Tenemos que

$$c^M = 4\$$$

Como el CALL está subvaluado, es decir, vale menos de lo que debería valer, tomamos una posición LONG en el mismo.

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN LONG EN UN CALL EUROPEO

CARTERA 2

POSICIÓN SHORT EN CONTRATOS A FUTUROS Y HAREMOS UN PRESTAMO

Es decir que tomamos una posición LONG en la cartera 1 y posición SHORT en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar un PRESTAMO A PAGAR EN $t = 0,5$	4\$
Tomar una POSICIÓN SHORT en la cantidad de $\alpha_0 = 0,889885$ CONTRATOS DE FUTUROS al precio de ejercicio $F_0 = 100\$$	0\$
Tomar una posición LONG en un CALL	-4\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP

DEBEMOS TENER EN CARTERA

Hay que tener en cartera $\alpha_u = 1$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $\alpha_0 = 0,889885$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\alpha_0 = 0,889885$ con precio de ejercicio $F_0 = 100\$$ en POSICIÓN SHORT.	$\alpha_0 \times (F_0 - F_u) = 0,889885 \times (100\$ - 115\$) = -13,348275\$$
Tomar una POSICIÓN SHORT en la cantidad de $\alpha_u = 1$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_u = 115\$$	0\$

PRESTAMO A PAGAR EN EL PROXIMO PERIODO	13,348275\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN

DEBEMOS TENER EN CARTERA

Hay que tener en cartera $\alpha_d = 0,90789$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $\alpha_0 = 0,889885$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\alpha_0 = 0,889885$ con precio de ejercicio $F_0 = 100\$$ en POSICIÓN SHORT.	$\alpha_0 \times (F_0 - F_d) = 0,889885 \times (95\$ - 100\$) = 4,449425\$$
Tomar una POSICIÓN SHORT en la cantidad de $\alpha_d = 0,90789$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_d = 95\$$	0\$
DEPOSITO A COBRAR EN EL PROXIMO PERIODO	-4,449425\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
PAGAR PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-4\$ \times (1 + 0,05)^2 = -4,41\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_u = 1$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_u = 115\$$ en POSICIÓN SHORT	$\alpha_u \times (F_u - F_{uu}) = 115\$ - 132,25\$ = -17,25$
PAGAR PRESTAMO HECHO EN $t = 0,25$	$-13,348275\$ \times (1,05) = -14,0157\$$
RESULTADO DEL CALL	40,25\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	4,5743\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
PAGAR PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-4\$ \times (1 + 0,05)^2 = -4,41\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_u = 1$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_u = 115\$$ en POSICIÓN SHORT	$\alpha_u \times (F_u - F_{ud}) = 115\$ - 109,25\$ = 5,75\$$
PAGAR PRESTAMO HECHO EN $t = 0,25$	$-13,348275\$ \times (1,05) = -14,0157\$$
RESULTADO DEL CALL	17,25\$

BENEFICIO EN $t = 0,5$	4,5743\$
--	----------

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0,25$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
PAGAR PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-4\$ \times (1 + 0,05)^2 = -4,41\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_d = 0,90789$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_d = 95\$$ en POSICIÓN SHORT	$\alpha_d \times (F_d - F_{ud}) = 0,90789$ $\times (95\$ - 109,25\$)$ $= -12,9374\$$
DEPOSITO HECHO EN $t = 0,25$	$4,449425\$ \times (1,05) = 4,6719\$$
RESULTADO DEL CALL	17,25\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	4,5745\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN- DOWN	
PAGAR PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-4\$ \times (1 + 0,05)^2 = -4,41\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_d = 0,90789$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_d = 95\$$ en POSICIÓN SHORT	$\alpha_d \times (F_d - F_{dd}) = 0,90789 \times (95\$ - 90,25\$)$ $= 4,3124775\$$
DEPOSITO HECHO EN $t = 0,25$	$4,449425\$ \times (1,05) = 4,6719\$$
RESULTADO DEL CALL	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	4,5743775\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 4,5743\$

GANANCIA POR ARBITAJE EN T

$$[c - c^M] \times (1 + r)^2$$

Tenemos que

$$8,1491\$ - 4 = 4,1491\$$$

$$4,1491\$ \times 1,05^2 = 4,57438275\$$$

VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN DE VENTA SOBRE FUTUROS

PRIMA DE LA OPCIÓN DE VENTA

Sea una opción de venta sobre futuros PUT cuya PRIMA es igual a

$$p = POV$$

La cual buscamos valorar.

CARACTERÍSTICAS DEL PUT

PRECIO DE EJERCICIO K

$$114\$$$

TIEMPO DE VENCIMIENTO

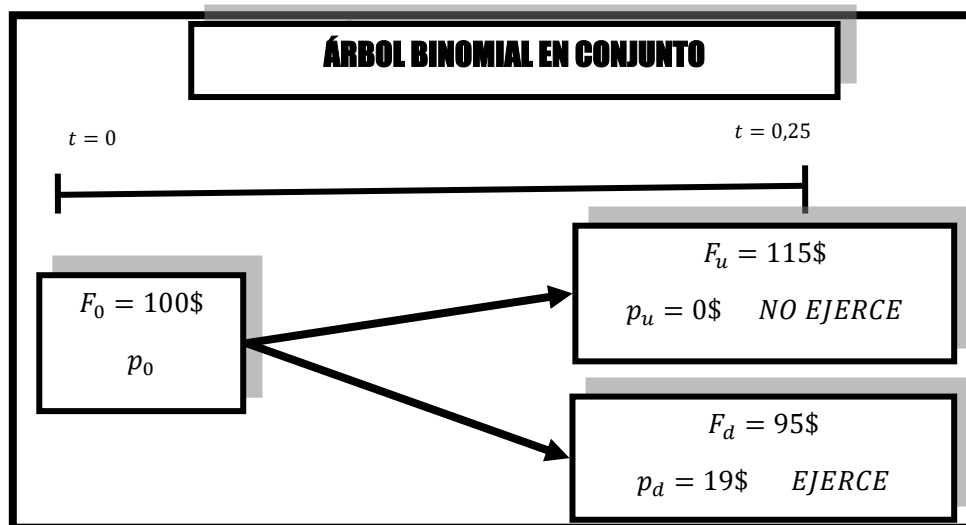
$$T = t + \Delta t = 0,25$$

CONTRATO A FUTURO SUBYACENTE

Una POSICIÓN SHORT en un FUTURO con PRECIO DE EJERCICIO F_T con fecha de ejercicio H

Al vencimiento $\overline{t + \Delta t}$ el PUT se lo puede EJERCER o NO EJERCER y el payoffs del mismo es igual a

$$\max[K - F_T; 0]$$



EL DELTA δ_0

$$\delta_0 = \frac{p_u - p_d}{F_u - F_d}$$

$$\delta_0 = \frac{p_u - p_d}{F_0[u - d]}$$

En nuestro ejemplo

$$\delta_0 = \frac{0 - 5}{115 - 95} = -0,25$$

DETERMINACIÓN DE LA PRIMA DEL PUT

$$p = \frac{p_u \cdot \pi + p_d \cdot (1 - \pi)}{R}$$

Es el valor actual del valor esperado utilizando las probabilidades RIESGO NEUTRO.

$$p = \frac{E_{RIESGO NEUTRO}(p_t)}{1 + r}$$

En nuestro ejemplo

PROBABILIDAD RIESGO NEUTRO

$$\pi = \frac{1 - 0,95}{1,15 - 0,95} = \frac{1}{4} \quad y \quad 1 - \pi = \frac{3}{4}$$

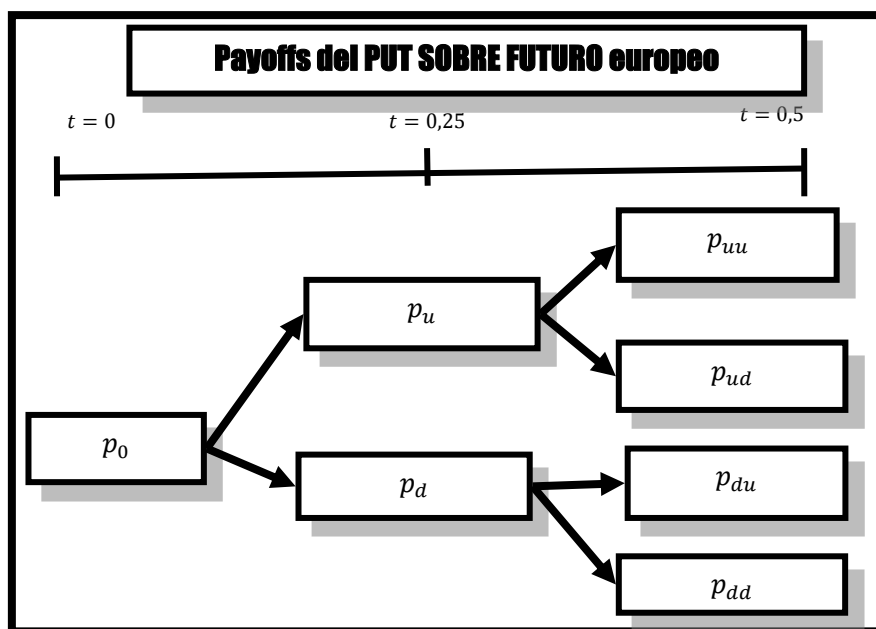
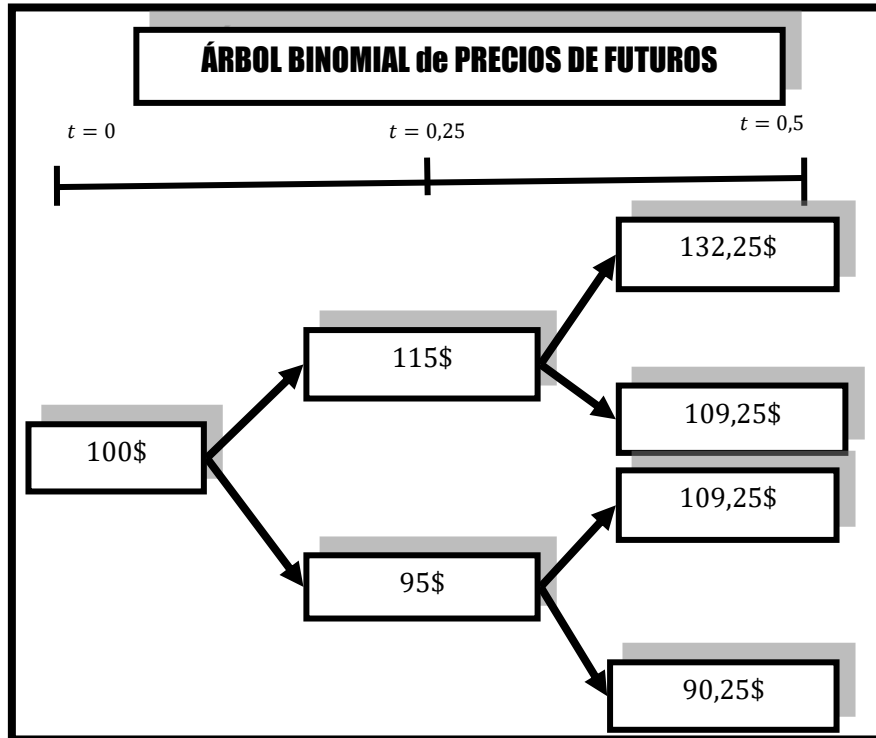
FACTORES

$$d = \frac{95}{100} = 0,95 \quad u = \frac{115}{100} = 1,15$$

CALCULO DE LA PRIMA

$$p = \frac{0\$ \times \frac{1}{4} + 19\$ \times \frac{3}{4}}{1,05} = 13,5714\$$$

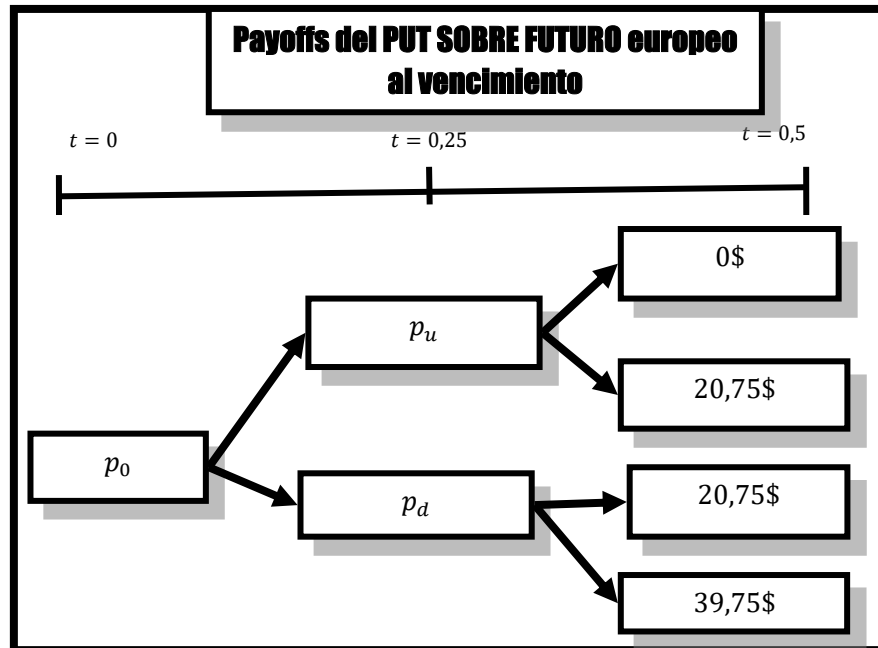
ÁRBOL BINOMIAL DE DOS PASOS EN TIEMPO DISCRETO



Para comenzar en el momento $t = 0,5$ en el último payoffs del árbol binomial del PUT se utiliza la fórmula habitual ya que es donde se puede hacer ejercicio de la opción

$$\text{máx}[K - F_T; 0]$$

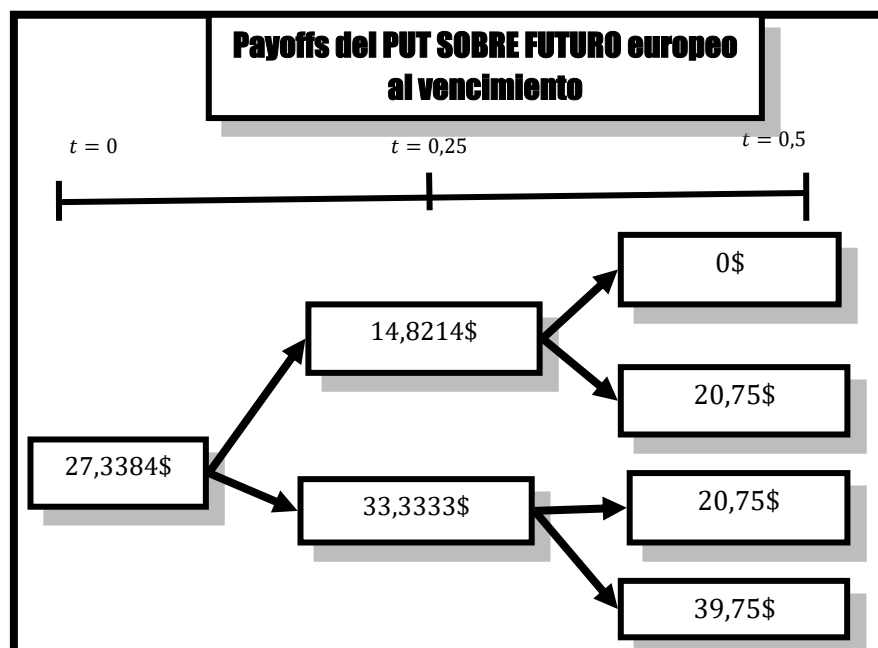
Con un PRECIO DE EJERCICIO $K = 130\$$



$$p_u = \frac{0\$ \cdot 0,25 + 20,75\$ \cdot 0,75}{1,05} = 14,8214\$$$

$$p_d = \frac{20,75\$ \cdot 0,25 + 39,75\$ \cdot 0,75}{1,05} = 33,3333\$$$

$$p = \frac{14,8214\$ \cdot 0,25 + 33,3333\$ \cdot 0,75}{1,05} = 27,3384\$$$



CALCULO DEL ARBOL DE DELTAS

$$\delta_0 = \frac{p_u - p_d}{F_u - F_d} = \frac{14,8214\$ - 33,3333\$}{115\$ - 95\$} = -0,925595$$

$$\delta_u = \frac{p_{uu} - p_{ud}}{F_{uu} - F_{ud}} = \frac{0 - 20,75\$}{132,25\$ - 109,25\$} = -0,9022$$

$$\delta_d = \frac{p_{du} - p_{dd}}{F_{du} - F_{dd}} = \frac{20,75\$ - 39,75\$}{109,25\$ - 90,25\$} = -1$$

ESTRATEGIAS DE ARBITRAJE EN UNA OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT SOBRE FUTUROS

Seguiremos con el mismo ejemplo con el cual venimos trabajando, donde cuando valuamos el PUT llegamos a que la prima era igual a

$$p = 27,3384\$$$

Pero qué ocurriría si la prima de mercado p^M es distinta, en este caso un arbitrajista podría obtener una ganancia segura y sin colocar capital alguno.

EQUIVALENCIA IMPORTANTE EN PUT SOBRE FUTUROS EUROPEO

POSICIÓN EN CONTRATOS A FUTUROS	ES EQUIVALENTE A
POSICIÓN LONG en $\delta < 0$ CONTRATOS A FUTUROS con PRECIO DE EJERCICIO F	POSICIÓN SHORT en $-\delta$ CONTRATOS A FUTUROS con PRECIO DE EJERCICIO F
POSICIÓN SHORT en $\delta < 0$ CONTRATOS A FUTUROS con PRECIO DE EJERCICIO F	POSICIÓN LONG en $-\delta$ CONTRATOS A FUTUROS con PRECIO DE EJERCICIO F

Es este caso no utilizaremos las equivalencias, pero más adelante, en otro ejemplo, si las vamos a utilizar.

SI LA PRIMA DE MERCADO $p^M > p$

Tenemos que

$$p^M = 40\$$$

Como el PUT está sobrevaluado, es decir, vale más de lo que debería valer, tomamos una posición SHORT en el mismo

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN SHORT EN UN PUT EUROPEO SOBRE FUTUROS

CARTERA 2

POSICIÓN LONG δ_0 EN FUTUROS Y HAREMOS UN DEPOSITO

Es decir que tomamos una posición SHORT en la cartera 1 y posición LONG en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Hacer un DEPOSITO A COBRAR en $t = 0,5$	-40\$
Tomar una POSICIÓN LONG en la cantidad de $\delta_0 = -0,925595$ CONTRATOS DE FUTUROS al precio de ejercicio $F_0 = 100\$$	0\$
Tomar una posición SHORT en un PUT	40\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO UP****DEBEMOS TENER EN CARTERA**

Hay que tener en cartera $\delta_u = -0,9022$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $\delta_0 = -0,925595$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
CERRAR POSICIÓN la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\delta_0 = -0,925595$ con precio de ejercicio $F_0 = 100\$$ en POSICIÓN LONG.	$\delta_0 \times (F_u - F_0) = -13,883925\$$
Tomar una POSICIÓN LONG en la cantidad de $\delta_u = -0,9022$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_u = 115\$$	0\$
PRESTAMO EN EL PROXIMO PERIODO	13,883925\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN**DEBEMOS TENER EN CARTERA**

Hay que tener en cartera $\delta_d = -1$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $\delta_0 = -0,925595$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
CERRAR POSICIÓN la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\delta_0 = -0,925595$ con precio de ejercicio $F_0 = 100\$$ en POSICIÓN LONG.	$\delta_0 \times (F_d - F_0) = 4,627975\$$
Tomar una POSICIÓN LONG en la cantidad de $\delta_d = -1$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_d = 95\$$	0\$
DEPOSITO	-4,627975\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
COBRAR DEPOSITO	$40\$ \times (1 + 0,05)^2 = 44,1\$$
CERRAR POSICIÓN la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\delta_u = -0,9022$ con precio de ejercicio $F_u = 115\$$ en POSICIÓN LONG.	$\delta_u \times (F_{uu} - F_u) = -0,9022 \times (132,25\$ - 115\$) = -15,56295\$$
PRESTAMO	$-13,883925\$ \times 1,05 = -14,5781\$$
RESULTADO DEL PUT	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	13,95895\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
COBRAR DEPOSITO	$40\$ \times (1 + 0,05)^2 = 44,1\$$
CERRAR POSICIÓN la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\delta_u = -0,9022$ con precio de ejercicio $F_u = 115\$$ en POSICIÓN LONG.	$\delta_u \times (F_{ud} - F_u) = -0,9022 \times (109,25\$ - 115\$) = 5,18765\$$
PRESTAMO	$-13,883925\$ \times 1,05 = -14,5781\$$
RESULTADO DEL PUT	-20,75\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	13,95955\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP****HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0,25$**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
COBRAR DEPOSITO	$40\$ \times (1 + 0,05)^2 = 44,1\$$
CERRAR POSICIÓN en la cantidad de $\delta_d = -1$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_d = 95\$$ en POSICIÓN LONG	$\delta_d \times (F_{ud} - F_d) = -14,25\$$
DEPOSITO	$4,627975\$ \times (1,05) = 4,85937375\$$
RESULTADO DEL PUT	$-20,75\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	13,95937375\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
COBRAR DEPOSITO	$40\$ \times (1 + 0,05)^2 = 44,1\$$
CERRAR POSICIÓN en la cantidad de $\delta_d = -1$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_d = 95\$$ en POSICIÓN LONG	$\delta_d \times (F_{dd} - F_d) = 4,75\$$
DEPOSITO	$4,627975\$ \times (1,05) = 4,85937375\$$
RESULTADO DEL PUT	$-39,75\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	13,9594\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 13,9594\$

GANANCIA POR ARBITAJE EN T

$$[p^M - p] \times (1 + r)^2$$

Tenemos que

$$40\$ - 27,3384\$ = 12,6616\$$$

$$12,6616\$ \times 1,05^2 = 13,9594\$$$

SI LA PRIMA DE MERCADO $p^M < p$

Tenemos que

$$p^M = 10\$$$

Como el PUT está subvaluado, es decir, vale menos de lo que debería valer, tomamos una posición LONG en el mismo

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN LONG EN UN PUT EUROPEO SOBRE FUTUROS

CARTERA 2POSICIÓN SHORT EN δ_0 FUTUROS Y HAREMOS UN PRESTAMO

Es decir que tomamos una posición LONG en la cartera 1 y posición SHORT en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
PRESTAMO A PAGAR en $t = 0,5$	10\$
Tomar una POSICIÓN SORT en la cantidad de $\delta_0 = -0,925595$ CONTRATOS DE FUTUROS al precio de ejercicio $F_0 = 100\$$	0\$
Tomar una posición LONG en un PUT	-10\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO UP****DEBEMOS TENER EN CARTERA**Hay que tener en cartera $\delta_u = -0,9022$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT**HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$** Se tiene en cartera $\delta_0 = -0,925595$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
CERRAR POSICIÓN la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\delta_0 = -0,925595$ con precio de ejercicio $F_0 = 100\$$ en POSICIÓN SHORT.	$\delta_0 \times (F_0 - F_u) = 13,883925\$$
Tomar una POSICIÓN SHORT en la cantidad de $\delta_u = -0,9022$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_u = 115\$$	0\$
DEPOSITO EN EL PROXIMO PERIODO	-13,883925\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN**DEBEMOS TENER EN CARTERA**Hay que tener en cartera $\delta_d = -1$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT**HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$** Se tiene en cartera $\delta_0 = -0,925595$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
CERRAR POSICIÓN la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\delta_0 = -0,925595$ con precio de ejercicio $F_0 = 100\$$ en POSICIÓN SHORT.	$\delta_0 \times (F_0 - F_d) = -4,627975\$$
Tomar una POSICIÓN SHORT en la cantidad de $\delta_d = -1$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_d = 95\$$	0\$
PRESTAMO	4,627975\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-10\$ \times (1 + 0,05)^2 = -11,025\$$
CERRAR POSICIÓN la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\delta_u = -0,9022$ con precio de ejercicio $F_u = 115\$$ en POSICIÓN SHORT.	$\delta_u \times (F_u - F_{uu}) = -0,9022 \times (115\$ - 132,25\$) = 15,56295\$$
DEPOSITO	$13,883925\$ \times 1,05 = 14,5781\$$
RESULTADO DEL PUT	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	19,11605\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-10\$ \times (1 + 0,05)^2 = -11,025\$$
CERRAR POSICIÓN la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\delta_u = -0,9022$ con precio de ejercicio $F_u = 115\$$ en POSICIÓN SHORT.	$\delta_u \times (F_u - F_{ud}) = -0,9022 \times (115\$ - 109,25\$) = -5,18765\$$
DEPOSITO	$13,883925\$ \times 1,05 = 14,5781\$$
RESULTADO DEL PUT	20,75\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	19,11545\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP****HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0,25$**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-10\$ \times (1 + 0,05)^2 = -11,025\$$
CERRAR POSICIÓN la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\delta_d = -1$ con precio de ejercicio $F_d = 95\$$ en POSICIÓN SHORT.	$\delta_u \times (F_u - F_{ud}) = -(95\$ - 109,25\$)$ $= 14,25\$$
PRESTAMO HECHO EN $t = 0,25$	$-4,627975\$ \times 1,05 = -4,8594\$$
RESULTADO DEL PUT	20,75\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	19,1156\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-10\$ \times (1 + 0,05)^2 = -11,025\$$
CERRAR POSICIÓN la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\delta_d = -1$ con precio de ejercicio $F_d = 95\$$ en POSICIÓN SHORT.	$\delta_u \times (F_u - F_{dd}) = -(95\$ - 90,25\$) = -4,75\$$
PRESTAMO HECHO EN $t = 0,25$	$-4,627975\$ \times 1,05 = -4,8594\$$
RESULTADO DEL PUT	39,75\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	19,1156\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 19,1156\$

GANANCIA POR ARBITAJE EN T

$$[p - p^M] \times (1 + r)^2$$

Tenemos que

$$27,3384\$ - 10\$ = 17,3384\$$$

$$17,3384\$ \times 1,05^2 = 19,115586\$$$

MÁS EJEMPLOS

CALL SOBRE FUTUROS EUROPEO

ENUNCIADO

DATOS DEL FUTURO

PRECIO DE EJERCICIO DEL FUTURO EN EL MOMENTO $t = 0$

$$F_0 = 60\$$$

VOLATILIDAD DEL PRECIO DE EJERCICIO DE FUTUROS

$$\sigma = 20\%$$

TASA LIBRE DE RIESGO CON CAPITALIZACIÓN CONTINÚA

$$\delta = 8\%$$

HORIZONTE DE TIEMPO

6 MESES

DATOS DEL CALL SOBRE FUTUROS

PRECIO DE EJERCICIO

$$K = 60\$$$

FECHA DE VENCIMIENTO

6 MESES

ÁRBOL BINOMIAL DE DOS PASOS

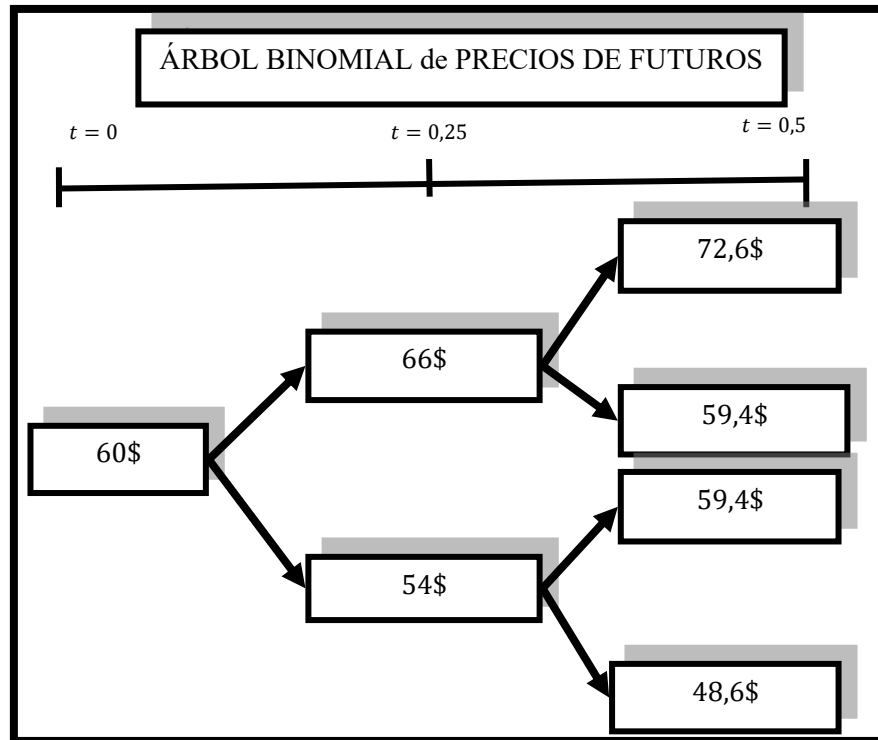
VALUACIÓN DEL CALL SOBRE FUTUROS

CONTRATO A FUTURO SUBYACENTE

Para construir el árbol debemos hallar los valores de u y d , por lo cual

$$u = e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}} = e^{0,2 \times \sqrt{0,25}} = 1,10$$

$$d = e^{-\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}} = e^{-0,2 \times \sqrt{0,25}} = 0,9$$



OPCIÓN DE COMPRA SOBRE FUTUROS

En el momento $t = 0,5$, el último payoffs del árbol binomial del CALL se utiliza la fórmula

$$\max[F_T - K; 0]$$

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$\pi = \frac{1 - d}{u - d} \quad \overline{\pi} = \frac{u - 1}{u - d}$$

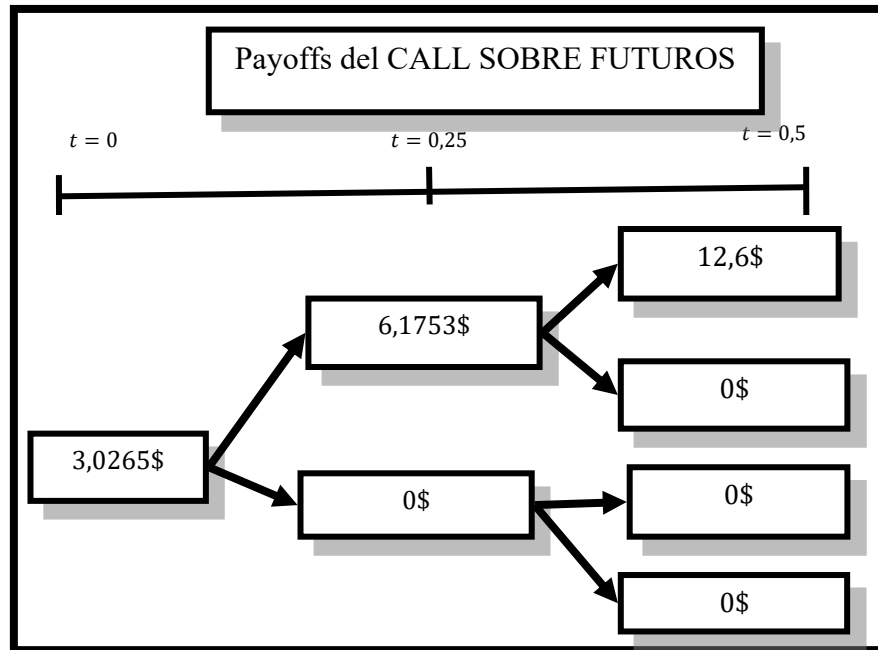
Donde u , y d se mantienen constantes a lo largo de la vida del derivado, por lo cual las probabilidades riesgo neutro también son constantes

$$\pi = \frac{1 - 0,90}{1,10 - 0,90} = \frac{1}{2} \quad y \quad \overline{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$c_u = \frac{12,6\$ \times \left[\frac{1}{2}\right] + 0 \times \left[\frac{1}{2}\right]}{e^{0,08 \times 0,25}} = 6,1753\$$$

$$c_d = \frac{0 \times \left[\frac{1}{2}\right] + 0 \times \left[\frac{1}{2}\right]}{e^{0,08 \times 0,25}} = 0\$$$

$$c = \frac{6,1753\$ \times \left[\frac{1}{2}\right] + 0\$ \times \left[\frac{1}{2}\right]}{e^{0,08 \times 0,25}} = 3,0265\$$$



CALCULO DEL ARBOL DE DELTAS

$$\Delta_0 = \frac{c_u - c_d}{F_u - F_d} = \frac{6,1753\$ - 0\$}{66\$ - 54\$} = 0,51461$$

$$\Delta_u = \frac{c_{uu} - c_{ud}}{F_{uu} - F_{ud}} = \frac{12,6\$ - 0\$}{72,6\$ - 59,4\$} = 0,9545$$

$$\Delta_d = \frac{c_{du} - c_{dd}}{F_{du} - F_{dd}} = \frac{0\$ - 0\$}{59,4\$ - 48,6\$} = 0$$

ESTRATEGIAS DE ARBITRAJE EN UNA OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA CALL SOBRE FUTUROS

Seguiremos con el mismo ejemplo con el cual venimos trabajando, donde cuando valuamos el CALL llegamos a que la prima era igual a

$$c = 3,0265\$$$

Pero qué ocurriría si la prima de mercado c^M es distinta, en este caso un arbitrajista podría obtener una ganancia segura y sin colocar capital alguno.

SI LA PRIMA DE MERCADO $c^M > c$

Tenemos que

$$c^M = 10\$$$

Como el CALL está sobrevaluado, es decir, vale más de lo que debería valer, tomamos una posición SHORT en el mismo

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN SHORT EN UN CALL EUROPEO SOBRE FUTUROS

CARTERA 2

POSICIÓN LONG EN FUTUROS Y HAREMOS UN DEPOSITO

Es decir que tomamos una posición SHORT en la cartera 1 y posición LONG en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Hacer un deposito a cobrar en $t = 0,5$	-10\$
Tomar una POSICIÓN LONG en la cantidad de $\alpha_0 = 0,51461$ CONTRATOS DE FUTUROS al precio de ejercicio $F_0 = 60\$$	0\$
Tomar una posición SHORT en un CALL	10\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP

DEBEMOS TENER EN CARTERA

Hay que tener en cartera $\alpha_u = 0,9545$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $\alpha_0 = 0,51461$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\alpha_0 = 0,51461$ con precio de ejercicio $F_0 = 60\$$ en POSICIÓN LONG.	$\alpha_0 \times (F_u - F_0) = 0,51461 \times (66\$ - 60\$) = 3,08766\$$
Tomar una POSICIÓN LONG en la cantidad de $\alpha_u = 0,9545$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_u = 66\$$	0\$
DEPOSITO A COBRAR EN EL PROXIMO PERIODO	-3,08766\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN

DEBEMOS TENER EN CARTERA

Hay que tener en cartera $\alpha_d = 0$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $\alpha_0 = 0,51461$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\alpha_0 = 0,51461$ con precio de ejercicio $F_0 = 60\$$ en POSICIÓN LONG.	$\alpha_0 \times (F_u - F_0) = 0,51461 \times (54\$ - 60\$) = -3,08766\$$
Tomar una POSICIÓN LONG en la cantidad de $\alpha_d = 0$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_d = 54\$$	0\$
PRESTAMO A PAGAR EN EL PROXIMO PERIODO	3,08766\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
COBRAR DEPOSITO	$10\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = 10,4081\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_u = 0,9545$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_u = 66\$$ en POSICIÓN LONG	$\alpha_u \times (F_{uu} - F_u) = 6,2997\$$
DEPOSITO	$3,08766\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = 3,15\$$
RESULTADO DEL CALL	-12,6\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	7,2578\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
COBRAR DEPOSITO	$10\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = 10,4081\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_u = 0,9545$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_u = 66\$$ en POSICIÓN LONG	$\alpha_u \times (F_{ud} - F_u) = -6,2997\$$
DEPOSITO	$3,08766\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = 3,15\$$
RESULTADO DEL CALL	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	7,2584\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP****HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0,25$**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
COBRAR DEPOSITO	$10\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = 10,4081\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_d = 0$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_d = 54\$$ en POSICIÓN LONG	0\$
PRESTAMO	$-3,08766\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = -3,15\$$
RESULTADO DEL CALL	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	7,2581\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
COBRAR DEPOSITO	$10\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = 10,4081\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_d = 0$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_d = 54\$$ en POSICIÓN LONG	0\$
PRESTAMO	$-3,08766\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = -3,15\$$
RESULTADO DEL CALL	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	7,2581\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 7,25809\$

GANANCIA POR ARBITAJE EN T

$$[c^M - c] \times e^{\delta \times \Delta t}$$

Tenemos que

$$10\$ - 3,0265\$ = 6,9735\$$$

$$6,9735\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = 7,25809\$$$

SI LA PRIMA DE MERCADO $c^M < c$

Tenemos que

$$c^M = 1\$$$

Como el CALL está subvaluado, es decir, vale menos de lo que debería valer, tomamos una posición LONG en el mismo.

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN LONG EN UN CALL EUROPEO

CARTERA 2

POSICIÓN SHORT EN CONTRATOS A FUTUROS Y HAREMOS UN PRESTAMO

Es decir que tomamos una posición LONG en la cartera 1 y posición SHORT en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Tomar un PRESTAMO A PAGAR EN $t = 0,5$	1\$
Tomar una POSICIÓN SHORT en la cantidad de $\alpha_0 = 0,51461$ CONTRATOS DE FUTUROS al precio de ejercicio $F_0 = 60\$$	0\$
Tomar una posición LONG en un CALL	-1\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO UP****DEBEMOS TENER EN CARTERA**Hay que tener en cartera $\alpha_u = 0,9545$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT**HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$** Se tiene en cartera $\alpha_0 = 0,51461$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\alpha_0 = 0,51461$ con precio de ejercicio $F_0 = 60\$$ en POSICIÓN SHORT.	$\alpha_0 \times (F_0 - F_u) = 0,51461 \times (60\$ - 66\$) = -3,08766\$$
Tomar una POSICIÓN SHORT en la cantidad de $\alpha_u = 0,9545$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_u = 66\$$	0\$
PRESTAMO A PAGAR EN EL PROXIMO PERIODO	3,08766\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN**DEBEMOS TENER EN CARTERA**Hay que tener en cartera $\alpha_d = 0$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT.**HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$** Se tiene en cartera $\alpha_0 = 0,51461$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT.

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $\alpha_0 = 0,51461$ con precio de ejercicio $F_0 = 60\$$ en POSICIÓN SHORT	$\alpha_0 \times (F_0 - F_d) = 0,51461 \times (60\$ - 54\$) = 3,08766\$$
Tomar una POSICIÓN SHORT en la cantidad de $\alpha_d = 0$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_d = 54\$$	0\$
DEPOSITO A COBRAR EN EL PROXIMO PERIODO	-3,08766\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
PAGAR PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-1\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = -1,04081\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_u = 0,9545$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_u = 66\$$ en POSICIÓN SHORT	$\alpha_u \times (F_u - F_{uu}) = -6,2997$
PAGAR PRESTAMO HECHO EN $t = 0,25$	$-3,08766\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = -3,15\$$
RESULTADO DEL CALL	12,6\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	2,10949\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
PAGAR PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-1\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = -1,04081\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_u = 0,9545$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_u = 66\$$ en POSICIÓN SHORT	$\alpha_u \times (F_u - F_{ud}) = 6,2997\$$
PAGAR PRESTAMO HECHO EN $t = 0,25$	$-3,08766\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = -3,15\$$
RESULTADO DEL CALL	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	2,10889\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP****HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0,25$**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
PAGAR PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-1\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = -1,04081\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_d = 0$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_d = 54\$$ en POSICIÓN SHORT	0\$
DEPOSITO HECHO EN $t = 0,25$	$3,08766\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = 3,15\$$
RESULTADO DEL CALL	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	2,10919\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
PAGAR PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-1\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = -1,04081\$$
VENDER la cantidad de $\alpha_d = 0$ CONTRATO A FUTURO con precio de ejercicio $F_d = 54\$$ en POSICIÓN SHORT	0\$
DEPOSITO HECHO EN $t = 0,25$	$3,08766\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = 3,15\$$
RESULTADO DEL CALL	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	2,10919\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 2,1092\$

GANANCIA POR ARBITAJE EN T

$$[c - c^M] \times e^{\delta \times \Delta t}$$

Tenemos que

$$3,0265\$ - 1\$ = 2,0265\$$$

$$2,0265\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = 2,1092\$$$

PUT SOBRE FUTUROS EUROPEO

ENUNCIADO

DATOS DEL FUTURO

Las condiciones del FUTURO son las mismas que utilizamos para el CALL

DATOS DEL PUT SOBRE FUTUROS

PRECIO DE EJERCICIO

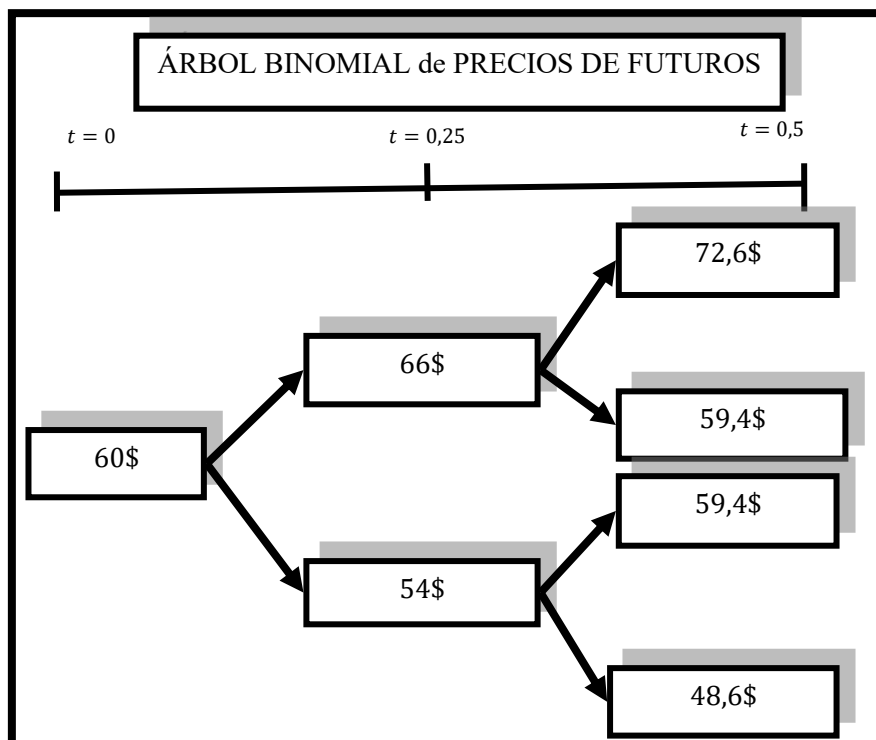
$$K = 60\$$$

FECHA DE VENCIMIENTO

6 MESES

ÁRBOL BINOMIAL DE DOS PASOS

CONTRATO A FUTURO SUBYACENTE



VALUACIÓN DE OPCIÓN DE VENTA PUT SOBRE FUTUROS

En el último payoffs del árbol binomial del PUT se utiliza la fórmula

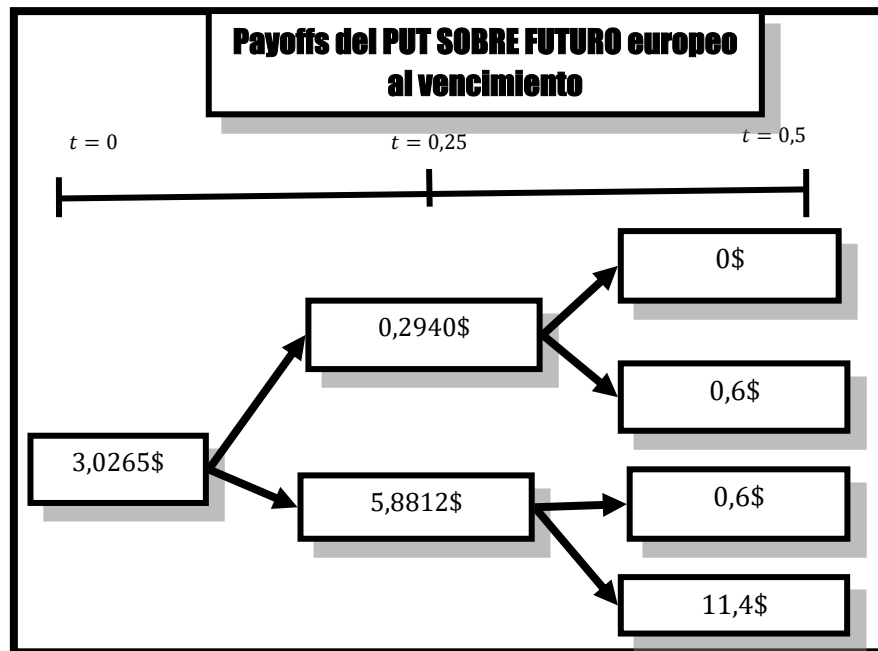
$$\max[K - F_T; 0]$$

Luego

$$p_u = \frac{0\$ \cdot 0,5 + 0,6\$ \cdot 0,5}{e^{0,08 \times 0,25}} = 0,2940\$$$

$$p_d = \frac{0,6\$ \cdot 0,5 + 11,4\$ \cdot 0,5}{e^{0,08 \times 0,25}} = 5,8812\$$$

$$p = \frac{0,2940\$ \cdot 0,5 + 5,8812\$ \cdot 0,5}{e^{0,08 \times 0,25}} = 3,0265\$$$



CALCULO DEL ARBOL DE DELTAS

$$\delta_0 = \frac{p_u - p_d}{F_u - F_d} = \frac{0,2940\$ - 5,8812\$}{66\$ - 54\$} = -0,4656$$

$$\delta_u = \frac{p_{uu} - p_{ud}}{F_{uu} - F_{ud}} = \frac{0 - 0,6\$}{72,6\$ - 59,4\$} = -0,04545$$

$$\delta_d = \frac{p_{du} - p_{dd}}{F_{du} - F_{dd}} = \frac{0,6\$ - 11,4\$}{59,4\$ - 48,6\$} = -1$$

ESTRATEGIAS DE ARBITRAJE EN UNA OPCIÓN DE VENTA EUROPEA PUT SOBRE FUTUROS

Seguiremos con el mismo ejemplo con el cual venimos trabajando, donde cuando valuamos el PUT llegamos a que la prima era igual a

$$p = 3,0265\$$$

Pero qué ocurriría si la prima de mercado p^M es distinta, en este caso un arbitrajista podría obtener una ganancia segura y sin colocar capital alguno.

EQUIVALENCIA IMPORTANTE EN PUT SOBRE FUTUROS EUROPEO

POSICIÓN EN CONTRATOS A FUTUROS	ES EQUIVALENTE A
POSICIÓN LONG en $\delta < 0$ CONTRATOS A FUTUROS con PRECIO DE EJERCICIO F	POSICIÓN SHORT en $-\delta$ CONTRATOS A FUTUROS con PRECIO DE EJERCICIO F
POSICIÓN SHORT en $\delta < 0$ CONTRATOS A FUTUROS con PRECIO DE EJERCICIO F	POSICIÓN LONG en $-\delta$ CONTRATOS A FUTUROS con PRECIO DE EJERCICIO F

Es este caso utilizaremos las equivalencias

SI LA PRIMA DE MERCADO $p^M > p$

Tenemos que

$$p^M = 10\$$$

Como el PUT está sobrevaluado, es decir, vale más de lo que debería valer, tomamos una posición SHORT en el mismo

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN SHORT EN UN PUT EUROPEO SOBRE FUTUROS

CARTERA 2

POSICIÓN LONG δ_0 EN FUTUROS Y HAREMOS UN DEPOSITO

Es decir que tomamos una posición SHORT en la cartera 1 y posición LONG en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
Hacer un DEPOSITO A COBRAR en $t = 0,5$	-10\$
Tomar una POSICIÓN SHORT en la cantidad de $-\delta_0 = 0,4656$ CONTRATOS DE FUTUROS al precio de ejercicio $F_0 = 60\$$	0\$
Tomar una posición SHORT en un PUT	10\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP

DEBEMOS TENER EN CARTERA

Hay que tener en cartera $-\delta_u = 0,04545$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $-\delta_0 = 0,4656$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $-\delta_0 = 0,4656$ con precio de ejercicio $F_0 = 60\$$ en POSICIÓN SHORT.	$-\delta_0 \times (F_0 - F_u) = -2,7936\$$
Tomar una POSICIÓN SHORT en la cantidad de $-\delta_u = 0,04545$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_u = 66\$$	0\$
PRESTAMO EN EL PROXIMO PERIODO	2,7936\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN**DEBEMOS TENER EN CARTERA**

Hay que tener en cartera $-\delta_d = 1$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $-\delta_0 = 0,4656$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN SHORT

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $-\delta_0 = 0,4656$ con precio de ejercicio $F_0 = 60\$$ en POSICIÓN SHORT.	$-\delta_0 \times (F_0 - F_d) = 2,7936\$$
Tomar una POSICIÓN SHORT en la cantidad de $-\delta_d = 1$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_d = 54\$$	0\$
DEPOSITO	-2,7936\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$ **SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$** **SI OCURRE ESCENARIO UP-UP**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
COBRAR DEPOSITO	$10\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = 10,4081\$$
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $-\delta_u = 0,04545$ con precio de ejercicio $F_u = 66\$$ en POSICIÓN SHORT.	$-\delta_u \times (F_u - F_{uu}) = -0,29997\$$
PRESTAMO	$-2,7936\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = -2,85\$$
RESULTADO DEL PUT	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	7,25813\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
COBRAR DEPOSITO	$10\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = 10,4081\$$
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $-\delta_u = 0,04545$ con precio de ejercicio $F_u = 66\$$ en POSICIÓN SHORT.	$-\delta_u \times (F_u - F_{ud}) = 0,29997\$$
PRESTAMO	$-2,7936\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = -2,85\$$
RESULTADO DEL PUT	$-0,6\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	7,25807\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$ **SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP****HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0,25$**

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
COBRAR DEPOSITO	$10\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = 10,4081\$$
VENDER en la cantidad de $-\delta_d = 1$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_d = 54\$$ en POSICIÓN SHORT	$-\delta_d \times (F_u - F_{du}) = -5,4\$$
DEPOSITO	$2,7936\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = 2,85\$$
RESULTADO DEL PUT	$-0,6\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	7,2581\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
COBRAR DEPOSITO	$10\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = 10,4081\$$
VENDER en la cantidad de $-\delta_d = 1$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_d = 54\$$ en POSICIÓN SHORT	$-\delta_d \times (F_u - F_{dd}) = 5,4\$$
DEPOSITO	$2,7936\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = 2,85\$$
RESULTADO DEL PUT	$-11,4\$$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	7,2581\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 7,258094\$

GANANCIA POR ARBITAJE EN T

$$[p^M - p] \times e^{\delta \times T}$$

Tenemos que

$$10\$ - 3,0265\$ = 6,9735\$$$

$$6,9735\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = 7,258094\$$$

SI LA PRIMA DE MERCADO $p^M < p$

Tenemos que

$$p^M = 1\$$$

Como el PUT está subvaluado, es decir, vale menos de lo que debería valer, tomamos una posición LONG en el mismo

Tomaremos posiciones opuestas en dos carteras compuestas en el momento $t = 0$ de la siguiente manera

CARTERA 1

POSICIÓN LONG EN UN PUT EUROPEO SOBRE FUTUROS

CARTERA 2

POSICIÓN SHORT EN δ_0 FUTUROS Y HAREMOS UN PRESTAMO

Es decir que tomamos una posición LONG en la cartera 1 y posición SHORT en la cartera 2.

EN EL MOMENTO $t = 0$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0$	
PRESTAMO A PAGAR en $t = 0,5$	1\$
Tomar una POSICIÓN LONG en la cantidad de $-\delta_0 = 0,4656$ CONTRATOS DE FUTUROS al precio de ejercicio $F_0 = 60\$$	0\$
Tomar una posición LONG en un PUT	-1\$
BENEFICIO EN $t = 0$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP

DEBEMOS TENER EN CARTERA

Hay que tener en cartera $-\delta_u = 0,04545$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $-\delta_0 = 0,4656$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP	
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $-\delta_0 = 0,4656$ con precio de ejercicio $F_0 = 60\$$ en POSICIÓN LONG.	$-\delta_0 \times (F_u - F_0) = 2,7936\$$

Tomar una POSICIÓN LONG en la cantidad de $-\delta_u = 0,04545$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_u = 66\$$	0\$
DEPOSITO EN EL PROXIMO PERIODO	-2,7936\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN

DEBEMOS TENER EN CARTERA

Hay que tener en cartera $-\delta_d = 1$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0$

Se tiene en cartera $-\delta_0 = 0,4656$ CONTRATOS A FUTUROS EN POSICIÓN LONG

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,25$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN	
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $-\delta_0 = 0,4656$ con precio de ejercicio $F_0 = 60\$$ en POSICIÓN LONG.	$-\delta_0 \times (F_d - F_0) = -2,7936\$$
Tomar una POSICIÓN LONG en la cantidad de $-\delta_d = 1$ CONTRATOS A FUTUROS al precio de ejercicio $F_d = 54\$$	0\$
PRESTAMO	2,7936\$
BENEFICIO EN $t = 0,25$	0\$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

SI OCURRE ESCENARIO UP EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO UP-UP

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-UP	
PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-1\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = -1,04081\$$
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $-\delta_u = 0,04545$ con precio de ejercicio $F_u = 66\$$ en POSICIÓN LONG.	$-\delta_u \times (F_{uu} - F_u) = 0,29997\$$
DEPOSITO	$2,7936\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = 2,85\$$
RESULTADO DEL PUT	0\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	2,10916\$

SI OCURRE ESCENARIO UP-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO UP-DOWN	
PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-1\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = -1,04081\$$
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $-\delta_u = 0,04545$ con precio de ejercicio $F_u = 66\$$ en POSICIÓN LONG.	$-\delta_u \times (F_{ud} - F_u) = -0,29997\$$
DEPOSITO	$2,7936\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = 2,85\$$

RESULTADO DEL PUT	0,6\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	2,10922\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN EN $t = 0,25$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-UP

HAY EN CARTERA QUE SE TRAE DE $t = 0,25$

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-UP	
PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-1\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = -1,04081\$$
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $-\delta_d = 1$ con precio de ejercicio $F_d = 54\$$ en POSICIÓN LONG.	$-\delta_d \times (F_{ud} - F_d) = 5,4\$$
PRESTAMO	$-2,7936\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = -2,85\$$
RESULTADO DEL PUT	0,6\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	2,10919\$

SI OCURRE ESCENARIO DOWN-DOWN

LAS ACCIONES A SEGUIR EN $t = 0,5$ SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN-DOWN	
PRESTAMO HECHO EN $t = 0$	$-1\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = -1,04081\$$
VENDER la cantidad de CONTRATOS A FUTUROS $-\delta_d = 1$ con precio de ejercicio $F_d = 54\$$ en POSICIÓN LONG.	$-\delta_d \times (F_{dd} - F_d) = -5,4\$$
PRESTAMO	$-2,7936\$ \times e^{0,08 \times 0,25} = -2,85\$$
RESULTADO DEL PUT	11,4\$
BENEFICIO EN $t = 0,5$	2,10919\$

Como vemos la ganancia por arbitraje es igual a 2,10920\$

GANANCIA POR ARBITAJE EN T

$$[p - p^M] \times e^{\delta \times T}$$

Tenemos que

$$3,0265\$ - 1\$ = 2,0265\$$$

$$2,0265\$ \times e^{0,08 \times 0,5} = 2,10920\$$$

Capitulo 6: VALUACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS

DEFINICIÓN DE UNA OPCIÓN AMERICANA

Opción que se ejecuta en cualquier momento de la vida de la opción.

DEFINICIÓN DE VALOR INTRISECO

VALOR INTRISECO DE OPCIÓN DE COMPRA

$$\max[\text{PRECIO DEL ACTIVO SUBYACENTE EN EL VENCIMIENTO } T - \text{STRIKE}; 0]$$

VALOR INTRISECO DE OPCIÓN DE VENTA

$$\max[\text{STRIKE} - \text{PRECIO DEL ACTIVO SUBYACENTE EN EL VENCIMIENTO } T; 0]$$

OPCIÓN DE VENTA AMERICANA PUT

Para comprender el funcionamiento de un PUT AMERICANO vamos a realizar el EJERCICIO 16.6 que propone el libro de “INTRODUCCIÓN A LOS MERCADOS DE FUTUROS Y OPCIONES” 6ta edición en castellano.

ENUNCIADO

Una opción de venta americana para VENDER un FRANCO SUIZO por DÓLARES tiene un precio de ejercicio de 0,80\$ y un tiempo al vencimiento de un año. La volatilidad del FRANCO SUIZO es de 10%, la tasa de interés en dólares es de 6%, la tasa de interés en francos suizos es de 3% y el tipo de cambio vigente es de 0,81. Use un árbol con tres intervalos para valorar la opción. Calcule la delta de la opción con su árbol.

RESOLUCIÓN

TASA DE INTERÉS LOCAL

Es la tasa de interés en dólares $r = 0,06$

TASA DE INTERÉS INTERNACIONAL

Es la tasa de interés en dólares $r_f = 0,06$

TIPO DE CAMBIO

El tipo de cambio es de $TC_0 = 0,81\$$, lo cual implica que cada FRANCO SUIZO cuesta 0,81 DÓLARES.

VOLATILIDAD DEL FRANCO SUIZO

$$\sigma = 0,1$$

HORIZONTE DE TIEMPO

El tiempo al vencimiento es de un año.

Tenemos la formula

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

Donde N es la cantidad de pasos que posee el árbol.

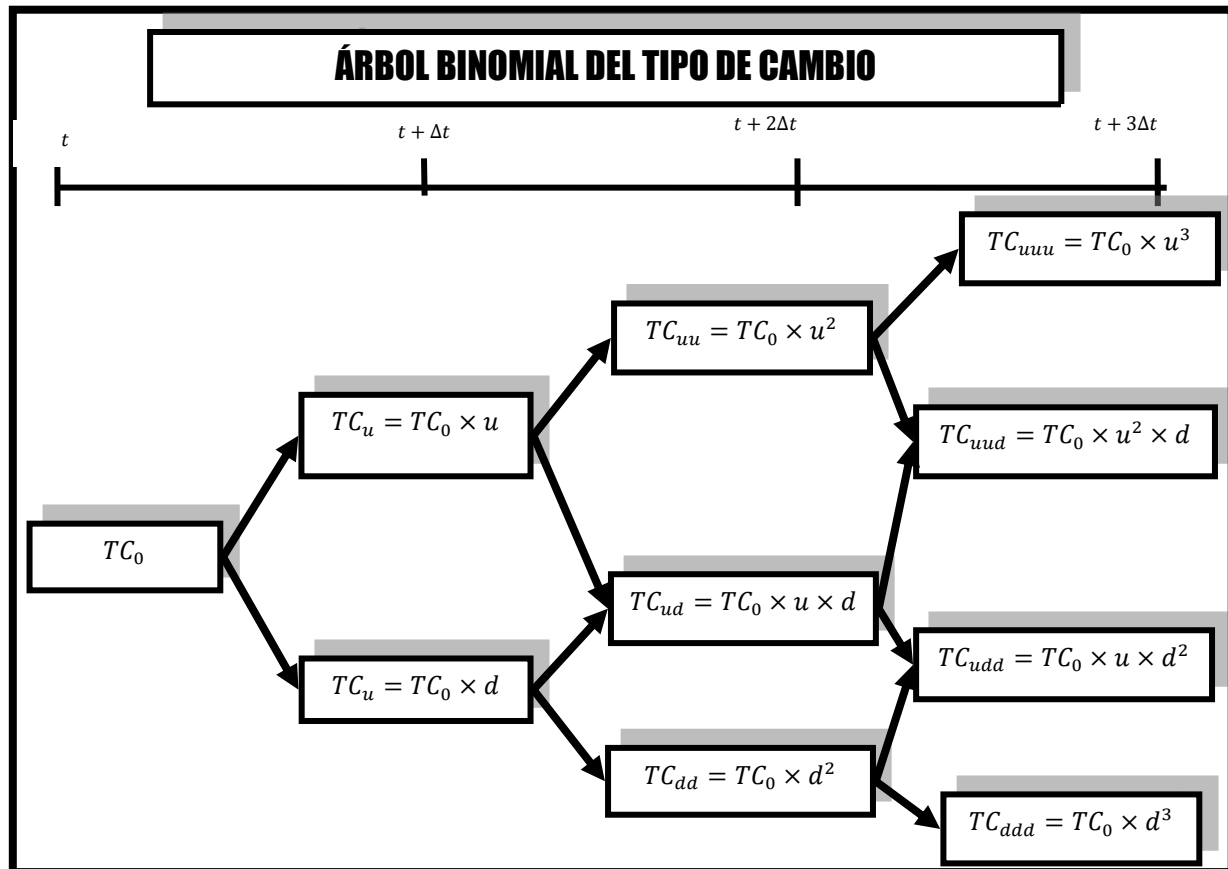
$$\Delta t = \frac{1}{3}$$

El cual esta expresado en años.

Buscamos cubrirnos de una posible CAIDA del TIPO DE CAMBIO y por lo tanto del precio del FRANCO SUIZO, para lo cual tomamos una posición LONG en un PUT AMERICANO.

ÁRBOL BINOMIAL DE TIPO DE CAMBIO

Como sabemos debemos construir el árbol del precio del activo subyacente, el precio del FRANCO SUIZO es el TIPO DE CAMBIO en este tipo de operaciones.



RENDIMIENTO CONTINUO EN FRANCO SUIZO

Si se realiza un depósito de un FRANCO SUIZO en el extranjero se obtendría la tasa de interés en FRANCOS SUIZOS que es $r_f = 0,03$, por lo tanto, esta es la tasa de rendimiento del FRANCO SUIZO,

En definitiva nuestro activo subyacente que es el FRANCO SUIZO proporciona un RENDIMIENTO CONTINUO.

RENDIMIENTO EN UN MUNDO NEUTRAL AL RIESGO

Hay que realizar una distinción entre:

3. Ganancia de capital
4. Un rendimiento continuo que proporciona un activo en particular.

En el caso del primero se hace referencia a las ganancias de capital que ocurren como consecuencia de los movimiento en los valores de los activos, estos movimiento son desconocidos a priori y por lo tanto inciertos. Como ejemplo pensemos en una casa que fue construida en una zona en donde no había subtes, pasado un tiempo se construye una estación de subte delante de la casa, lo cual genera que la misma aumente de valor. Otro ejemplo son las acciones que como consecuencias de las expectativas sobre la evolución futura de la economía del país y la especulación financiera sus precios resultan impactados.

En el caso del segundo un rendimiento continuo pensemos en los rendimientos que proporciona un activo de manera continua, como pueden ser las acciones que otorgan dividendos continuos.

La suma de ambos da como resultado el RENDIMIENTO TOTAL, el cual en un mundo NEUTRAL AL RIESGO es igual a r . Por lo tanto, las ganancias de capital deben proporcionar un rendimiento $r - q$

PAGO ESPERADO DEL FRANCO SUIZO

El interés del modelo recae en las ganancias de capital únicamente porque estamos modelizando los movimientos en el valor del activo subyacente. Por lo tanto si el tipo de cambio se inicia en TC_0 , su valor esperado después de un intervalo de tiempo Δt debe ser igual a $TC_0 \cdot e^{(r-r_f) \times \Delta t}$.

$$E_{RIESGO NEUTRO}[TC_t] = TC_0 \cdot e^{(r-r_f) \times \Delta t}.$$

Por lo tanto

$$TC_u \cdot p + TC_d \cdot (1 - p) = TC_0 \times e^{(r-r_f) \times \Delta t}$$

Donde si sube la cotización

$$TC_{UP} = TC_0 \cdot u$$

Si baja la cotización

$$TC_{DOWN} = TC_0 \cdot d$$

$$TC_0 \cdot u \cdot p + TC_0 \cdot d \cdot (1 - p) = TC_0 \cdot e^{(r-r_f) \times \Delta t}$$

$$u \cdot p + d \cdot (1 - p) = e^{(r-r_f) \times \Delta t}$$

$$u \cdot p + d - d \cdot p = e^{(r-r_f) \times \Delta t}$$

$$p(u - d) + d = e^{(r-r_f) \times \Delta t}$$

$$p = \frac{e^{(r-r_f) \times \Delta t} - d}{u - d}$$

FACTORES

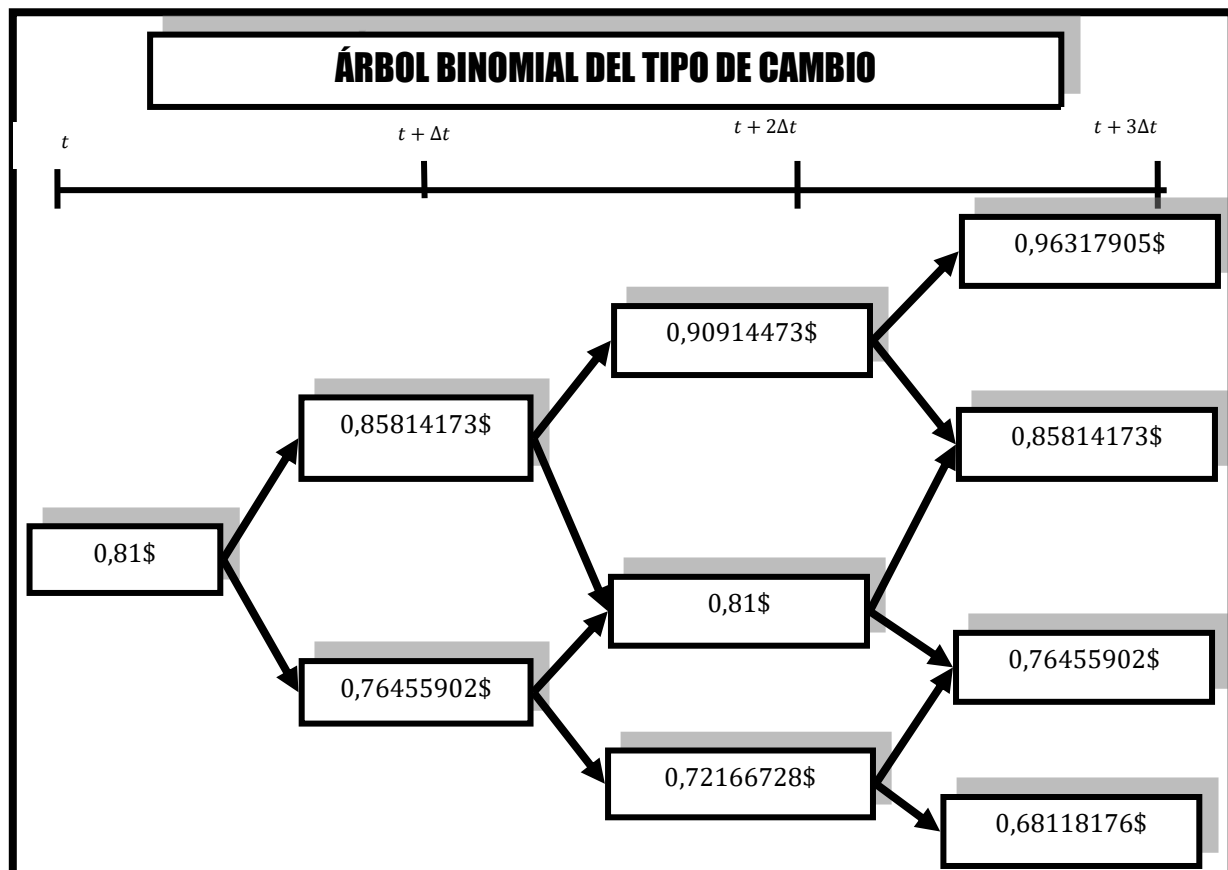
$$u = e^{\sigma \times \sqrt{\Delta t}} = e^{0,1 \times \sqrt{\frac{1}{3}}} = 1,059434237$$

$$d = \frac{1}{u} = 0,943900022$$

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$p = \frac{e^{(r-q) \times \Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{(0,06-0,03) \times \frac{1}{3}} - 0,943900022}{1,059434237 - 0,943900022} = 0,57255891$$

$$\overline{1-p} = 0,42744109$$



MÉTODO DE VALUACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS

Al final del árbol, el valor de una opción es el VALOR INTRÍSECO. En NODOS ANTERIORES del árbol el valor de una opción americana debe calcularse como el MONTO MAYOR entre

1. El valor que tiene si se EJERCE inmediatamente
2. El valor que tiene si se mantiene durante un periodo adicional con una duración Δt .

Si se EJERCE inmediatamente el valor de la opción es su VALOR INTRÍSECO. Si se mantiene durante un periodo adicional con una duración Δt , el valor de la opción es el valor esperado al final del periodo Δt descontado a la tasa de interés libre de riesgo. Continuamos resolviendo el ejercicio para exponer el funcionamiento del método con más claridad.

PAYOFFS DE ESPERAR UN PERIODO ADICIONAL Δt PARA EJERCER

ÁRBOL BINOMIAL DE UN PUT EUROPEO

Como sabemos en un PUT EUROPEO se puede EJERCER o NO EJERCER únicamente en la fecha de vencimiento T.

AL MOMENTO DEL VENCIMIENTO

$$\max[K - TC_T, 0]$$

DEMÁS NODOS

$$E_{RIESGO\ NEUTRO}(P_t) \times e^{r \times \Delta t}$$

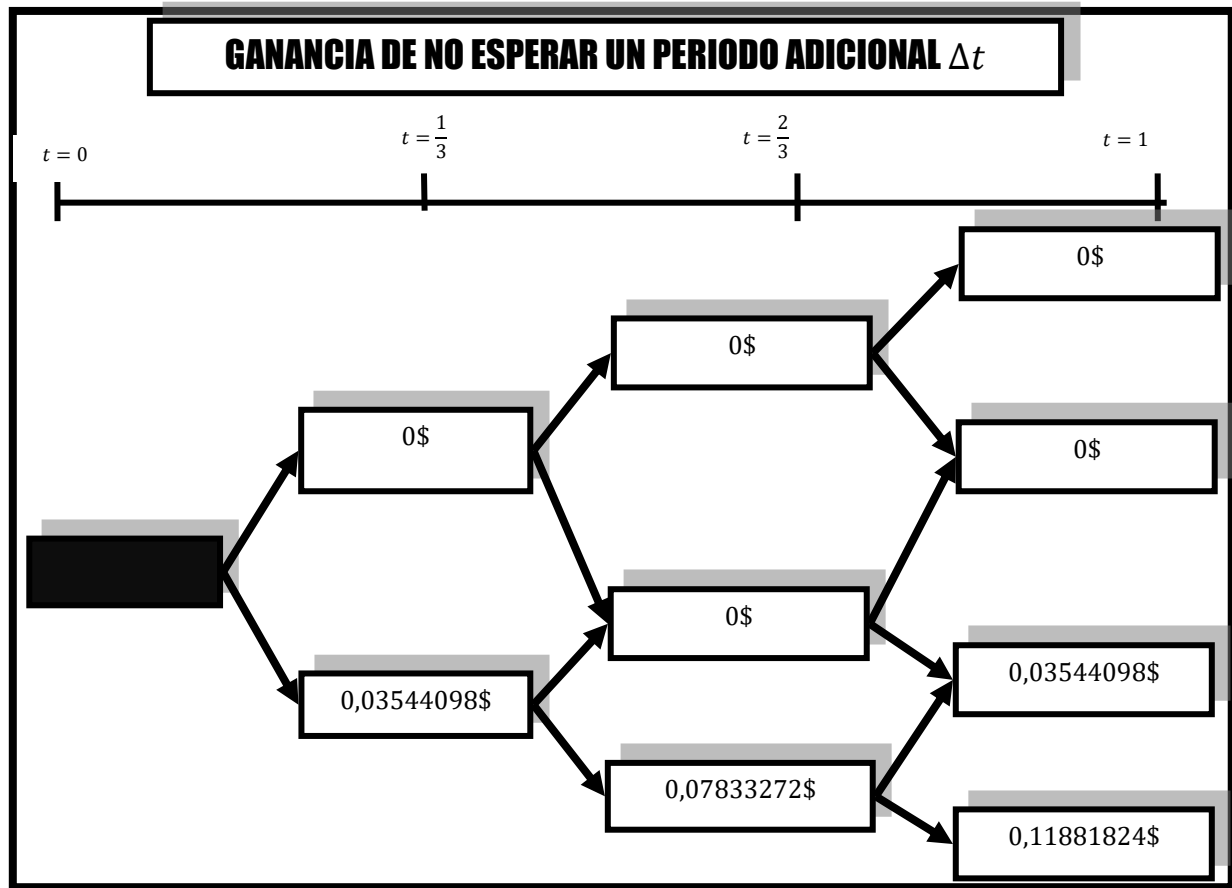
Es importante notar que la actualización se realiza a la TASA LIBRE DE RIESGO LOCAL r



Construimos un árbol en donde es posible EJERCER en cada momento del tiempo y en cada escenario

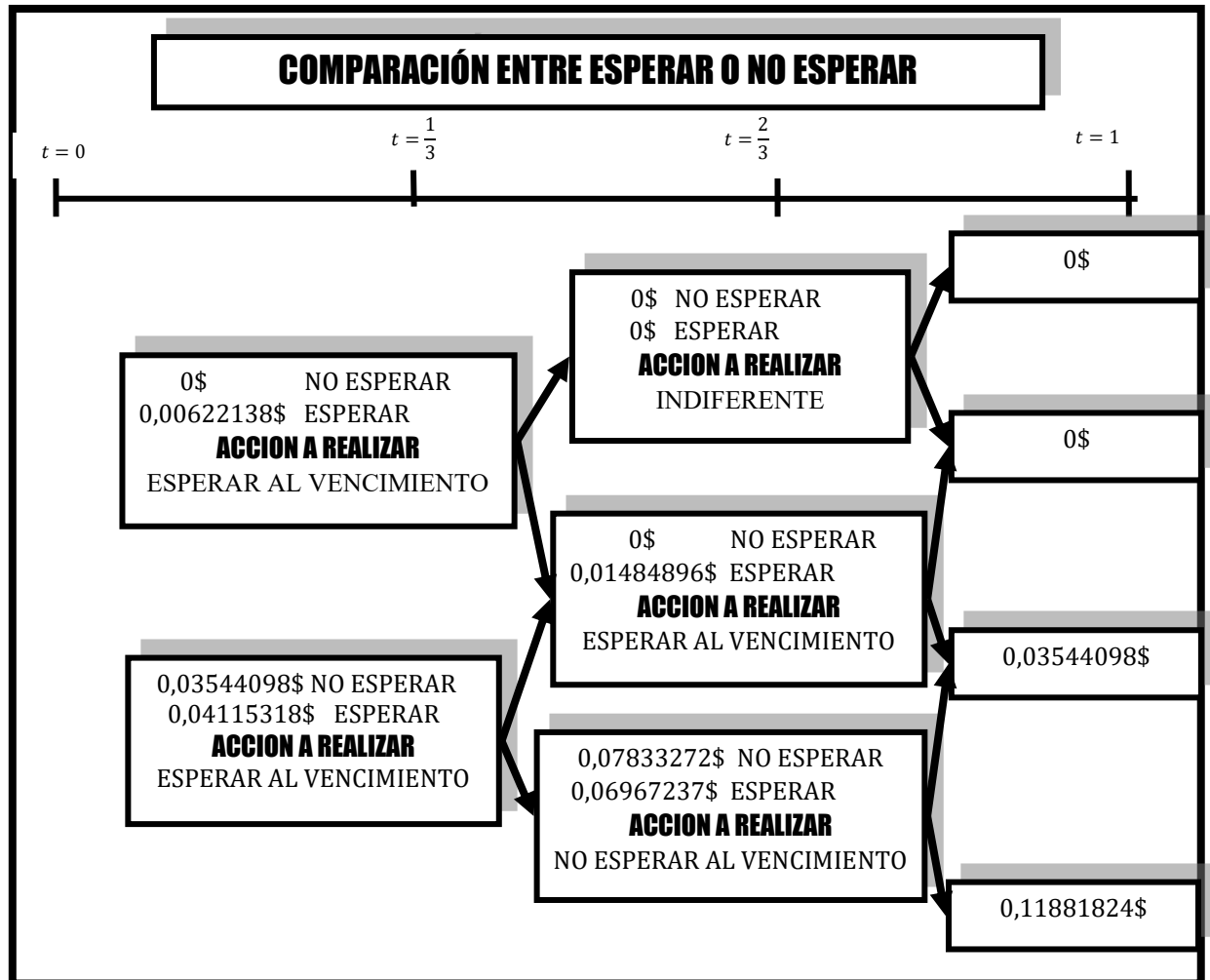
EN CADA NODO SE UTILIZA LA FORMULA

$$\max[K - TC_T, 0]$$



COMPARACIÓN

En cada momento del tiempo y en cada escenario se realiza la comparación ENTRE la ganancia de ESPERAR vs la ganancia de NO ESPERAR Donde ESPERAR es sinónimo de NO EJERCER y NO ESPERAR de EJECER.



CALCULO DE LA PRIMA DEL PUT AMERICANO

Una vez hemos determinado cual acción debemos llevar a cabo en el momento $t = \frac{1}{3}$ utilizamos las ganancias para obtener la prima del PUT AMERICANO

En nuestro caso en ambos escenarios elegimos ESPERAR UN PERIODO ADICIONAL Δt por lo cual

GANANCIA SI OCURRE EL ESCENARIO UP

$$P_u = 0,00622138\$$$

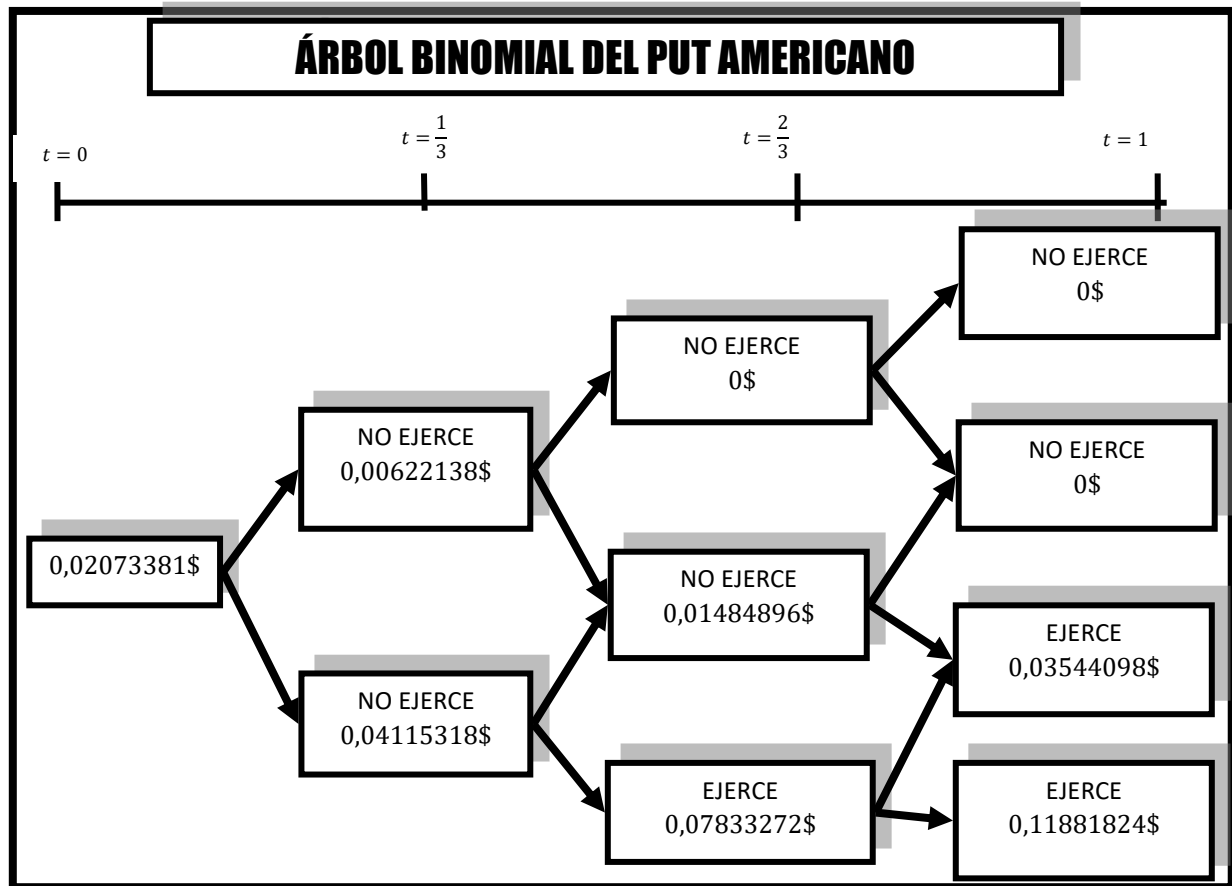
GANANCIA SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN

$$P_d = 0,04115318\$$$

PRIMA

$$P = \frac{P_u \times p + \overline{1-p} \times P_d}{e^{r \times \Delta t}} = \frac{0,00622138\$ \times (0,57255891) + (0,42744109) \times 0,04115318\$}{e^{0,06 \times \frac{1}{3}}}$$

$$P = 0,02073381\$$$



CALCULO DE ÁRBOL DE DELTAS

En base al último árbol calculamos los deltas

$$\delta_0 = \frac{P_u - P_d}{TC_u - TC_d} = \frac{0,00622138\$ - 0,04115318\$}{0,85814173\$ - 0,76455902\$} = -0,373271943$$

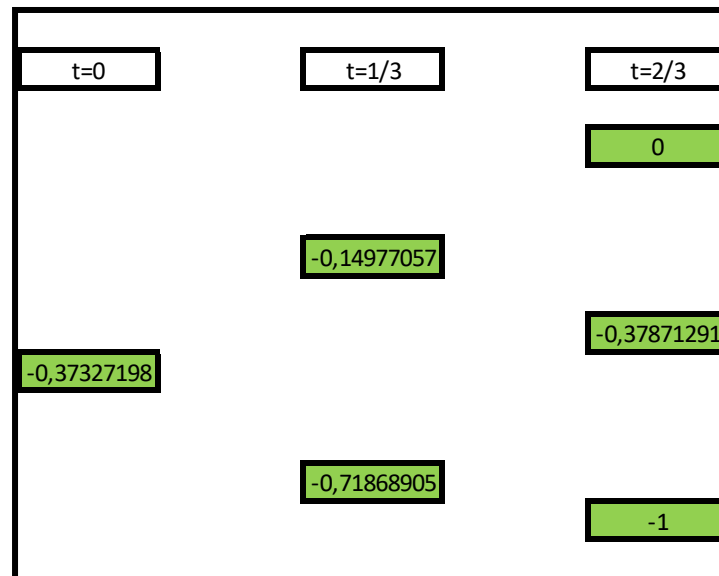
$$\delta_u = \frac{P_{uu} - P_{ud}}{TC_{uu} - TC_{ud}} = \frac{0\$ - 0,01484896\$}{0,90914473\$ - 0,81\$} = -0,149770542$$

$$\delta_u = \frac{P_{du} - P_{ud}}{TC_{du} - TC_{ud}} = \frac{0,01484896\$ - 0,07833272\$}{0,81\$ - 0,72166728\$} = -0,718689065$$

$$\delta_{uu} = \frac{P_{uuu} - P_{uud}}{TC_{uuu} - TC_{uud}} = \frac{0\$ - 0\$}{0,96317905\$ - 0,85814173\$} = 0$$

$$\delta_{ud} = \frac{P_{udu} - P_{udd}}{TC_{udu} - TC_{udd}} = \frac{0\$ - 0,03544098\$}{0,85814173\$ - 0,76455902\$} = -0,378712905$$

$$\delta_{dd} = \frac{P_{ddu} - P_{ddu}}{TC_{ddu} - TC_{ddu}} = \frac{0,03544098\$ - 0,11881824\$}{0,76455902\$ - 0,68118176\$} = -1$$



OPCIÓN DE COMPRA AMERICANA CALL

ENUNCIADO

Utilizaremos los datos del ejercicio que utilizamos para valorar el PUT AMERICANO, pero en este caso con la salvedad de que vamos a COMPRAR un FRANCO SUIZO para lo cual se cuenta con una opción de compra americana con precio de ejercicio 0,80\$ y vencimiento en un año.

RESOLUCIÓN

Buscamos cubrirnos de una posible SUBA del TIPO DE CAMBIO y por lo tanto del precio del FRANCO SUIZO, para lo cual tomamos una posición LONG en un CALL AMERICANO.

PAYOFFS DE ESPERAR UN PERIODO ADICIONAL Δt PARA EJERCER

ÁRBOL BINOMIAL DE UN CALL EUROPEO

Como sabemos en un CALL EUROPEO se puede EJERCER o NO EJERCER únicamente en la fecha de vencimiento T.

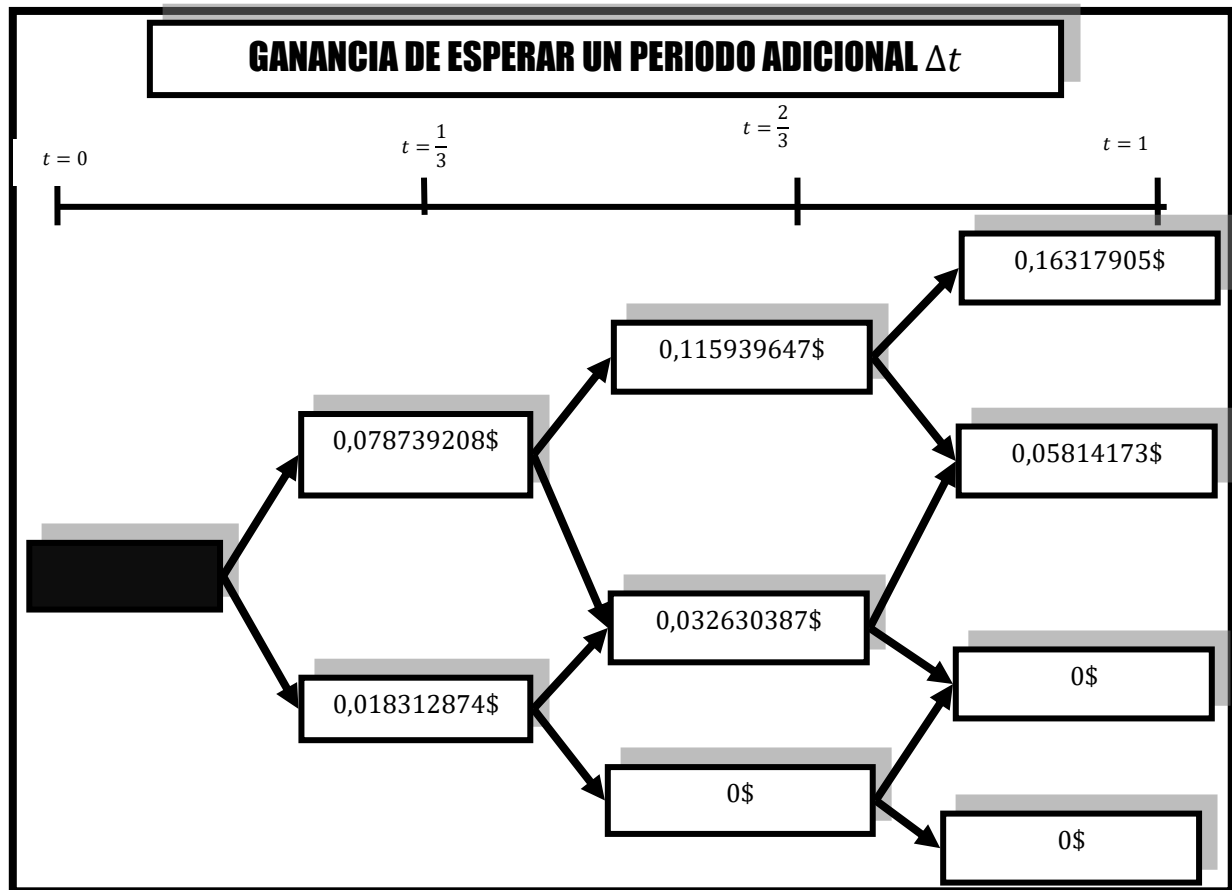
AL MOMENTO DEL VENCIMIENTO

$$\max[TC_T - K, 0]$$

DEMÁS NODOS

$$E_{RIESGO\ NEUTRO}(C_t) \times e^{r \times \Delta t}$$

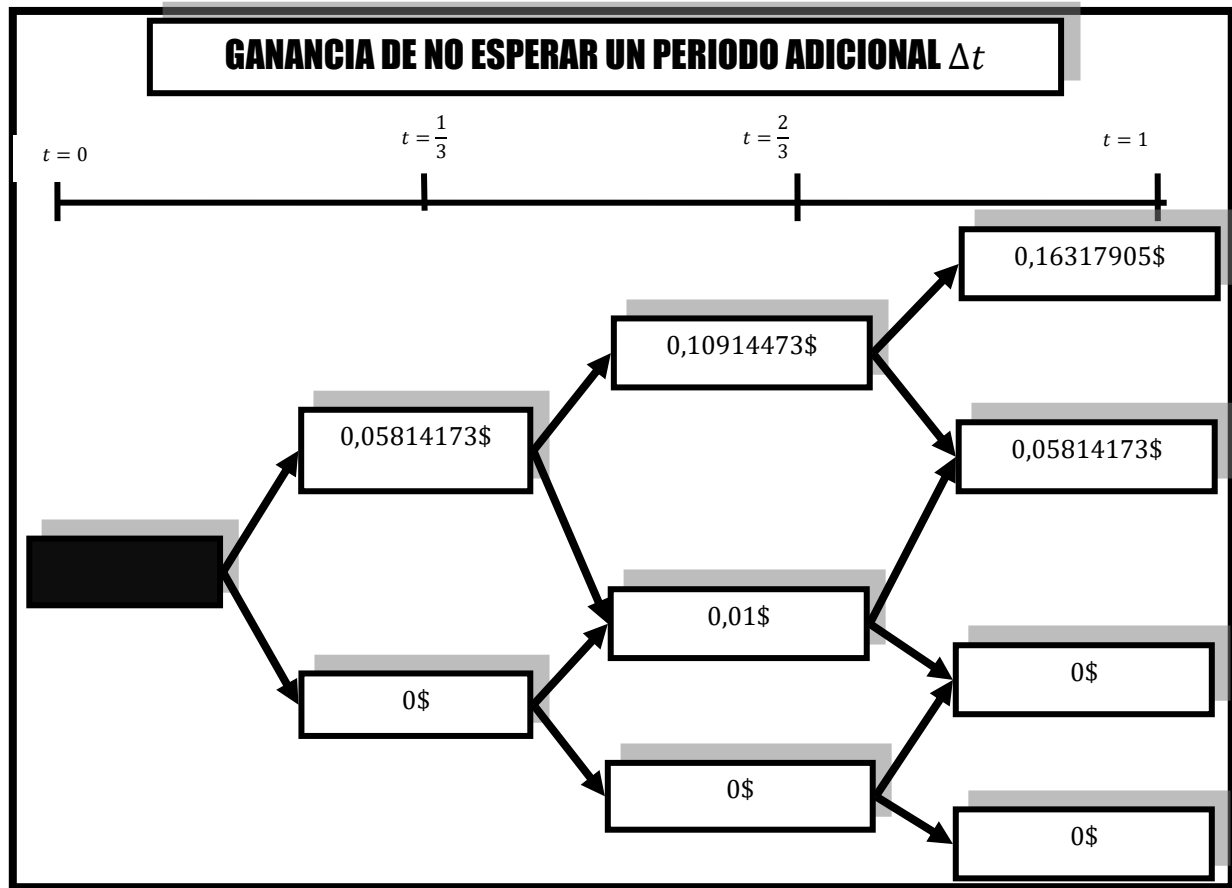
Es importante notar que la actualización se realiza a la TASA LIBRE DE RIESGO LOCAL r



Construimos un árbol en donde es posible EJERCER en cada momento del tiempo y en cada escenario

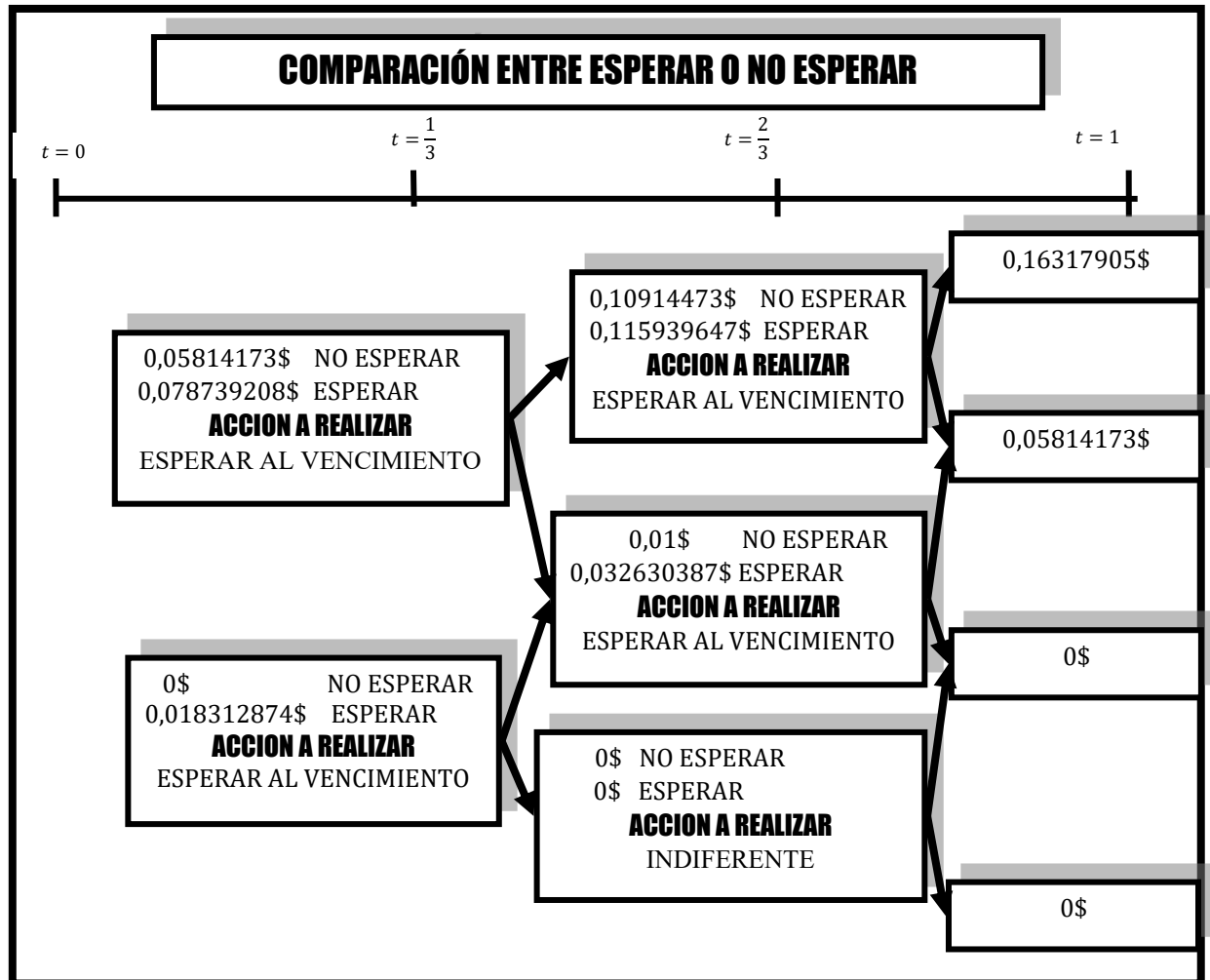
EN CADA NODO SE UTILIZA LA FORMULA

$$\text{máx}[TC_T - K, 0]$$



COMPARACIÓN

En cada momento del tiempo y en cada escenario se realiza la comparación ENTRE la ganancia de ESPERAR vs la ganancia de NO ESPERAR Donde ESPERAR es sinónimo de NO EJERCER y NO ESPERAR de EJECER.



CALCULO DE LA PRIMA DEL CALL AMERICANO

Una vez hemos determinado cual acción debemos llevar a cabo en el momento $t = \frac{1}{3}$ utilizamos las ganancias para obtener la prima del CALL AMERICANO

En nuestro caso en ambos escenarios elegimos ESPERAR UN PERIODO ADICIONAL Δt por lo cual

GANANCIA SI OCURRE EL ESCENARIO UP

$$C_u = 0,078739208\$$$

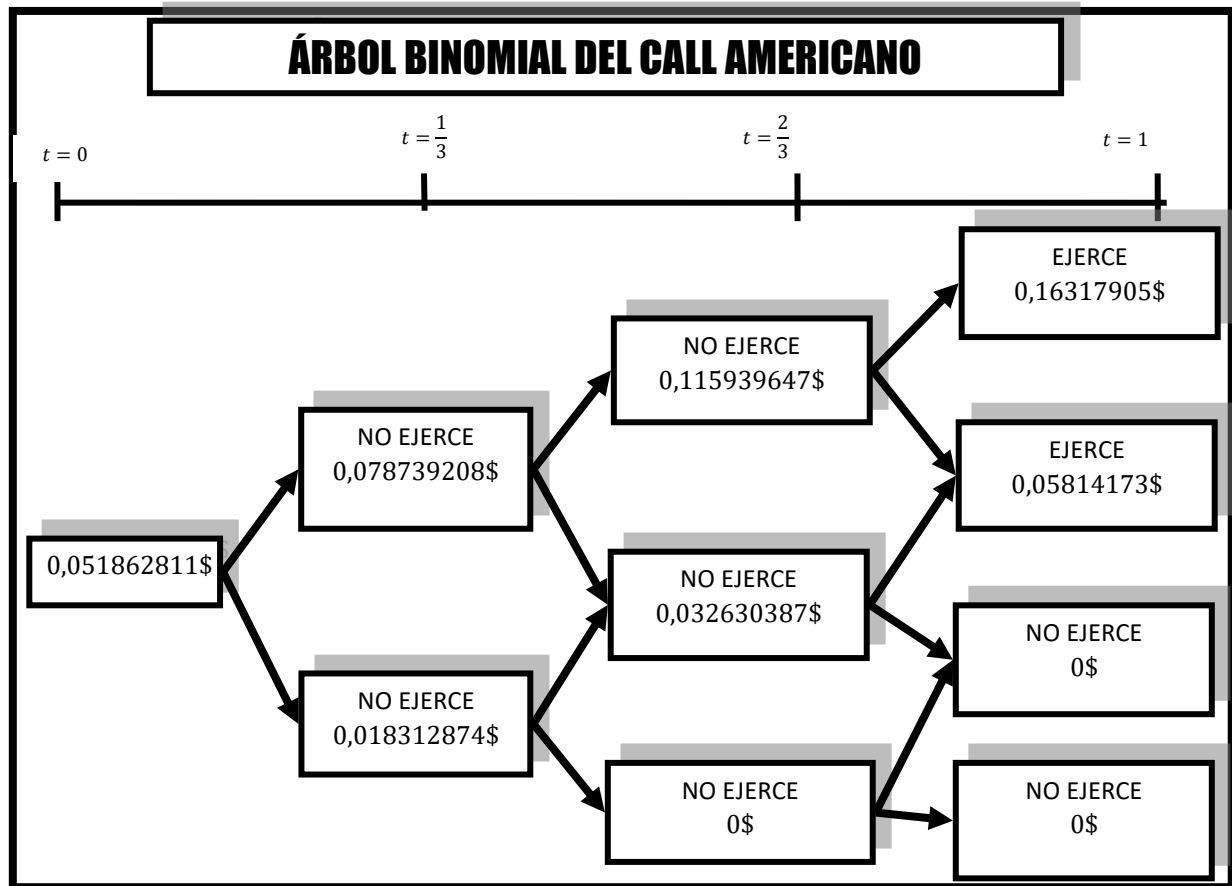
GANANCIA SI OCURRE EL ESCENARIO DOWN

$$C_d = 0,018312874\$$$

PRIMA

$$C = \frac{C_u \times p + \overline{1-p} \times C_d}{e^{r \times \Delta t}} = \frac{0,078739208\$ \times (0,57255891) + (0,42744109) \times 0,018312874\$}{e^{0,06 \times \frac{1}{3}}}$$

$$C = 0,051862811\$$$



CALCULO DE ÁRBOL DE DELTAS

En base al último árbol calculamos los deltas

$$\Delta_0 = \frac{C_u - C_d}{TC_u - TC_d} = \frac{0,078739208\$ - 0,01831287\$}{0,85814173\$ - 0,76455902\$} = 0,645699809$$

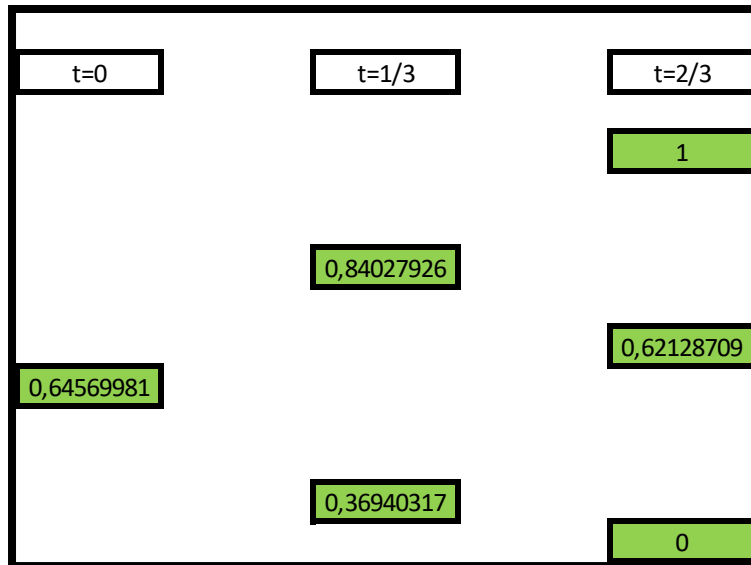
$$\Delta_u = \frac{C_{uu} - C_{ud}}{TC_{uu} - TC_{ud}} = \frac{0,115939647\$ - 0,032630387\$}{0,90914473\$ - 0,81\$} = 0,840279256$$

$$\Delta_u = \frac{C_{du} - C_{dd}}{TC_{du} - TC_{dd}} = \frac{0,032630387\$ - 0\$}{0,81\$ - 0,72166728\$} = 0,369403172$$

$$\Delta_{uu} = \frac{C_{uuu} - C_{uud}}{TC_{uuu} - TC_{uud}} = \frac{0,16317905\$ - 0,05814173\$}{0,96317905\$ - 0,85814173\$} = 1$$

$$\Delta_{ud} = \frac{C_{udu} - C_{udd}}{TC_{udu} - TC_{udd}} = \frac{0,05814173\$}{0,85814173\$ - 0,76455902\$} = 0,621287094$$

$$\Delta_{dd} = \frac{C_{ddu} - C_{ddu}}{TC_{ddu} - TC_{ddu}} = \frac{0\$ - 0\$}{0,76455902\$ - 0,68118176\$} = 0$$



EJEMPLO 1

OPCIONES AMERICANAS SOBRE FUTURO QUE TIENEN COMO SUBYACENTE INDICES

ENUNCIADO

Considere una opción de compra americana a cuatro meses de futuros sobre índices. El precio de futuros actual es de 300\$, el precio de ejercicio es de 300\$, la tasa de interés libre de riesgo es de 8% anual y la volatilidad del índice es de 30% anual. Se divide la vida del derivado en cuatro intervalos de un mes con el propósito de construir el árbol.

RESOLUCIÓN

DATOS DEL CONTRATO DE FUTURO

PRECIO DEL FUTURO ACTUAL

$$F_0 = 300\$$$

VOLATILIDAD DEL INDICE

$$\sigma = 0,3$$

TASA DE INTERÉS CONTINUAMENTE COMPUESTA

$$r = 0,08$$

OPCIÓN DE COMPRA AMERICANA SOBRE FUTURO

PRECIO DE EJERCICIO

$$K = 300\$$$

VENCIMIENTO

En cuatro meses o $T = \frac{4}{12}$ por lo tanto $\Delta t = \frac{1}{12}$

Como un contrato a futuro es semejante a una acción que paga rendimiento a una tasa continua q y en donde la tasa es igual a

$$q = r$$

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$P = \frac{a - d}{u - d}$$

Donde para el caso de una acción que paga rendimiento a una tasa continua q

$$a = e^{(r-q) \times \Delta t}$$

Para el caso de contratos a futuros

$$a = e^{(r-r) \times \Delta t} = 1$$

Por lo tanto

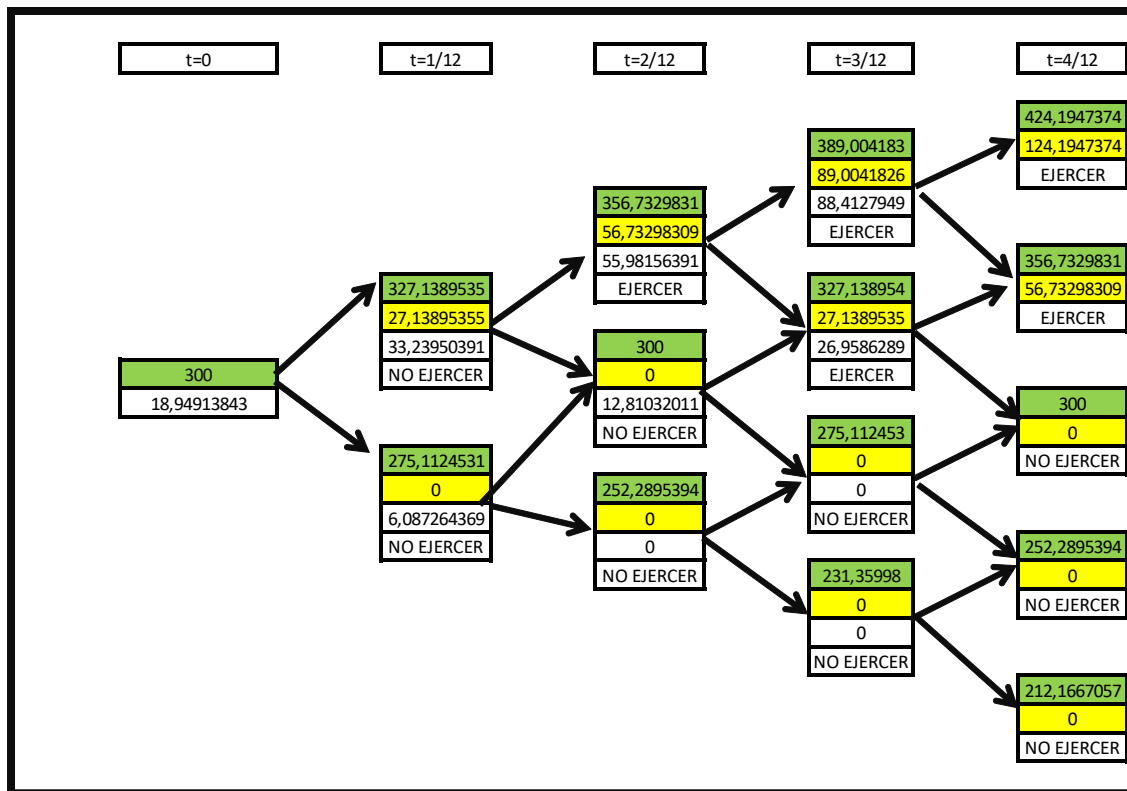
$$P = \frac{1 - d}{u - d}$$

Los cálculos se resumen en la siguiente tabla

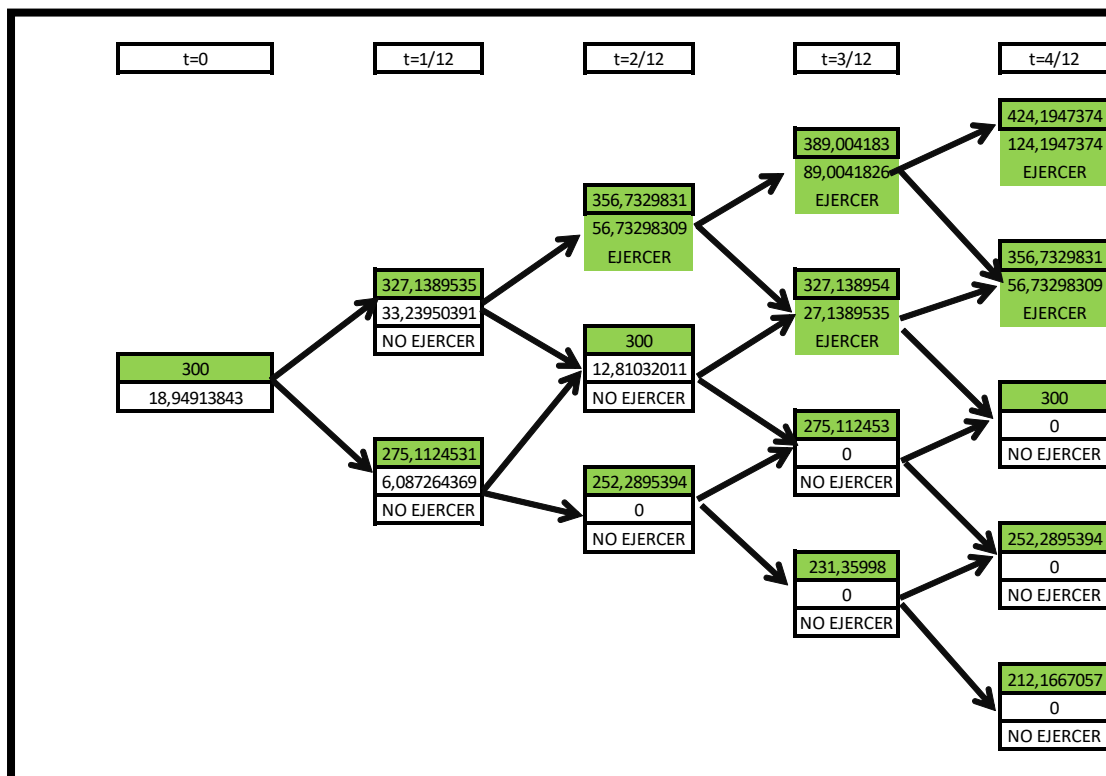
CONTRATO A FUTURO		DATOS	DATOS DEL CALL AMERICANO SOBRE FUTURO
u	1,0904632	VOLATILIDAD	STRIKE
d	0,9170415	$\sigma = 0,3$	$k = 300\$$
a	1	TASA DE INTERÉS	VENCIMIENTO
p	0,4783629	$r = 0,08$	$T = \frac{4}{12}$
$(1 - p)$	0,5216371	TASA DE RENDIMIENTO	Δt
F_0	300\$	$q = r$	$\Delta t = \frac{1}{12}$

RESULTADOS

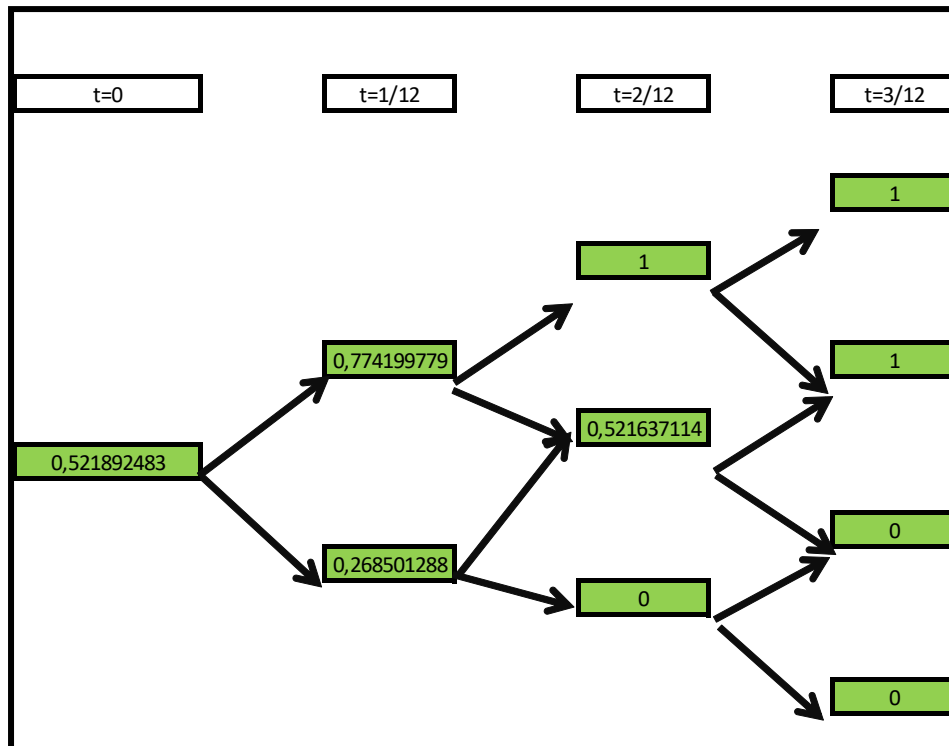
Los resultados del árbol de cuatro pasos fueron realizados con el EXCEL



PAYOFFS DEL CALL AMERICANO SOBRE FUTUROS



ÁRBOL DE DELTAS



EJEMPLO 2

OPCIONES AMERICANAS SOBRE ACCIÓN QUE NO PAGA DIVIDENDOS

ENUNCIADO

Considere una opción de venta americana a cinco meses sobre una acción que no paga dividendos. El precio de la acción actual es de 50\$, el precio de ejercicio es de 50\$, la tasa de interés libre de riesgo es de 10% anual y la volatilidad es de 40% anual. Se divide la vida del derivado en cinco intervalos de un mes con el propósito de construir el árbol.

RESOLUCIÓN

DATOS DE LA ACCIÓN

PRECIO DE LA ACCIÓN ACTUAL

$$S_0 = 50\$$$

VOLATILIDAD

$$\sigma = 0,4$$

TASA DE INTERÉS CONTINUAMENTE COMPUESTA

$$r = 0,1$$

OPCIÓN DE VENTA AMERICANA SOBRE LA ACCIÓN**PRECIO DE EJERCICIO**

$$K = 50\$$$

VENCIMIENTO

En cuatro meses o $T = \frac{5}{12}$ por lo tanto $\Delta t = \frac{1}{12}$

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$P = \frac{a - d}{u - d}$$

Donde para el caso de una acción que paga rendimiento a una tasa continúa q

$$a = e^{(r-q) \times \Delta t}$$

Para el caso de $q = 0$

$$a = e^{r \times \Delta t}$$

Por lo tanto

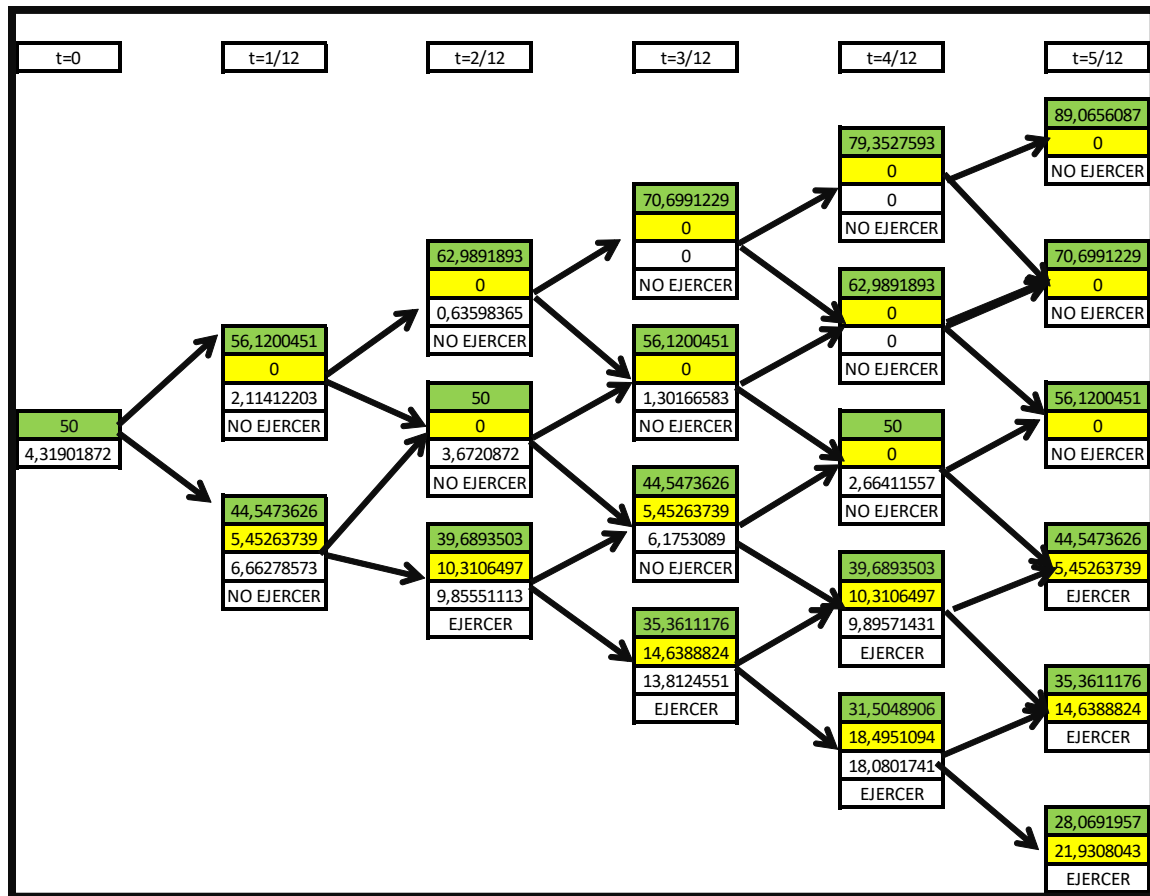
$$P = \frac{e^{r \times \Delta t} - d}{u - d}$$

Los cálculos se resumen en la siguiente tabla

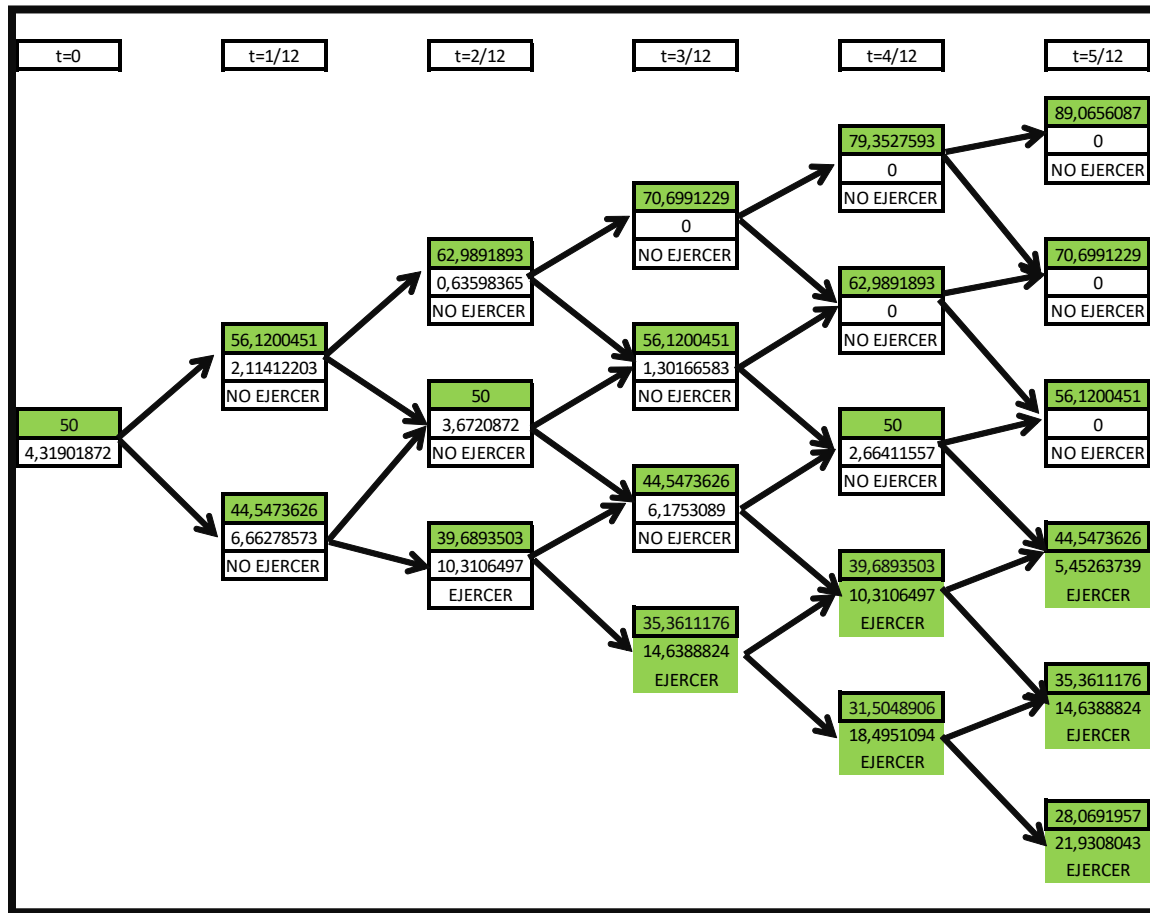
ACCIÓN QUE NO PAGA DIVIDENDOS		DATOS	DATOS DEL PUT AMERICANO SOBRE LA ACCIÓN
u	1,1224009	VOLATILIDAD	STRIKE
d	0,8909473	$\sigma = 0,4$	$k = 50\$$
a	1,008368152	TASA DE INTERÉS	VENCIMIENTO
p	0,5073193	$r = 0,1$	$T = \frac{5}{12}$
$(1 - p)$	0,4926807	TASA DE RENDIMIENTO	Δt
S_0	50\$	$q = 0$	$\Delta t = \frac{1}{12}$

RESULTADOS

Los resultados del árbol de cinco pasos fueron realizados con el EXCEL



PAYOFFS DEL PUT AMERICANO SOBRE UNA ACCION QUE NO PAGA DIVIDENDO



EJEMPLO 3

OPCIONES AMERICANAS SOBRE DIVISAS

ENUNCIADO

Considere una opción de venta americana a un año sobre la LIBRE BRITANICA. El tipo de cambio actual es de 1,61\$, el precio de ejercicio es de 1,60\$, la tasa de interés libre de riesgo estadounidense es de 8% anual, la tasa de interés libre de riesgo británica es de 9% anual y la volatilidad del tipo de cambio en LIBRAS ESTERLINAS es de 12% anual. Se divide la vida del derivado en cuatro intervalos de un trimestre cada uno con el propósito de construir el árbol.

RESOLUCIÓN

DATOS DEL TIPO DE CAMBIO

PRECIO DEL TIPO DE CAMBIO ACTUAL

$$TC_0 = 1,61\$$$

VOLATILIDAD DEL TIPO DE CAMBIO

$$\sigma = 0,12$$

TASA DE INTERÉS CONTINUAMENTE COMPUESTA LOCAL

$$r = 0,08$$

TASA DE INTERÉS CONTINUAMENTE COMPUESTA INTERNACIONAL

$$r_f = 0,09$$

OPCIÓN DE VENTA AMERICANA SOBRE LIBRA ESTERLINA

PRECIO DE EJERCICIO

$$K = 1,60\$$$

VENCIMIENTO

$$\text{En un año } T = 1 \text{ por lo tanto } \Delta t = \frac{3}{12}$$

La construcción un árbol de TIPO DE CAMBIO es semejante a una acción que paga rendimiento a una tasa continúa q y en donde la tasa es igual a

$$q = r_f$$

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$P = \frac{a - d}{u - d}$$

Donde para el caso de una acción que paga rendimiento a una tasa continúa q

$$a = e^{(r-q) \times \Delta t}$$

Para el caso de divisas

$$a = e^{(r-r_f) \times \Delta t}$$

Por lo tanto

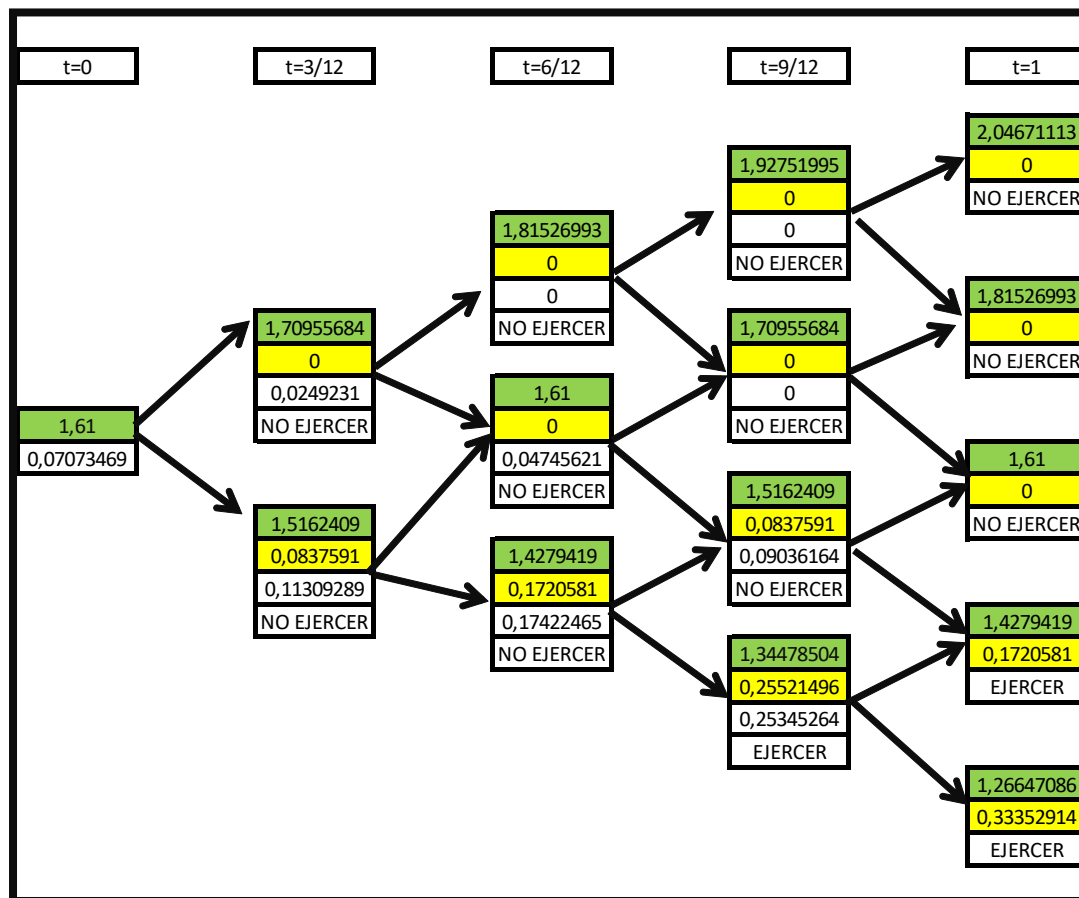
$$P = \frac{e^{(r-r_f) \times \Delta t} - d}{u - d}$$

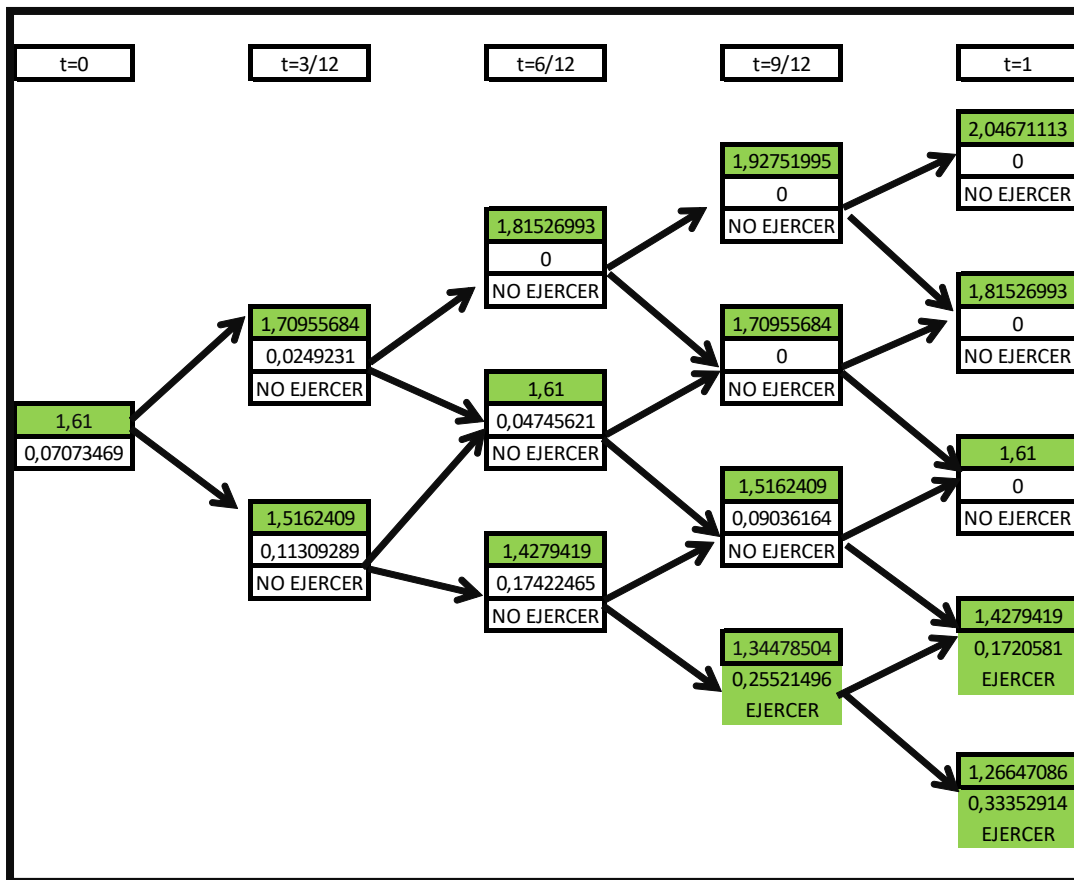
Los cálculos se resumen en la siguiente tabla

TIPO DE CAMBIO		DATOS	DATOS DEL PUT AMERICANO SOBRE LA LIBRA ESTERLINA
u	1,0618365	VOLATILIDAD DEL TIPO DE CAMBIO	STRIKE
d	0,9417645	$\sigma = 0,12$	$K = 1,60\$$
a	0,99750312	TASA DE INTERÉS LOCAL	VENCIMIENTO
p	0,4642097	$r = 0,08$	$T = 1$
$(1 - p)$	0,5357903	TASA DE INTERÉS INTERNACIONAL	Δt
TC_0	1,61\$	$q = r_f = 0,09$	$\Delta t = \frac{3}{12} = 0,25$

RESULTADOS

Los resultados del árbol de cuatro pasos fueron realizados con el EXCEL



PAYOFFS DEL PUT AMERICANO SOBRE LIBRA ESTERLINA**EJEMPLO 4****OPCIONES AMERICANAS SOBRE INDICES****ENUNCIADO**

Una opción de venta americana a dos meses sobre un índice bursátil tiene un precio de ejercicio de 480\$. El nivel actual del índice es de 484\$, la tasa de interés libre de riesgo es de 10% anual, el rendimiento de dividendos sobre el índice es de 3% anual y la volatilidad del índice es de 25% anual. Divida la vida de la opción en cuatro periodos quincenales y use el método de ARBOLES BINOMIALES para calcular el valor de la opción.

RESOLUCIÓN**DATOS DEL ÍNDICE**

NIVEL DEL ÍNDICE ACTUAL

$$I_0 = 484\$$$

VOLATILIDAD DEL ÍNDICE

$$\sigma = 0,25$$

TASA DE INTERÉS CONTINUAMENTE COMPUESTA

$$r = 0,1$$

RENDIMIENTO DE DIVIDENDOS SOBRE EL ÍNDICE

$$q = 0,03$$

OPCIÓN DE VENTA AMERICANA SOBRE ÍNDICE

PRECIO DE EJERCICIO

$$K = 480\$$$

VENCIMIENTO

$$\text{En un año } T = \frac{1}{12} \text{ por lo tanto } \Delta t = \frac{15}{360}$$

La construcción un árbol de ÍNDICE es semejante a una acción que paga rendimiento a una tasa continúa q y en donde la tasa es igual al rendimiento de dividendos sobre el índice.

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

$$P = \frac{a - d}{u - d}$$

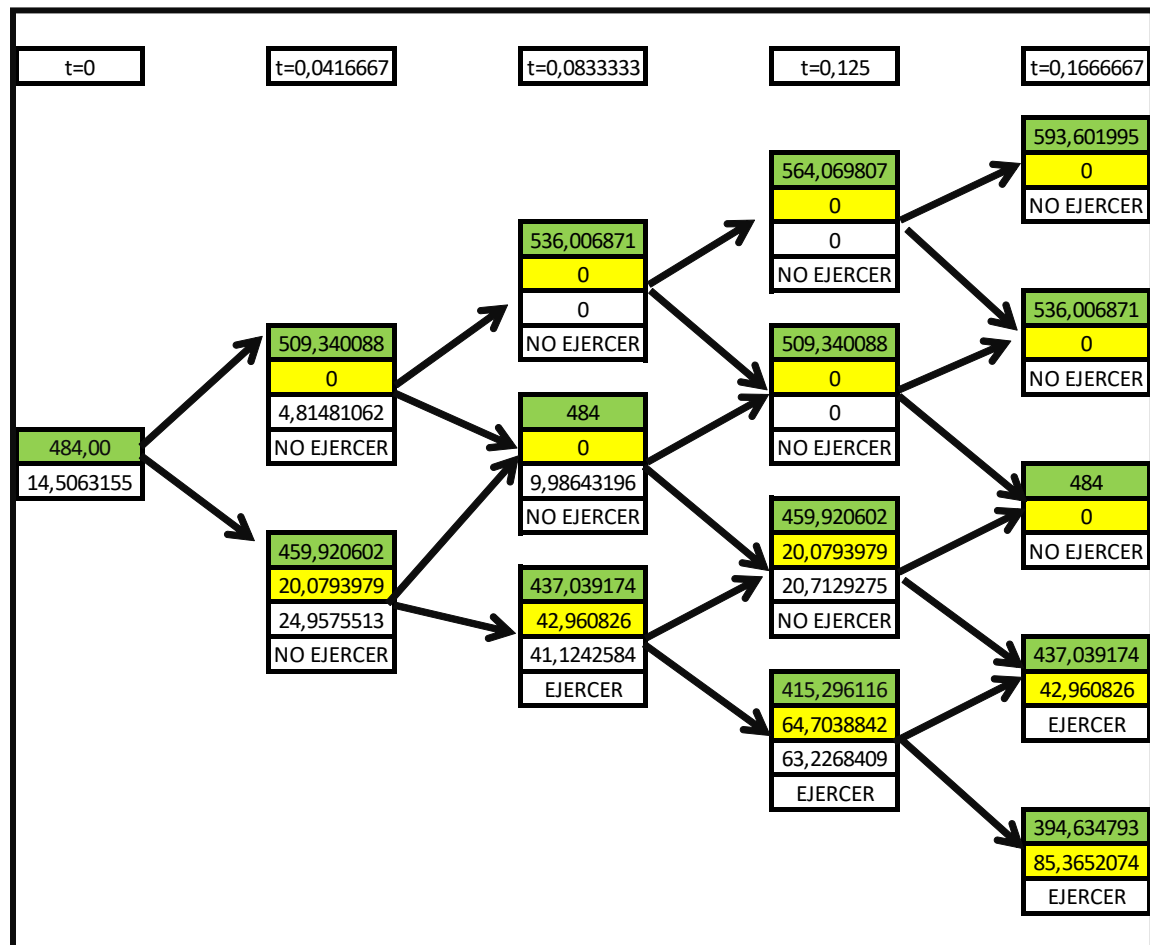
Donde

$$a = e^{(r-q) \times \Delta t}$$

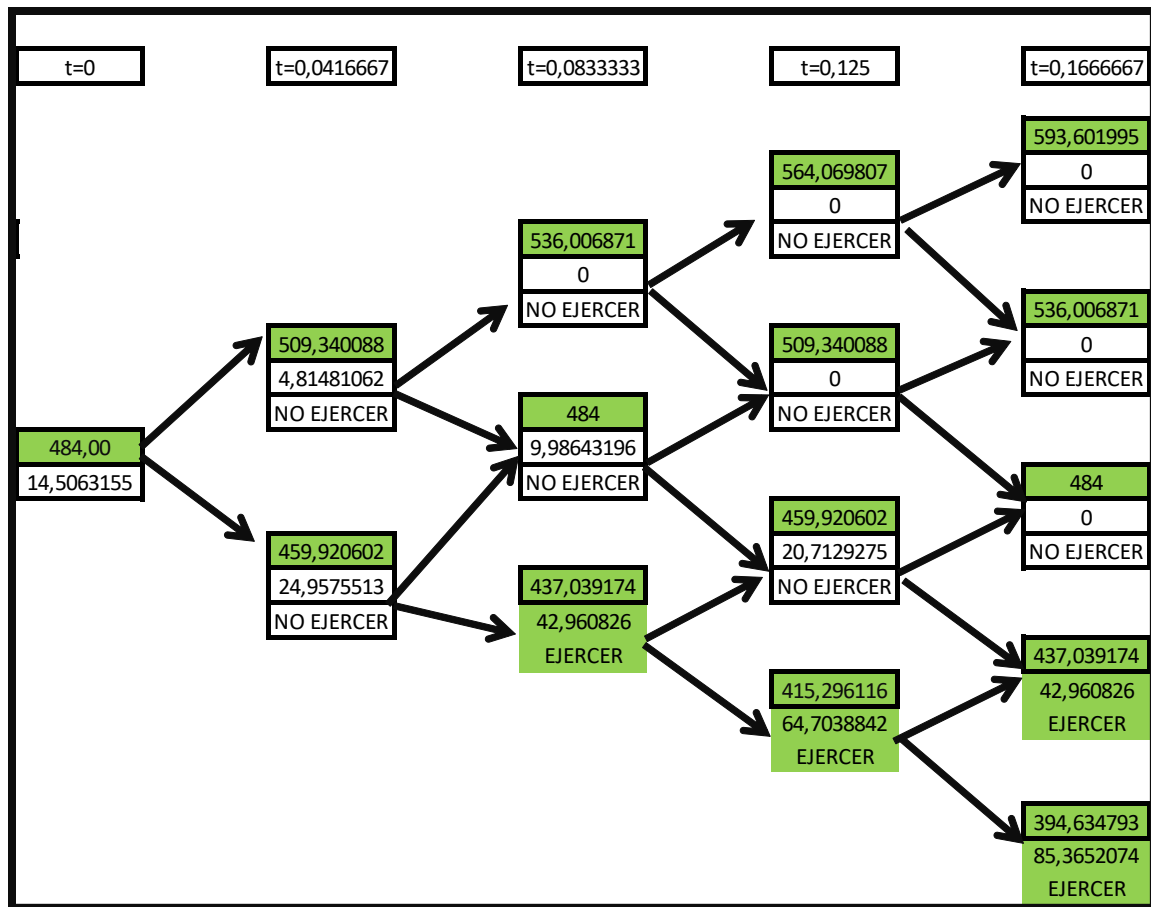
ÍNDICE		DATOS	DATOS DEL PUT AMERICANO SOBRE ÍNDICE
u	1,0523556	VOLATILIDAD DEL ÍNDICE	STRIKE
d	0,9502492	$\sigma = 0,25$	$K = 480\$$
a	1,00292092	TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO	VENCIMIENTO
p	0,5158517	$r = 0,1$	$T = \frac{2}{12}$
$(1 - p)$	0,4841483	RENDIMIENTO DE DIVIDENDO SOBRE EL ÍNDICE	Δt
I_0	484\$	$q = 0,03$	$\Delta t = \frac{15}{365}$

RESULTADOS

Los resultados del árbol de cuatro pasos fueron realizados con el EXCEL



PAYOFFS DEL PUT AMERICANO SOBRE INDICE

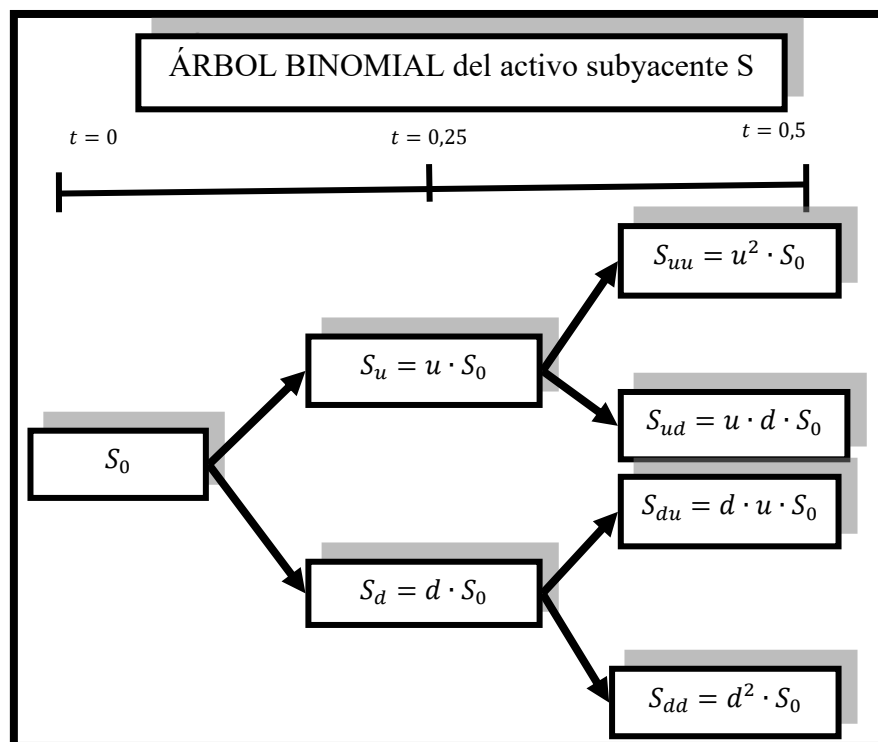


Capítulo 7: MODELOS DE ESTRUCTURA TEMPORAL DE TASA DE INTERES

En ocasiones se hace necesario valorar derivados que tienen como subyacente la tasa de interés como es el caso del CAPLET o el FLOORLET que en un momento definiremos y otros instrumentos financieros como el BONO CALLABLE.

El modelo de BLACK AND SHOLES puede ser utilizado para valorar un amplio rango de instrumentos, el problema que presenta es que no provee una descripción de la evolución estocástica de las tasa de interés y de los precios de los bonos. En consecuencia, los derivados de tasa de interés cuya valuación depende del exacto sendero de tales procesos estocásticos, como los que acabamos de mencionar, no pueden ser valuados por el modelo.

Si pensamos en tiempo discreto y vamos al modelo de valuación de ARBOLES BINOMIALES, donde para la valuación de una opción cualquiera era necesario captar la estructura de comportamiento de la evolución del precio del activo subyacente.



Si nosotros intentáramos valorar una opción que tiene como subyacente a la tasas de interés como es el caso del CAPLET no podríamos hacerlo por este método, porque no tenemos un modelo que capture la evolución estocástica de la tasa de interés, como ocurre con el activo subyacente.

Un grupo de modelos de ESTRUCTURA TEMPORAL DE TASAS DE INTERÉS para valuación de instrumentos están basados sobre argumentos de NO ARBITRAJE. Este grupo de modelos es consistente con la estructura de tasas de interés que es observada en el mercado en el presente, por lo cual, los precios de los bonos que rigen el mercado actualmente son reflejados por los modelos y son una materia prima para poder capturar la estructura probabilística del comportamiento seguido por las tasa de interés. Estos modelos toman la estructura temporal inicial y definen como evoluciona en el tiempo.

MODELOS

Hay dos modelos en que haremos hincapié:

- El modelo THE BLACK-DERMAN-TOY (BDT)

- El modelo HO-LEE

SUPUESTOS

COSTOS DE TRANSACCIÓN NULOS Y NO SE PAGAN IMPUESTOS

Los costos de transacción son nulos, luego se puede determinar una cobertura libre de riesgo para el periodo y no hay pagos de impuestos

VENTA EN DESCUBIERTO

Se permiten las ventas en descubierto

LIQUIDEZ

El mercado FINANCIERO es líquido

MERCADO DE CRÉDITO

Existe un mercado de crédito en el cual se pueden tomar y pedir prestado fondos a una misma tasa libre de riesgo de incumplimiento, lo cual implica, que la tasa pasiva es igual a la tasa activa.

DIVISIBILIDAD DEL MERCADO DE CRÉDITO

Esto implica que se puede tomar una posición LONG o SHORT en una parte fraccionaria de un bono, es decir, que se puede comprar $\frac{1}{2}$ de bono, $\frac{3}{4}$ de bono o incluso vender $2\frac{1}{2}$ bonos. Todos los bonos del mercado se pueden transformar en operaciones con BONOS CERO CUPÓN, por ello trataremos con ellos solamente

DIVISIBILIDAD DEL MERCADO DE FINANCIERO

Esto implica que se puede tomar una posición LONG o SHORT en una parte fraccionaria de un activo financiero, es decir, que se puede comprar $\frac{1}{2}$ de acción, $\frac{3}{4}$ de acción o incluso vender $2\frac{1}{2}$ de acciones

LOS CAMBIOS EN LOS RENDIMIENTOS DE TODOS LOS BONOS ESTAN PERFECTAMENTE CORRELACIONADOS

EL VALOR ESPERADO DE LOS RETORNOS DE UN PERIODO SON IGUALES PARA TODOS LOS ACTIVOS E IGUAL A LA TASA LIBRE DE RIEGO

Es implica que $E_{RN}(S_t) = S_0 e^{r \times \Delta t}$ en un intervalo Δt y para un valor al inicio de mismo de S_0

LA SHORT RATE SIGUEN UNA DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

Donde las SHORT RATES son las tasas de interés efectivas anuales que surgen por equivalencias de tasas de las LONG RATES que son las tasas CERO CUPON de BONOS CERPON con distintas fechas de vencimiento T.

EL MODELO THE BLACK-DERMAN-TOY

La directa aplicación de un modelo BDT es construir un ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS desde el cual complejos instrumentos puedan ser valuados. Un ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS es una representación del proceso estocástico para las tasas de INTERÉS NOMINAL ANUAL en tiempo discreto. El árbol es calibrado a las actuales tasas de interés de mercado y las volatilidades actuales, es decir, la actual ETTI. Hay que notar que las tasas de DESCUENTO varían de nodo a nodo.

EL MODELO TIENE TRES CARACTERÍSTICAS CLAVES

PRIMERA CARACTERÍSTICA

Su variable fundamental es la SHORT RATE, la tasa de interés efectiva anual. La SHORT RATE es el único factor del modelo. Los cambios en esta tasa conducen a cambios en los precios en todos los activos.

SEGUNDA CARACTERÍSTICA

El modelo toma como INPUTS a las LONG RATES que son las tasas de rendimientos de BONOS CERO CUPÓN con distintas fechas de vencimientos y las volatilidades de los rendimientos de los mismos BONO CERO CUPÓN. La primera curva de tasas de rendimiento se llama CURVA YIELD y la segunda de volatilidades CURVA DE VOLATILIDADES YIELD. Ambas conforman la estructura temporal de tasa de interés.

TERCERA CARACTERÍSTICA

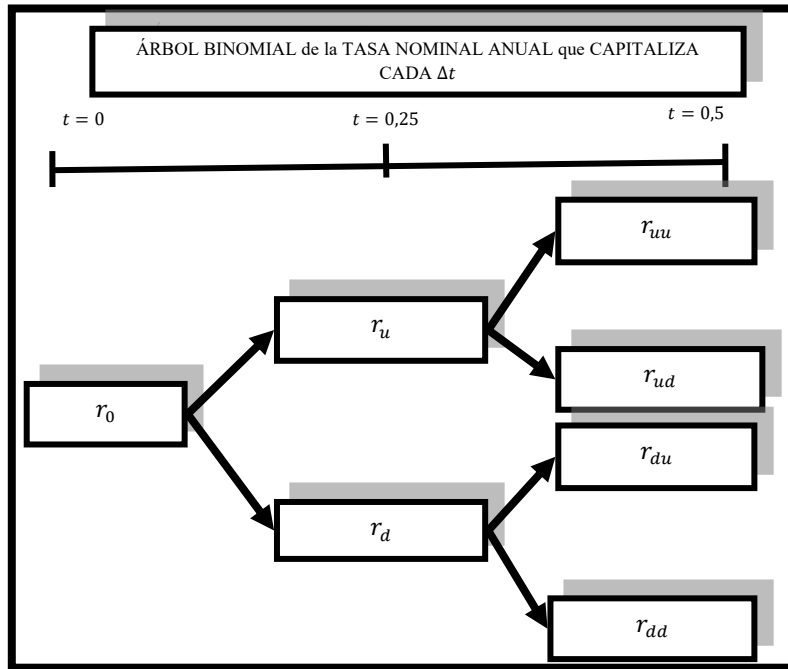
Se busca armar un árbol de tasas SHORT RATES nominales anuales utilizando los datos de la ETTI en el momento inicial o los INPUTS del modelo

VALUACIÓN DE UN ACTIVO

Cuando valuamos un activo cualquiera lo hacemos como hacíamos en ÁRBOLES BINOMIALES, es decir, calculamos el valor actual de la esperanza del activo

$$E_{RN}(S_t) \times e^{-r \times \Delta t} = S_0$$

ÁRBOL DE DOS PASOS DE TASAS DE INTERÉS NOMINAL ANUAL



Donde

$$r_u = r_d \cdot e^{2\sigma_1\sqrt{\Delta t}}$$

$$r_{uu} = r_{ud} \cdot e^{2\sigma_2\sqrt{\Delta t}}$$

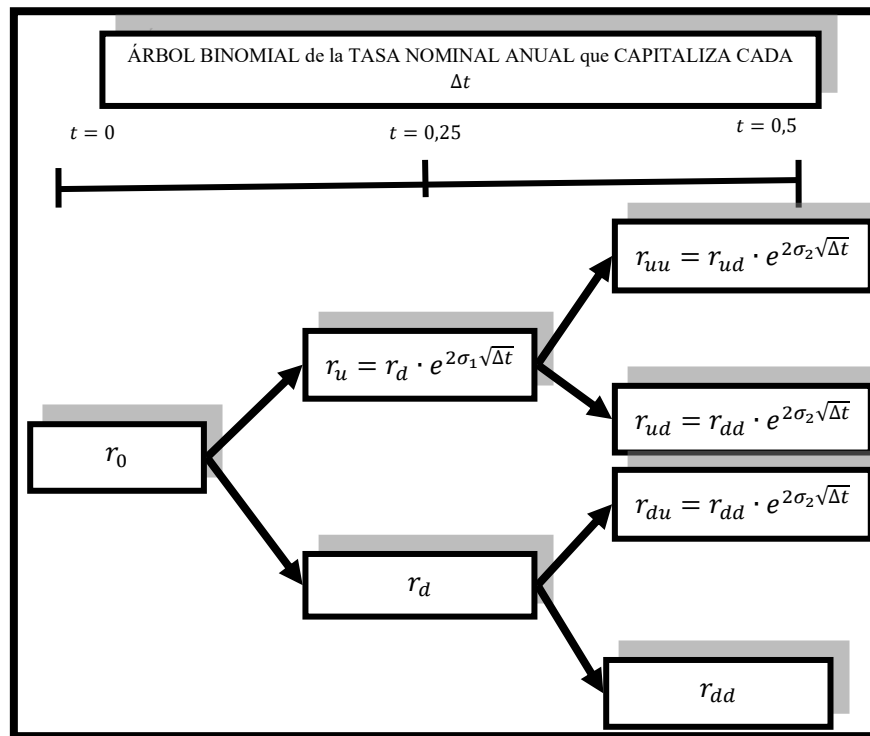
$$r_{du} = r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2\sqrt{\Delta t}}$$

Por lo cual

$$r_{uu} = r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2\sqrt{\Delta t}} \cdot e^{2\sigma_2\sqrt{\Delta t}}$$

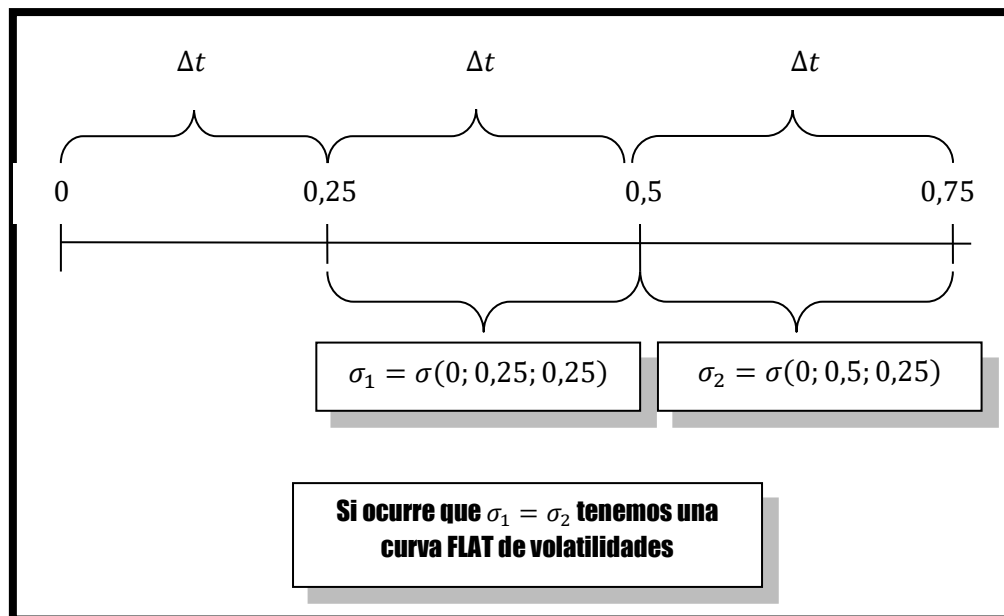
$$r_{uu} = r_{dd} \cdot e^{4\sigma_2\sqrt{\Delta t}}$$

Por lo cual de manera gráfica



VOLATILIDADES DEL ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS

LAS VOLATILIDADES SEGÚN EL MODELO THE BLACK-DERMAN-TOY



DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES DE LA VARIABLE ALEATORIA r SEGÚN EL MODELO THE BLACK-DERMAN-TOY

ESCENARIO DE LA TASAS DE INTERES NOMINALES ANUALES r	PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO
r_u	$\frac{1}{2}$
r_d	$\frac{1}{2}$

Si el número de escenario $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto la variable aleatoria $\ln[r]$ la convertimos en continua por el TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL la distribución de probabilidades del $\ln[r]$ converge a una NORMAL. En definitiva, en el campo continuo el MODELO THE BLACK.DERMAN-TOY supone que la tasa de interés NOMINAL ANUAL r sigue una distribución LOGNORMAL. Esto se deduce de la propiedad que dice que si

$$\ln[x] \sim \text{NORMAL}[\mu; \sigma]$$

Luego

$$x \sim \text{LOGNORMAL}$$

ESPERANZA

$$E(r) = \frac{\ln[r_u] + \ln[r_d]}{2}$$

DESVIO ESTANDAR

$$\sigma\sqrt{\Delta t} = \sigma_r = \frac{|\ln[r_u] - \ln[r_d]|}{2}$$

El valor de las volatilidades las podemos despejar de las formulas que fueron dadas más arriba cuando contamos con la información del ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS como dato

$$r_u = r_d \cdot e^{2\sigma_1\sqrt{\Delta t}}$$

$$r_{uu} = r_{ud} \cdot e^{2\sigma_2\sqrt{\Delta t}}$$

$$r_{du} = r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2\sqrt{\Delta t}}$$

CALCULO DEL VALOR DE σ_1

$$\frac{r_u}{r_d} = e^{2\sigma_1\sqrt{\Delta t}}$$

Aplicamos logaritmo natural a ambos miembros

$$\ln\left[\frac{r_u}{r_d}\right] = 2\sigma_1\sqrt{\Delta t}$$

$$\sigma_1 = \frac{\ln\left[\frac{r_u}{r_d}\right]}{2\sqrt{\Delta t}}$$

CALCULO DEL VALOR DE σ_2

$$\frac{r_{uu}}{r_{ud}} = e^{2\sigma_2\sqrt{\Delta t}}$$

Aplicamos logaritmo natural a ambos miembros

$$\ln \left[\frac{r_{uu}}{r_{ud}} \right] = 2\sigma_2\sqrt{\Delta t}$$

$$\sigma_2 = \frac{\ln \left[\frac{r_{uu}}{r_{ud}} \right]}{2\sqrt{\Delta t}}$$

También

$$\frac{r_{du}}{r_{dd}} = e^{2\sigma_2\sqrt{\Delta t}}$$

Aplicamos logaritmo natural a ambos miembros

$$\ln \left[\frac{r_{du}}{r_{dd}} \right] = 2\sigma_2\sqrt{\Delta t}$$

$$\sigma_2 = \frac{\ln \left[\frac{r_{du}}{r_{dd}} \right]}{2\sqrt{\Delta t}}$$

Si tomamos la relación

$$r_{uu} = r_{dd} \cdot e^{4\sigma_2\sqrt{\Delta t}}$$

Luego

$$\frac{r_{uu}}{r_{dd}} = e^{4\sigma_2\sqrt{\Delta t}}$$

Aplicamos logaritmo natural a ambos miembros

$$\ln \left[\frac{r_{uu}}{r_{dd}} \right] = 4\sigma_2\sqrt{\Delta t}$$

$$\sigma_2 = \frac{\ln \left[\frac{r_{uu}}{r_{dd}} \right]}{4\sqrt{\Delta t}}$$

Donde las volatilidades σ_1 y σ_2 son anualizadas

BONOS CERO CUPÓN

PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	PRECIO BONO CERO CUPÓN con VALOR NOMINAL 1\$ $P(0; t)$
$t + \Delta t$	$P(0; t + \Delta t) = FD_{t+\Delta t}$
$t + 2\Delta t$	$P(0; t + 2\Delta t) = FD_{t+2\Delta t}$
$t + 3\Delta t$	$P(0; t + 3\Delta t) = FD_{t+3\Delta t}$
$t + 4\Delta t$	$P(0; t + 4\Delta t) = FD_{t+4\Delta t}$
$t + 5\Delta t$	$P(0; t + 5\Delta t) = FD_{t+5\Delta t}$
...	...
$t + n\Delta t$	$P(0; t + n\Delta t) = FD_{t+n\Delta t}$

Estos valores de BONOS CERO CUPÓN se conocen en $t = 0$ a partir de ellos es posible obtener la ETTI del momento $t = 0$ hallando las tasas cupones de cada plazo. Como vemos del ARBOL DE TASAS DE INTERÉS tenemos TRES incógnitas

$$r_0, r_d \text{ y } r_{dd}$$

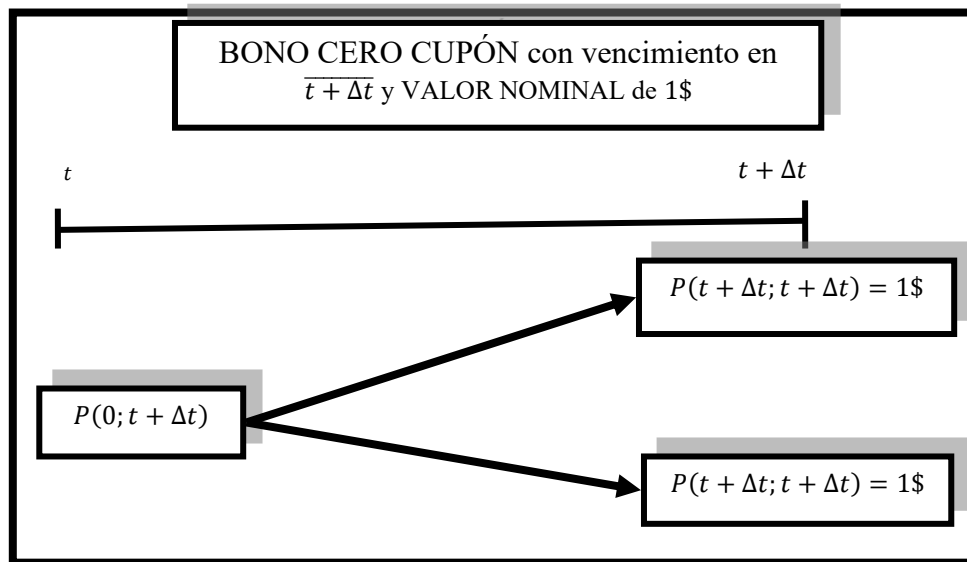
El ARBOL DE TASAS DE INTERÉS debe ser tal que encaje perfectamente a los precios BONOS CERO CUPÓN que rigen en el mercado financiero actualmente. Por lo cual para hallar los valores que desconocemos y armar nuestro árbol debemos relacionar nuestras incógnitas con los precios de los BONOS CERO CUPÓN.

PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

Contrariamente a lo que hacíamos en el MODELO BINOMIAL no debemos calcular las probabilidades riesgo neutro porque vienen dadas desde afuera

CALCULO DE r_0

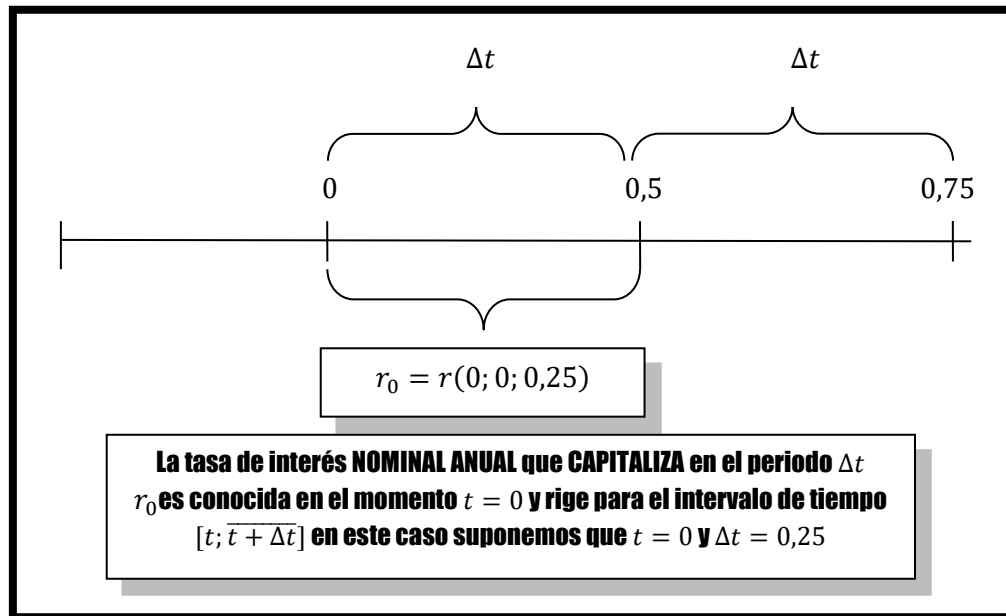
Tomamos el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en $t + \Delta t$ y un VALOR NOMINAL de 1\$, de manera gráfica



Por lo cual

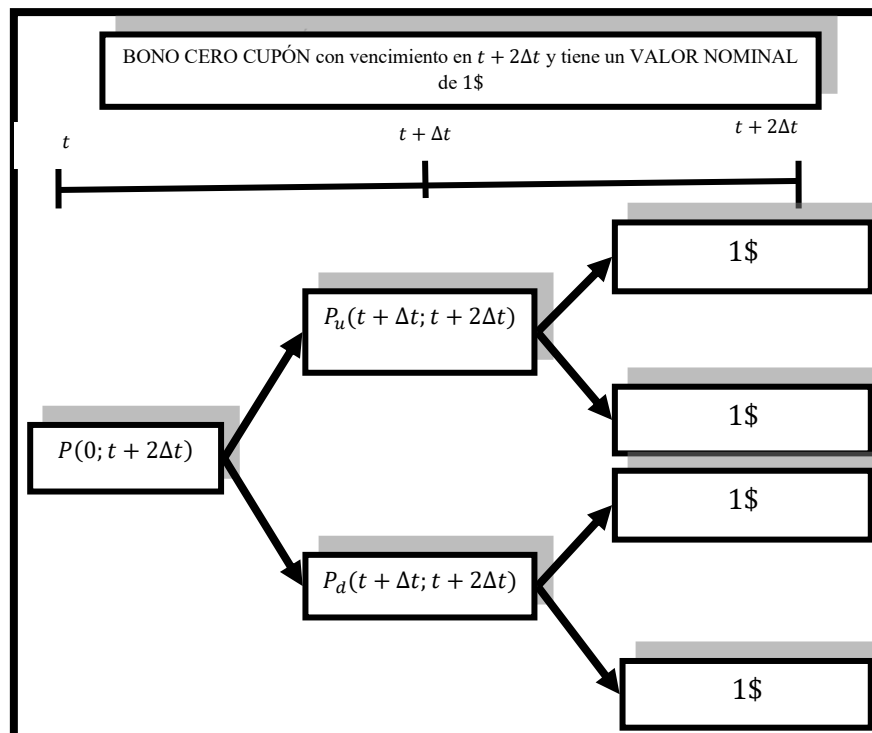
$$P(0; t + \Delta t) = \frac{1\$}{(1 + \Delta t \times r_0)}$$

De donde despejamos r_0 para obtener su valor.



CALCULO DE r_d

Tomamos el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en $t + 2\Delta t$ y un VALOR NOMINAL de 1\$, de manera gráfica



Donde

$$P_u(t + \Delta t; t + 2\Delta t) = \frac{1\$ \times \pi_{RIESGO NEUTRO} + 1\$ \times (1 - \pi_{RIESGO NEUTRO})}{(1 + r_u \times \Delta t)} = \frac{1\$}{(1 + r_u \times \Delta t)}$$

$$P_d(t + \Delta t; t + 2\Delta t) = \frac{1\$ \times \pi_{RIESGO NEUTRO} + 1\$ \times (1 - \pi_{RIESGO NEUTRO})}{(1 + r_d \times \Delta t)} = \frac{1\$}{(1 + r_d \times \Delta t)}$$

Por lo cual

$$P(0; t + 2\Delta t) = \frac{P_u(t + \Delta t; t + 2\Delta t) \times \pi_{RIESGO NEUTRO} + P_d(t + \Delta t; t + 2\Delta t) \times (1 - \pi_{RIESGO NEUTRO})}{(1 + r_0 \times \Delta t)}$$

Si suponemos que

$$\pi_{RIESGO NEUTRO} = \frac{1}{2} \quad y \text{ por lo tanto} \quad 1 - \pi_{RIESGO NEUTRO} = \frac{1}{2}$$

Luego

$$P(0; t + 2\Delta t) = \frac{P_u(t + \Delta t; t + 2\Delta t) \times \frac{1}{2} + P_d(t + \Delta t; t + 2\Delta t) \times \frac{1}{2}}{(1 + r_0 \times \Delta t)}$$

Reemplazamos $P_u(t + \Delta t; t + 2\Delta t)$ y $P_d(t + \Delta t; t + 2\Delta t)$ por sus valores

$$P(0; t + 2\Delta t) = \frac{1}{(1 + r_0 \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1\$}{(1 + r_u \times \Delta t)} + \frac{1\$}{(1 + r_d \times \Delta t)} \right]$$

Tenemos una ecuación con dos incógnitas

$$r_u \text{ y } r_d$$

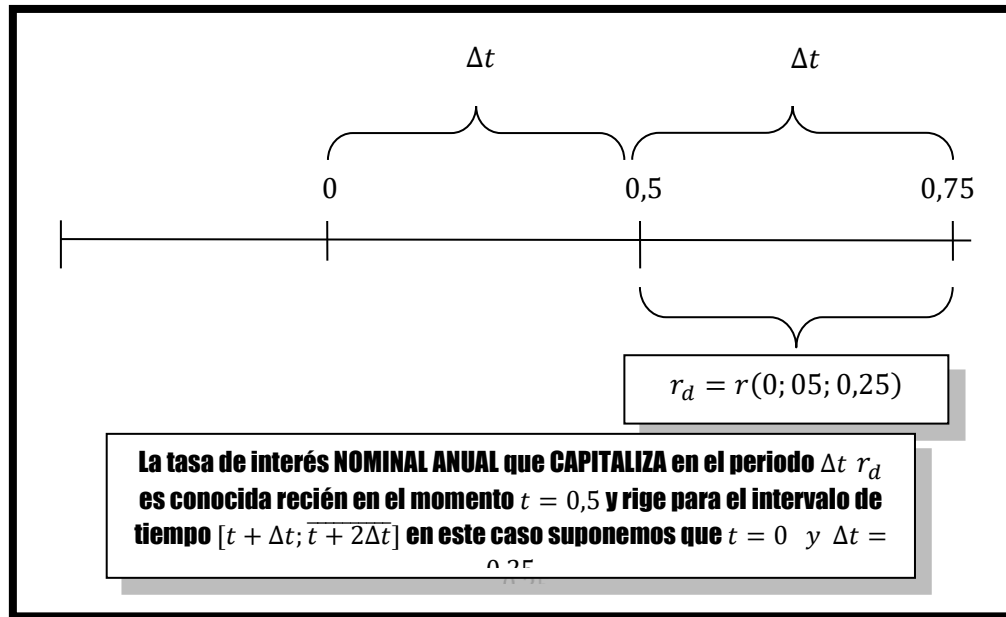
Por lo cual debemos utilizar la formula que definimos al principio

$$r_u = r_d \cdot e^{2\sigma_1 \sqrt{\Delta t}}$$

Reemplazamos y obtenemos una ecuación con una incógnita

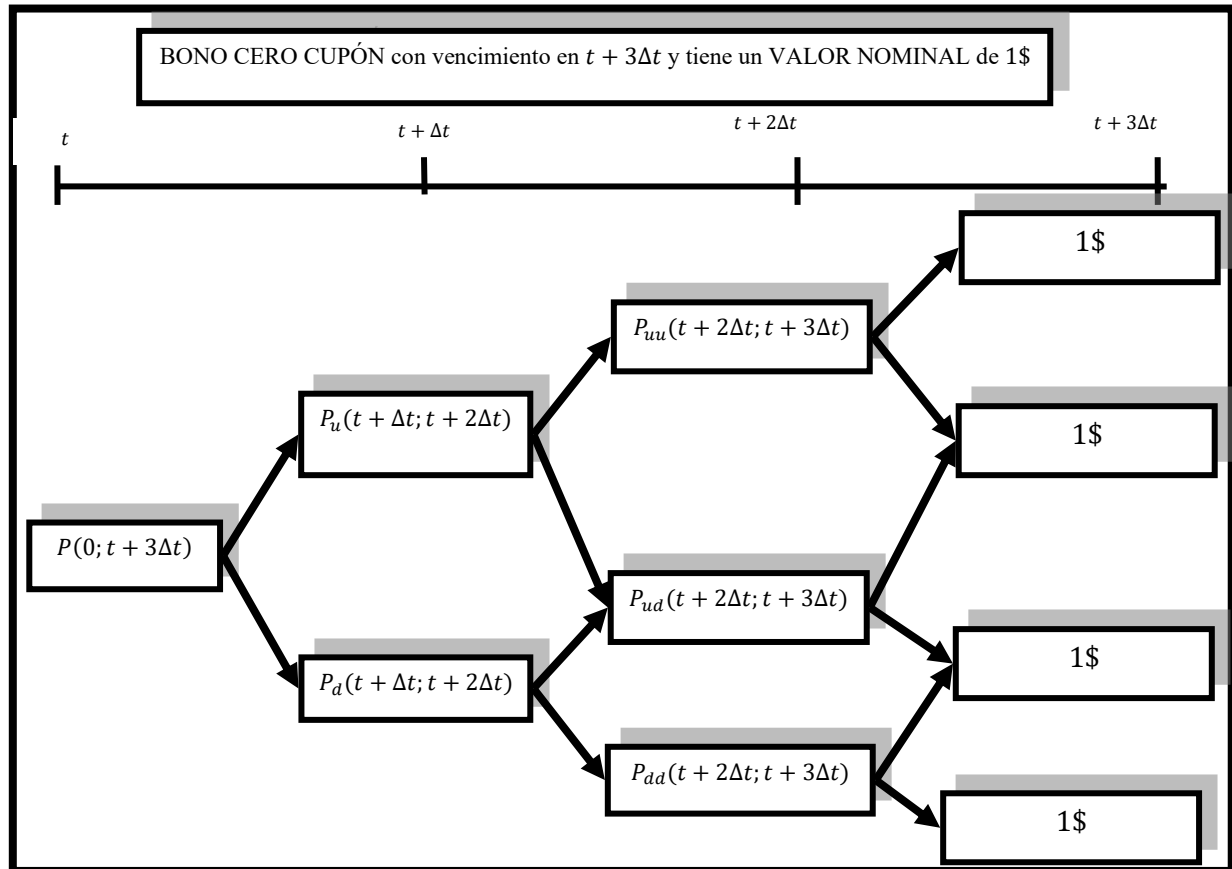
$$P(0; t + 2\Delta t) = \frac{1}{(1 + r_0 \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1\$}{(1 + r_d \cdot e^{2\sigma_1 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} + \frac{1\$}{(1 + r_d \times \Delta t)} \right]$$

Por lo cual despejando el valor de r_d obtenemos también el de r_u

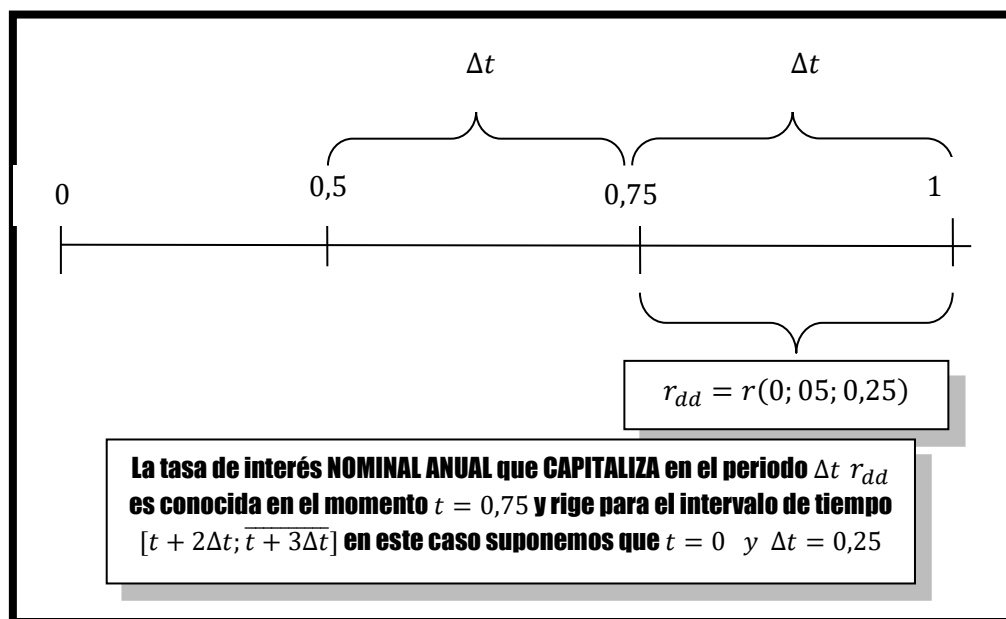


CALCULO DE r_{dd}

Tomamos el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en $t + 3\Delta t$ y un VALOR NOMINAL de 1\$, de manera gráfica



Es importante notar que el árbol del BONO CERO CUPÓN es de TRES pasos, esto es así porque la tasa de interés que buscamos r_{dd} es conocida recién en $t + 2\Delta t$ y rige para el intervalo de tiempo $[t + 2\Delta t; t + 3\Delta t]$



Tenemos que

$$P_{uu}(t + 2\Delta t; t + 3\Delta t) = \frac{1\$ \times \pi_{RIESGO NEUTRO} + 1\$ \times (1 - \pi_{RIESGO NEUTRO})}{(1 + r_{uu} \times \Delta t)} = \frac{1\$}{(1 + r_{uu} \times \Delta t)}$$

$$P_{ud}(t + 2\Delta t; t + 3\Delta t) = \frac{1\$ \times \pi_{RIESGO NEUTRO} + 1\$ \times (1 - \pi_{RIESGO NEUTRO})}{(1 + r_{ud} \times \Delta t)} = \frac{1\$}{(1 + r_{ud} \times \Delta t)}$$

$$P_{dd}(t + 2\Delta t; t + 3\Delta t) = \frac{1\$ \times \pi_{RIESGO NEUTRO} + 1\$ \times (1 - \pi_{RIESGO NEUTRO})}{(1 + r_{dd} \times \Delta t)} = \frac{1\$}{(1 + r_{dd} \times \Delta t)}$$

El valor de $P_u(t + \Delta t; t + 2\Delta t)$ es igual a

$$\frac{P_{uu}(t + 2\Delta t; t + 3\Delta t) \times \pi_{RIESGO NEUTRO} + P_{ud}(t + 2\Delta t; t + 3\Delta t) \times (1 - \pi_{RIESGO NEUTRO})}{(1 + r_u \times \Delta t)}$$

El valor de $P_d(t + \Delta t; t + 2\Delta t)$ es igual a

$$\frac{P_{du}(t + 2\Delta t; t + 3\Delta t) \times \pi_{RIESGO NEUTRO} + P_{dd}(t + 2\Delta t; t + 3\Delta t) \times (1 - \pi_{RIESGO NEUTRO})}{(1 + r_d \times \Delta t)}$$

Donde

$$P_u(t + \Delta t; t + 2\Delta t) = \frac{1}{(1 + r_u \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1\$}{(1 + r_{uu} \times \Delta t)} + \frac{1\$}{(1 + r_{ud} \times \Delta t)} \right]$$

$$P_d(t + \Delta t; t + 2\Delta t) = \frac{1}{(1 + r_d \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1\$}{(1 + r_{du} \times \Delta t)} + \frac{1\$}{(1 + r_{dd} \times \Delta t)} \right]$$

Por lo cual

$$P(0; t + 3\Delta t) = \frac{P_u(t + \Delta t; t + 2\Delta t) \times \pi_{RIESGO NEUTRO} + P_d(t + \Delta t; t + 2\Delta t) \times (1 - \pi_{RIESGO NEUTRO})}{(1 + r_0 \times \Delta t)}$$

Si suponemos que

$$\pi_{RIESGO NEUTRO} = \frac{1}{2} \quad \text{y por lo tanto} \quad 1 - \pi_{RIESGO NEUTRO} = \frac{1}{2}$$

Luego

$$P(0; t + 3\Delta t) = \frac{P_u(t + \Delta t; t + 2\Delta t) \times \frac{1}{2} + P_d(t + \Delta t; t + 2\Delta t) \times \frac{1}{2}}{(1 + r_0 \times \Delta t)}$$

Reemplazamos $P_u(t + \Delta t; t + 2\Delta t)$ y $P_d(t + \Delta t; t + 2\Delta t)$ por sus valores

$$\frac{1}{(1 + r_0 \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{(1 + r_d \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1\$}{(1 + r_{du} \times \Delta t)} + \frac{1\$}{(1 + r_{dd} \times \Delta t)} \right] + \frac{1}{(1 + r_u \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1\$}{(1 + r_{uu} \times \Delta t)} + \frac{1\$}{(1 + r_{ud} \times \Delta t)} \right] \right]$$

Tenemos una ecuación con tres incógnitas

$$r_{uu}, r_{ud} \text{ y } r_{dd}$$

Por lo cual debemos utilizar la formula que definimos al principio

$$r_{uu} = r_{dd} \cdot e^{4\sigma_2\sqrt{\Delta t}}$$

$$r_{du} = r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2\sqrt{\Delta t}}$$

Reemplazamos y obtenemos una ecuación con una incógnita

$$\frac{1}{(1+r_0 \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{(1+r_d \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1\$}{(1+r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2\sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} + \frac{1\$}{(1+r_{dd} \times \Delta t)} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{(1+r_u \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1\$}{(1+r_{dd} \cdot e^{4\sigma_2\sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} + \frac{1\$}{(1+r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2\sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} \right] \right]$$

Por lo cual despejando el valor de r_{dd} obtenemos también los valores de r_{uu} y r_{ud}

EL MODELO DE HO-LEE

Es similar al MODELO THE BLACK.DERMAN-TOY con la siguiente diferencia

$$r_u = r_d + 2\sigma_1\sqrt{\Delta t}$$

$$r_{uu} = r_{ud} + 2\sigma_2\sqrt{\Delta t}$$

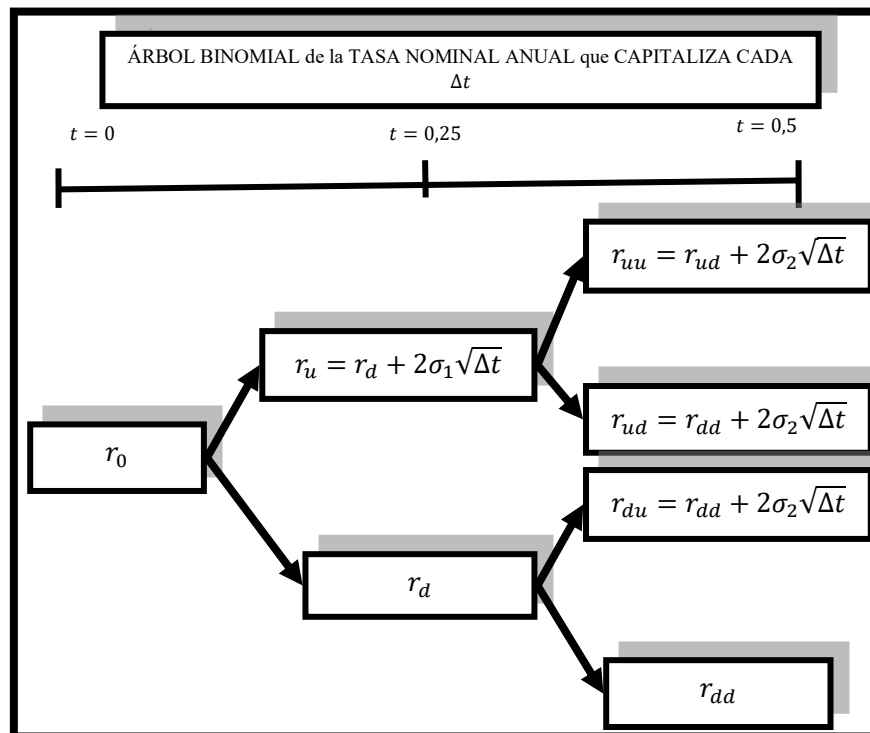
$$r_{du} = r_{dd} + 2\sigma_2\sqrt{\Delta t}$$

Por lo cual

$$r_{uu} = r_{dd} + 2\sigma_2\sqrt{\Delta t} + 2\sigma_2\sqrt{\Delta t}$$

$$r_{uu} = r_{dd} + 4\sigma_2\sqrt{\Delta t}$$

Por lo cual de manera gráfica



LAS VOLATILIDADES SEGÚN EL MODELO DE HO-LEE

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES DE LA VARIABLE ALEATORIA r SEGÚN EL MODELO DE HO-LEE

ESCENARIO DE LA TASAS DE INTERES NOMINALES ANUALES r	PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO
r_u	$\frac{1}{2}$
r_d	$\frac{1}{2}$

Si el número de escenarios $n \rightarrow \infty$ y por lo tanto a la variable aleatoria r la convertimos en continua, por el TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL la distribución de probabilidades de r converge a una NORMAL. En definitiva, en el campo continuo el MODELO DE HO-LEE supone que la tasa de interés NOMINAL ANUAL r sigue una distribución NORMAL.

ESPERANZA

$$E(r) = \frac{r_u + r_d}{2}$$

VARIANZA

$$\sigma^2 \sqrt{\Delta t} = \sigma_r^2 = (r_u - E[r])^2 \times \frac{1}{2} + (r_d - E[r])^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\sigma_r^2 = \left(r_u - \frac{r_u + r_d}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(r_d - \frac{r_u + r_d}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{r_u - r_d}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{r_d - r_u}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\sigma_r^2 = (r_u - r_d)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + (r_d - r_u)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

Donde

$$(r_d - r_u)^2 = (-1)^2 \times (r_u - r_d)^2 = (r_u - r_d)^2$$

Por lo cual

$$\sigma_r^2 = (r_u - r_d)^2 \times \frac{1}{8} + (r_u - r_d)^2 \times \frac{1}{8}$$

$$\sigma_r^2 = 2 \times (r_u - r_d)^2 \times \frac{1}{8}$$

$$\sigma_r^2 = (r_u - r_d)^2 \times \frac{1}{4}$$

DESVIO ESTANDAR

$$\sigma \sqrt{\Delta t} = \sigma_r = \frac{|r_u - r_d|}{2}$$

Cuando contamos con la información del ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS como dato podemos usar sus formulas para obtener las volatilidades

EL VALOR DE σ_1

$$\sigma_1 = \frac{r_u - r_d}{2\sqrt{\Delta t}}$$

EL VALOR DE σ_2

$$\sigma_2 = \frac{r_{uu} - r_{ud}}{2\sqrt{\Delta t}}$$

$$\sigma_2 = \frac{r_{du} - r_{dd}}{2\sqrt{\Delta t}}$$

También

$$\sigma_2 = \frac{r_{uu} - r_{dd}}{4\sqrt{\Delta t}}$$

EJEMPLO DEL USO DEL MODELO BLACK-DERMAN-TOY BONO CALLABLE

Este ejemplo es el mismo que puede ser encontrado en MINA y XIAO “Return to Risk Metrics: The Evolution of a Standard” Risk Metric Group 2001 capitulo 5 punto 5.4.3

ESTRUCTURA TEMPORAL DE TASAS DE INTERÉS ETTI EN EL MOMENTO $t = 0$

En el momento $t = 0$ nos dan los siguientes precios de BONOS CERO CUPÓN

PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	PRECIO BONO CERO CUPÓN con VALOR NOMINAL 100\$ $P(0; t)$
0,25	98,48\$
0,5	96,96\$
0,75	

Por lo cual armamos la ETTI de $t = 0$

Si tenemos en cuenta la formula

$$i = \frac{CAPITAL\ FINAL}{CAPITAL\ INICIAL} - 1$$

Luego

$$r_{90} = \frac{VN}{p(0; 0,25)} - 1 = \frac{100\$}{98,48\$} - 1$$

$$r_{90} = 0,015434606$$

$$r_{180} = \frac{VN}{p(0; 0,5)} - 1 = \frac{100\$}{96,96\$} - 1$$

$$r_{180} = 0,031353135$$

Todas son tasas cupones efectivas, por equivalencia de tasas las llevamos a tasas cupones efectivas anuales

$$(1 + r_{365}) = (1 + r_{90})^4$$

$$r_{365} = (1 + r_{90})^4 - 1$$

$$r_{365} = (1 + 0,015434606)^4 - 1 = 0,06318255$$

$$(1 + r_{365}) = (1 + r_{180})^2$$

$$r_{365} = (1 + r_{180})^2 - 1$$

$$r_{365} = (1 + 0,031353135)^2 - 1 = 0,063689289$$

Necesitamos obtener el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en $t = 0,75$ que lo vamos a deducir del ARBOL DE TASAS DE INTERÉS que encontramos en MINA y XIAO porque allí lo tiene implícito, para lo cual usaremos la formula

$$P(0; t + 3\Delta t) = \frac{1}{(1 + r_0 \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{(1 + r_d \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{du} \times \Delta t)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times \Delta t)} \right] + \frac{1}{(1 + r_u \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{uu} \times \Delta t)} + \frac{100\$}{(1 + r_{ud} \times \Delta t)} \right] \right]$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(1 + 0,0617 \times 0,25)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{(1 + 0,0580 \times 0,25)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + 0,067 \times 0,25)} + \frac{100\$}{(1 + 0,0565 \times 0,25)} \right] + \frac{1}{(1 + 0,0674 \times 0,25)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + 0,0794 \times 0,25)} + \frac{100\$}{(1 + 0,0670 \times 0,25)} \right] \right] \\ &= 0,4924 \times \left[0,492851543 \times \left[\frac{100\$}{(1 + 0,01675)} + \frac{100\$}{(1 + 0,014125)} \right] + 0,49171385 \times \left[\frac{100\$}{(1 + 0,01985)} + \frac{100\$}{(1 + 0,01675)} \right] \right] \end{aligned}$$

Donde

$$P(0; 0,75) = 95,35\$$$

Para obtener la tasa cupón para 9 meses

$$r_{270} = \frac{VN}{p(0; 0,75)} - 1 = \frac{100\$}{95,35\$} - 1$$

$$r_{270} = 0,048767697$$

También la tasa cupón efectiva anual

$$(1 + r_{365}) = (1 + r_{270})^{\frac{4}{3}}$$

$$r_{365} = (1 + r_{270})^{\frac{4}{3}} - 1$$

$$r_{365} = (1 + 0,048767697)^{\frac{4}{3}} - 1 = 0,065546491$$

PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	TASA CUPÓN EFECTIVA ANUAL r_{365}	TASA CUPÓN EFECTIVA PARA EL PERIODO t
0,25	6,318255%	1,5434606%
0,5	6,3689289%	3,1353135%
0,75	6,5546491%	4,8767697%

Como vemos no estamos trabajando con una curva FLAT ya que las tasa cupones efectivas anuales nos son iguales para todos los plazos

Como podemos apreciar hay una estructura temporal de tasas de interés en el momento $t = 0$ sobre la que nos basaremos para analizar LA EVOLUCIÓN A LARGO DEL TIEMPO de la tasa efectiva del periodo de Δt (en nuestro caso supusimos que era igual a $\Delta t = 0,25$). Esta estructura es representativa de todo el mercado de crédito porque cualquier BONO puede ser replicado en su payoffs con la compra o venta de varios BONO CERON CUPON.

Es importante notar que para hacer un ARBOL DE TASAS DE INTERÉS nos deben dar o bien las tasas efectivas anuales, o del plazo de vencimiento, o los precios de los BONOS CERO CUPÓN.

PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	PRECIO BONO CERO CUPÓN con VALOR NOMINAL 100\$ $P(0; t)$
0,25	98,48\$
0,5	96,96\$
0,75	95,35\$

CURVA DE VOLATILIDADES

Tenemos que

$$\sigma_1 = \sigma(0; 0,25; 0,25) = 15\%$$

La volatilidad lo deducimos del ARBOL que nos da el paper de MINA Y XIAO

$$\sigma_2 = \frac{\ln \left[\frac{r_{uu}}{r_{ud}} \right]}{2 \times \sqrt{\Delta t}} = \frac{\ln \left[\frac{0,0794}{0,067} \right]}{2 \times \sqrt{0,25}} = 0,169805748$$

$$\sigma_2 = \frac{\ln \left[\frac{r_{du}}{r_{dd}} \right]}{2 \times \sqrt{\Delta t}} = \frac{\ln \left[\frac{0,067}{0,0565} \right]}{2 \times \sqrt{0,25}} = 0,170451981$$

$$\sigma_2 = \frac{\ln \left[\frac{r_{uu}}{r_{dd}} \right]}{4 \times \sqrt{\Delta t}} = \frac{\ln \left[\frac{0,0794}{0,0565} \right]}{4 \times \sqrt{0,25}} = 0,170128865$$

Como podemos ver

$$\sigma_2 = \sigma(0; 0,5; 0,25) = 17\%$$

Como podemos apreciar a medida que nos alejamos de $t = 0$ la volatilidad aumenta por lo cual se pierde poder predictivo lo cual tiene sentido

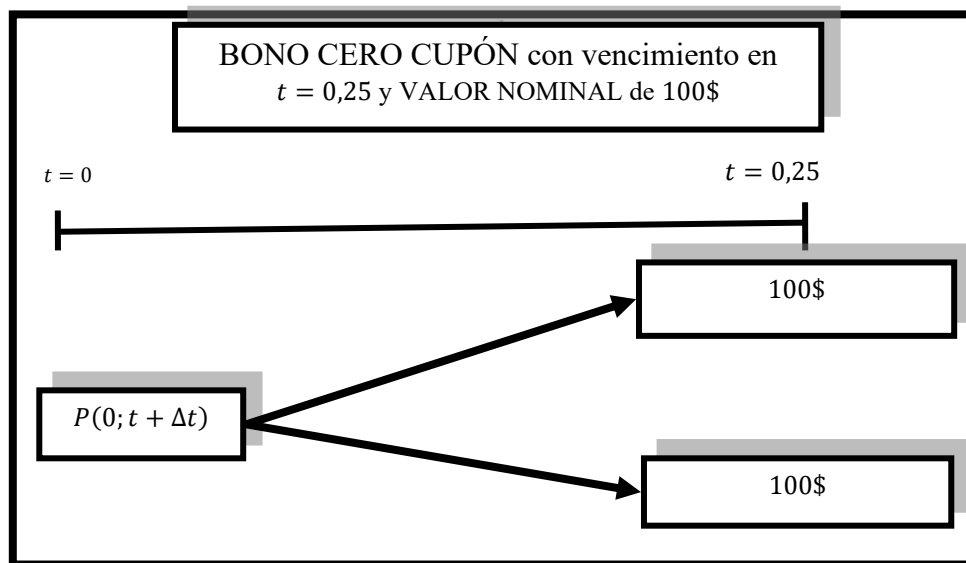
PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

Las probabilidades riesgo neutro son constante e iguales a $\frac{1}{2}$

CALCULO DEL ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS NOMINAL ANUAL

CALCULO DE r_0

Tomamos el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en 0,25 y un VALOR NOMINAL de 100\$, de manera gráfica



Por lo cual

$$P(0; t + \Delta t) = \frac{100\$}{(1 + \Delta t \times r_0)}$$

De donde despejamos r_0 para obtener su valor.

$$98,48\$ = \frac{100\$}{(1 + 0,25 \times r_0)}$$

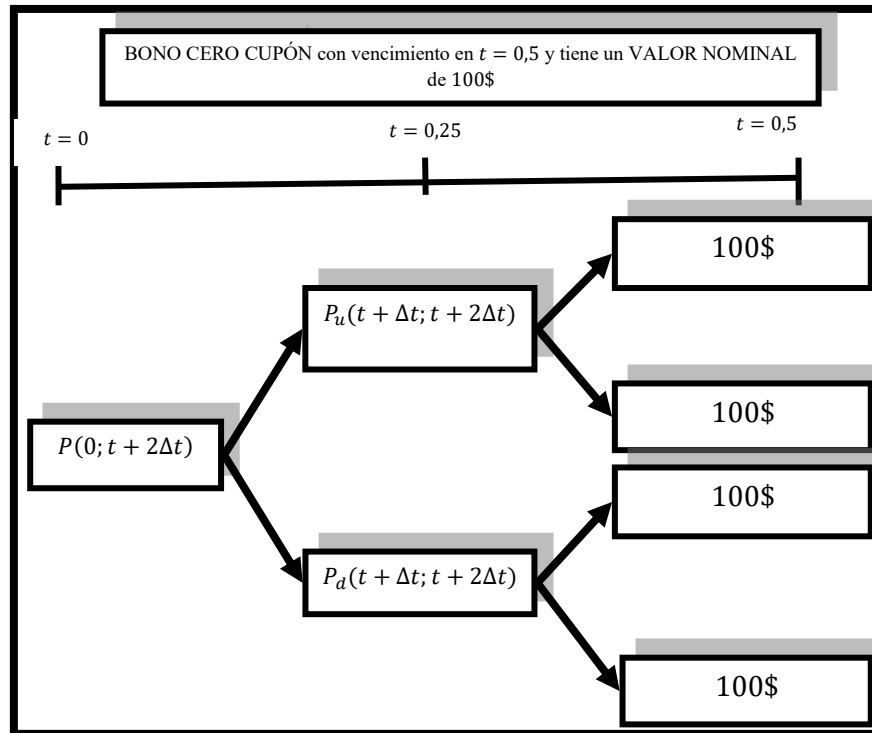
$$r_0 = \left[\frac{100\$}{98,48\$} - 1 \right] \times 4 = 0,061738424$$

En porcentajes

$$r_0 = 6,17\%$$

CALCULO DE r_d

Tomamos el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en 0,5 y un VALOR NOMINAL de 100\$, de manera gráfica



Donde

$$P(0; t + 2\Delta t) = \frac{1}{(1 + r_0 \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_d \cdot e^{2\sigma_1 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} + \frac{100\$}{(1 + r_d \times \Delta t)} \right]$$

$$r_u = r_d \cdot e^{2\sigma_1 \sqrt{\Delta t}}$$

Por lo cual

$$96,96\$ = \frac{1}{(1 + 0,061738424 \times 0,25)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_d \cdot e^{2 \times 0,15 \sqrt{0,25} \times 0,25})} + \frac{100\$}{(1 + r_d \times 0,25)} \right]$$

$$196,9130788\$ = \left[\frac{100\$}{(1 + r_d \cdot e^{2 \times 0,15 \sqrt{0,25} \times 0,25})} + \frac{100\$}{(1 + r_d \times 0,25)} \right]$$

$$196,9130788\$ = \left[\frac{100\$}{(1 + r_d \times 0,29045856)} + \frac{100\$}{(1 + r_d \times 0,25)} \right]$$

$$\frac{196,9130788\$}{100\$} = \left[\frac{1}{(1 + r_d \times 0,29045856)} + \frac{1}{(1 + r_d \times 0,25)} \right]$$

$$1,969130788 = \left[\frac{1}{(1 + r_d \times 0,29045856)} + \frac{1}{(1 + r_d \times 0,25)} \right]$$

$$\frac{1}{(1 + r_d \times 0,29045856)} + \frac{1}{(1 + r_d \times 0,25)} = \frac{(1 + r_d \times 0,25) + (1 + r_d \times 0,29045856)}{(1 + r_d \times 0,29045856) \times (1 + r_d \times 0,25)}$$

$$\frac{(1 + r_d \times 0,25) + (1 + r_d \times 0,29045856)}{(1 + r_d \times 0,29045856) \times (1 + r_d \times 0,25)} = \frac{2 + 0,54045856 \times r_d}{1 + r_d \times 0,25 + r_d \times 0,29045856 + r_d^2 \times 0,07261464}$$

$$\frac{(1 + r_d \times 0,25) + (1 + r_d \times 0,29045856)}{(1 + r_d \times 0,29045856) \times (1 + r_d \times 0,25)} = \frac{2 + 0,54045856 \times r_d}{1 + r_d \times 0,54045856 + r_d^2 \times 0,07261464}$$

Por lo tanto

$$1,969130788 = \frac{2 + 0,54045856 \times r_d}{1 + r_d \times 0,54045856 + r_d^2 \times 0,07261464}$$

$$1,969130788 \times [1 + r_d \times 0,54045856 + r_d^2 \times 0,07261464] = 2 + 0,54045856 \times r_d$$

$$1,969130788 + r_d \times 1,06423359 + r_d^2 \times 0,142987723 = 2 + 0,54045856 \times r_d$$

$$r_d^2 \times 0,142987723 + r_d \times 0,52377503 - 0,030869212 = 0$$

Por lo cual

$$r_d = 0,058017117$$

La otra raíz es negativa. Si lo llevamos a porcentajes

$$r_d = 5,80\%$$

Por lo tanto

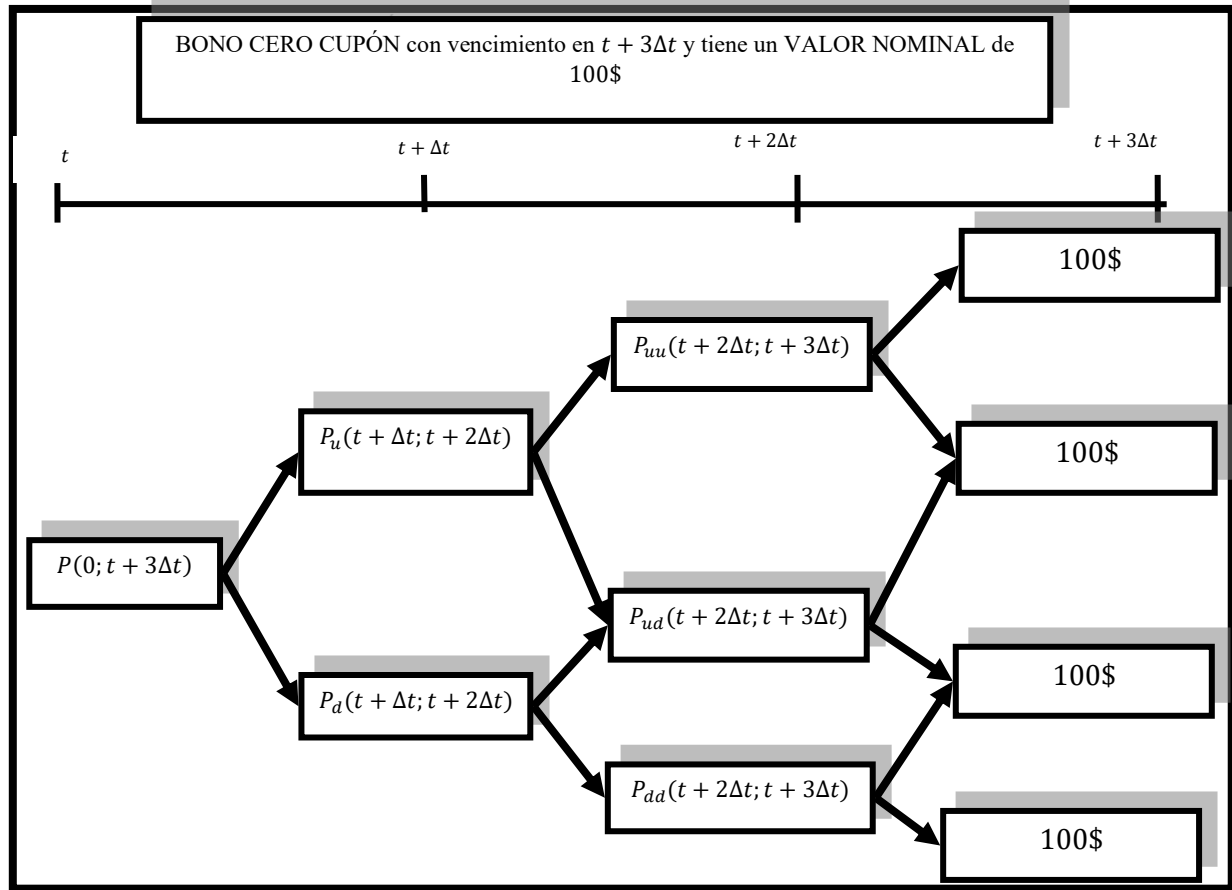
$$r_u = 0,058017117e^{2 \times 0,15 \times \sqrt{0,25}} = 0,067406273$$

Si lo llevamos a porcentajes

$$r_u = 6,74\%$$

CALCULO DE r_{dd}

Tomamos el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en 0,75 y un VALOR NOMINAL de 100\$, de manera gráfica



Tenemos que

$$\begin{aligned}
 P(0; t + 3\Delta t) &= \frac{1}{(1 + r_0 \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \\
 &\times \left[\frac{1}{(1 + r_d \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times \Delta t)} \right] \right. \\
 &\left. + \frac{1}{(1 + r_u \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{4\sigma_2 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} \right] \right] \\
 r_{uu} &= r_{dd} \cdot e^{4\sigma_2 \sqrt{\Delta t}} \\
 r_{du} &= r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2 \sqrt{\Delta t}}
 \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}
 95,35\$ &= \frac{1}{(1 + 0,061738424 \times 0,25)} \times \frac{1}{2} \\
 &\times \left[\frac{1}{(1 + 0,058017117 \times 0,25)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2 \times 0,17 \sqrt{0,25}} \times 0,25)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 0,25)} \right] \right. \\
 &\left. + \frac{1}{(1 + 0,067406273 \times 0,25)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{4 \times 0,17 \sqrt{0,25}} \times 0,25)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2 \times 0,17 \sqrt{0,25}} \times 0,25)} \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$95,35\$ = 0,4924 \times \left[0,492851543 \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2 \times 0,17 \sqrt{0,25}} \times 0,25)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 0,25)} \right] \right. \\ \left. + 0,49171385 \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{4 \times 0,17 \sqrt{0,25}} \times 0,25)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2 \times 0,17 \sqrt{0,25}} \times 0,25)} \right] \right]$$

$$95,35\$ = 0,4924 \times \left[0,492851543 \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 0,296326212)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 0,25)} \right] \right. \\ \left. + 0,49171385 \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 0,351236897)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 0,296326212)} \right] \right]$$

$$\frac{95,35\$}{49,24\$} = \left[0,492851543 \times \left[\frac{1}{(1 + r_{dd} \times 0,296326212)} + \frac{1}{(1 + r_{dd} \times 0,25)} \right] \right. \\ \left. + 0,49171385 \times \left[\frac{1}{(1 + r_{dd} \times 0,351236897)} + \frac{1}{(1 + r_{dd} \times 0,296326212)} \right] \right]$$

$$1,936433794 = \frac{0,492851543}{(1 + r_{dd} \times 0,25)} + \frac{0,492851543}{(1 + r_{dd} \times 0,296326212)} + \frac{0,49171385}{(1 + r_{dd} \times 0,351236897)} + \frac{0,49171385}{(1 + r_{dd} \times 0,296326212)}$$

$$1,936433794 = \frac{0,492851543}{(1 + r_{dd} \times 0,25)} + \frac{0,984565393}{(1 + r_{dd} \times 0,296326212)} + \frac{0,49171385}{(1 + r_{dd} \times 0,351236897)}$$

NUMERADOR

$$0,492851543 \times (1 + r_{dd} \times 0,296326212) \times (1 + r_{dd} \times 0,351236897) \\ + 0,984565393 \times (1 + r_{dd} \times 0,25) \times (1 + r_{dd} \times 0,351236897) \\ + 0,49171385 \times (1 + r_{dd} \times 0,25) \times (1 + r_{dd} \times 0,296326212)$$

PRIMER TERMINO

$$(0,492851543 + r_{dd} \times 0,14604483) \times (1 + r_{dd} \times 0,351236897) \\ 0,492851543 + r_{dd} \times 0,14604483 + r_{dd} \times 0,173107646 + r_{dd}^2 \times 0,051296332 \\ 0,492851543 + r_{dd} \times 0,319152476 + r_{dd}^2 \times 0,051296332$$

SEGUNDO TERMINO

$$(0,984565393 + r_{dd} \times 0,246141348) \times (1 + r_{dd} \times 0,351236897) \\ 0,984565393 + r_{dd} \times 0,246141348 + r_{dd} \times 0,345815693 + r_{dd}^2 \times 0,086453923 \\ 0,984565393 + r_{dd} \times 0,591957041 + r_{dd}^2 \times 0,086453923$$

TERCER TERMINO

$$(0,49171385 + r_{dd} \times 0,122928462) \times (1 + r_{dd} \times 0,296326212) \\ 0,49171385 + r_{dd} \times 0,122928462 + r_{dd} \times 0,145707702 + r_{dd}^2 \times 0,036426925$$

$$0,49171385 + r_{dd} \times 0,268636164 + r_{dd}^2 \times 0,036426925$$

TOTAL

$$1,9691390786 + r_{dd} \times 1,179745681 + r_{dd}^2 \times 0,17417718$$

DENOMINADOR

$$(1 + r_{dd} \times 0,25) \times (1 + r_{dd} \times 0,296326212) \times (1 + r_{dd} \times 0,351236897)$$

EL PRIMER PRODUCTO

$$(1 + r_{dd} \times 0,25) \times (1 + r_{dd} \times 0,296326212)$$

DA COMO RESULTADO

$$= 1 + r_{dd} \times 0,25 + r_{dd} \times 0,296326212 + r_{dd}^2 \times 0,074081553$$

EL SEGUNDO PRODUCTO

$$(1 + r_{dd} \times 0,546326212 + r_{dd}^2 \times 0,074081553) \times (1 + r_{dd} \times 0,351236897)$$

DA COMO RESULTADO

$$1 + r_{dd} \times 0,546326212 + r_{dd}^2 \times 0,074081553 + r_{dd} \times 0,351236897 + r_{dd}^2 \times 0,191889923 + r_{dd}^3 \times 0,026020174$$

Por lo cual

$$1 + r_{dd} \times 0,897563109 + r_{dd}^2 \times 0,265971476 + r_{dd}^3 \times 0,026020174$$

Si multiplicamos este resultado por el valor 1,936433794 obtenemos

$$1,936433794 + r_{dd} \times 1,738071537 + r_{dd}^2 \times 0,515036154 + r_{dd}^3 \times 0,050386344$$

RESULTADO HASTA AHORA

$$1,936433794 + r_{dd} \times 1,738071537 + r_{dd}^2 \times 0,515036154 + r_{dd}^3 \times 0,050386344$$

$$= 1,9691390786 + r_{dd} \times 1,179745681 + r_{dd}^2 \times 0,17417718$$

Igualando a cero

$$-0,032705284 + r_{dd} \times 0,558325856 + r_{dd}^2 \times 0,340858974 + r_{dd}^3 \times 0,050386344 = 0$$

$$r_{dd} = 0,056604925$$

En porcentaje

$$r_{dd} = 5,66\%$$

Se asocia la diferencia a errores de redondeo

También

$$r_{uu} = 0,056604925 \cdot e^{4 \times 0,17 \sqrt{0,25}} = 0,079526952$$

En porcentaje

$$r_{uu} = 7,95\%$$

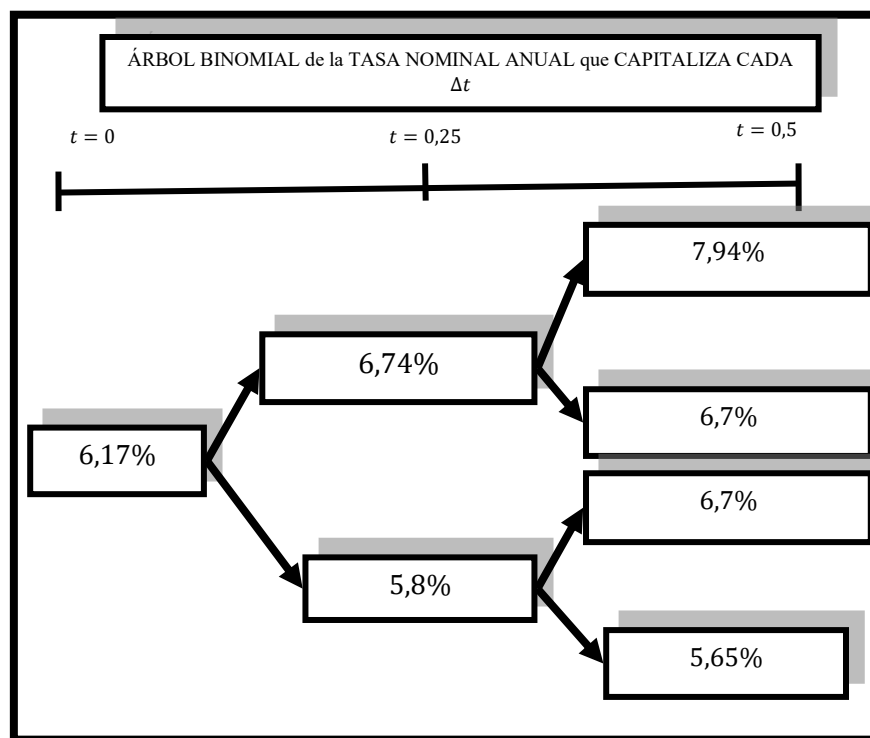
$$r_{du} = 0,056604925 \cdot e^{2 \times 0,17 \sqrt{0,25}} = 0,067094092$$

En porcentaje

$$r_{du} = 6,7\%$$

Tenemos una muy pequeñas diferencias con los valores que nos dan MINA y XIAO pero usaremos para el ARBOL DE TASAS

ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS



VALUACIÓN DE UN BONO

En nuestro mundo imaginario el mercado de crédito está explicado únicamente por el mercado de BONOS, no hay préstamos bancarios ni depósitos. En caso de tomar un préstamo o hacer un depósito deberíamos tomar una posición SHORT en bonos o una posición LONG en bonos.

Todas las clases de bonos que hay en el mercado, pueden ser replicados por una cartera de BONOS CERO CUPÓN con diferentes vencimientos y determinadas posiciones a tomar. Como hacemos el supuesto de que hay divisibilidad en el mercado de crédito, luego, el VALOR NOMINAL es igual para todos los plazos, ya que se pueden comprar cantidades fraccionarias.

Primero vamos a valorar un bono común y a partir de este, luego, valuaremos el BONO CALLABLE.

SEA EL BONO A

VALOR NOMINAL 100\$ y vencimiento en 3 meses

SEA EL BONO B

VALOR NOMINAL 100\$ y vencimiento en 9 meses

Los precios de estos bonos los calculamos al inicio del ejemplo

PRIMER PASO

Es necesario replicar dos BONOS CERO CUPÓN, uno con VALOR NOMINAL 5\$ y fecha de vencimiento en 3 meses y otro con VALOR NOMINAL 105\$ y vencimiento en 9 meses. Para replicar el primer bono se compra $\frac{1}{20}$ del BONO A y para replicar el segundo es necesario comprar $\frac{21}{20}$ del BONO B.

SEGUNDO PASO

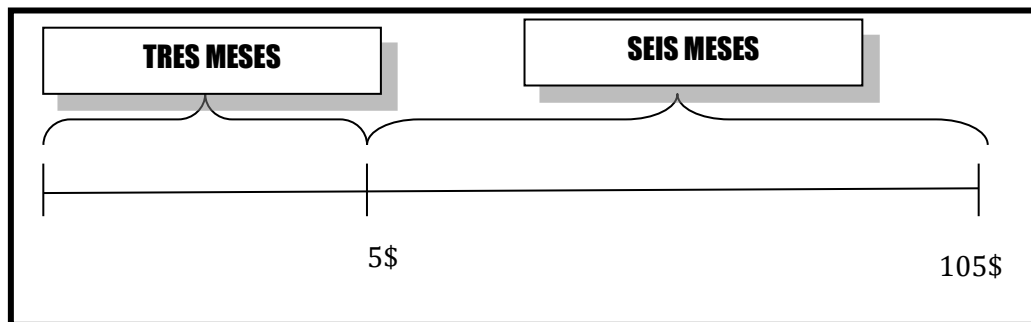
Es necesario replicar un BONO BULLET con una tasa cupón del 10% que paga intereses cada seis meses y VALOR NOMINAL de 100\$ y vence dentro de 9 meses. De la última vez que se pago intereses pasaron tres meses.

Recordando que la tasa cupón es NOMINAL ANUAL por lo cual

$$\frac{0,1}{2} = 0,05$$

Los interés a pagar son iguales a

$$100\$ \times 0,05 = 5\$$$



Para replicar el payoff del BONO BULLET es necesario armar una cartera compuesta por una posición LONG o comprada en un BONO CERO CUPÓN de VALOR NOMINAL de 5 \$ con vencimiento en 3 meses y tomar una posición LONG o comprada en un BONO CERO CUPÓN de VALOR NOMINAL de 105\$ con vencimiento en 9 meses. Estos bonos los replicamos en el primer paso.

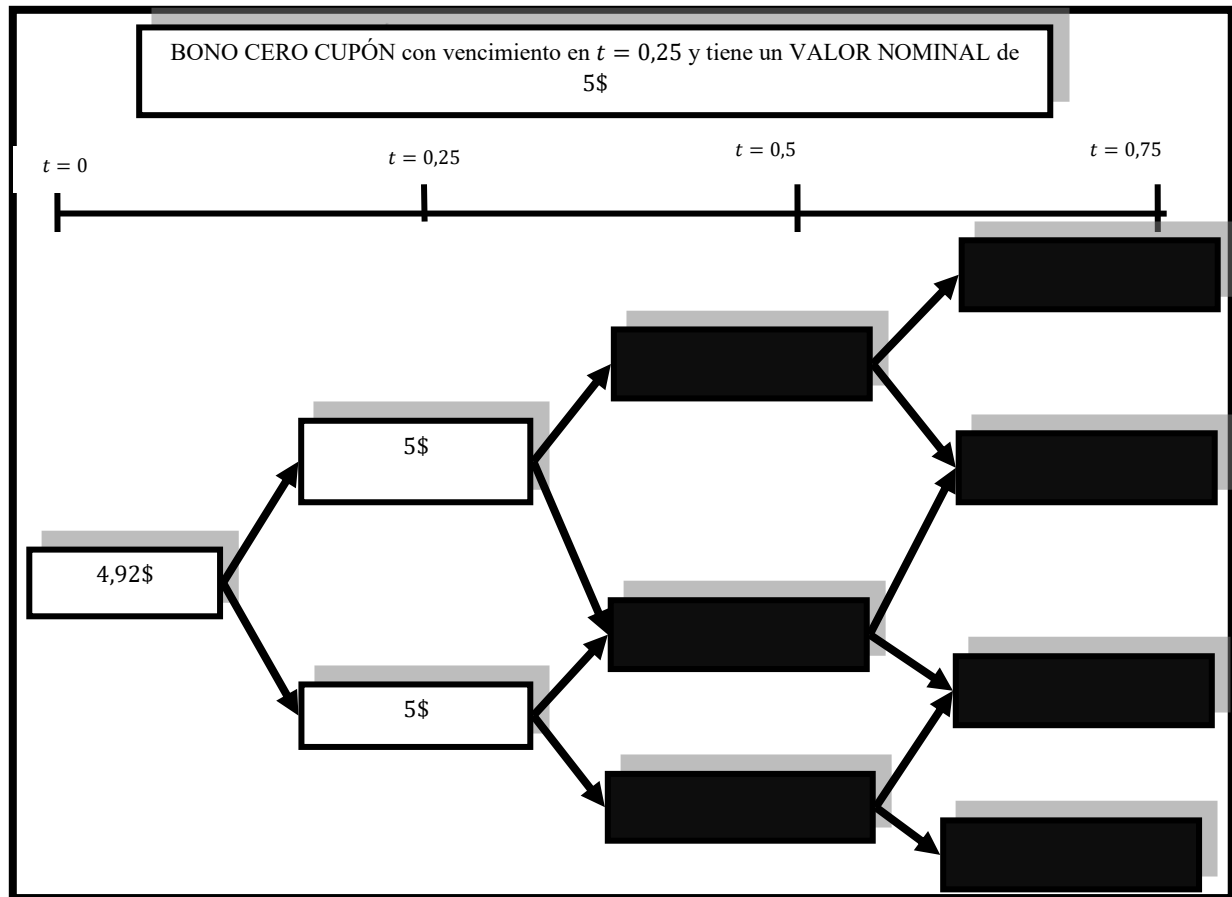
Se hace necesario construir el árbol de ambos bonos para de esta manera construir a partir de ellos el ÁRBOL DE BONO BULLET.

Hacemos los descuentos utilizando el ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS que construimos.

ÁRBOL DEL BONO CERO CUPÓN DE VALOR NOMINAL DE 5\$ Y VENCIMIENTO EN 3 MESES

$$\frac{5\$}{1 + r_0 \times \Delta t} = \frac{5\$}{1 + 0,0617 \times 0,25} = 4,92\$$$

EL PRECIO DEL BONO ES IGUAL A 4,92\$



ÁRBOL DEL BONO CERO CUPÓN DE VALOR NOMINAL DE 105\$ Y VENCIMIENTO EN 9 MESES

$$P_{uu} = \frac{105\$}{1 + r_{uu} \times \Delta t} = \frac{105\$}{1 + 0,0794 \times 0,25} = 102,96\$$$

$$P_{ud} = \frac{105\$}{1 + r_{ud} \times \Delta t} = \frac{105\$}{1 + 0,067 \times 0,25} = 103,27\$$$

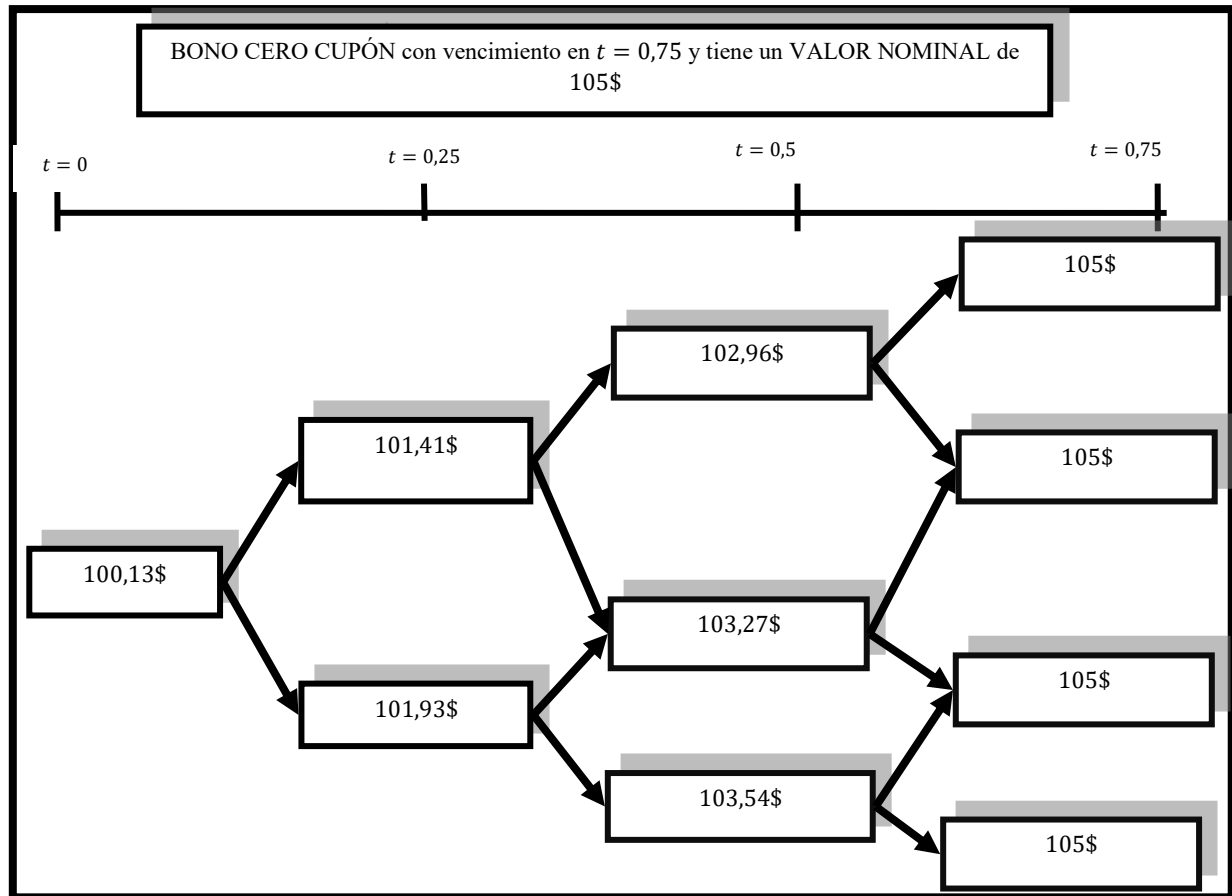
$$P_{dd} = \frac{105\$}{1 + r_{dd} \times \Delta t} = \frac{105\$}{1 + 0,0565 \times 0,25} = 103,54\$$$

$$P_u = \frac{\left[P_{uu} \times \frac{1}{2} + P_{ud} \times \frac{1}{2} \right]}{1 + r_u \times \Delta t} = \frac{\left[102,96\$ \times \frac{1}{2} + 103,27\$ \times \frac{1}{2} \right]}{1 + 0,0674 \times 0,25} = 101,41\$$$

$$P_d = \frac{\left[P_{ud} \times \frac{1}{2} + P_{dd} \times \frac{1}{2}\right]}{1 + r_d \times \Delta t} = \frac{\left[103,27\$ \times \frac{1}{2} + 103,54\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,058 \times 0,25} = 101,93\$$$

$$P_0 = \frac{\left[P_u \times \frac{1}{2} + P_d \times \frac{1}{2}\right]}{1 + r_0 \times \Delta t} = \frac{\left[101,41\$ \times \frac{1}{2} + 101,93\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,0617 \times 0,25} = 100,13\$$$

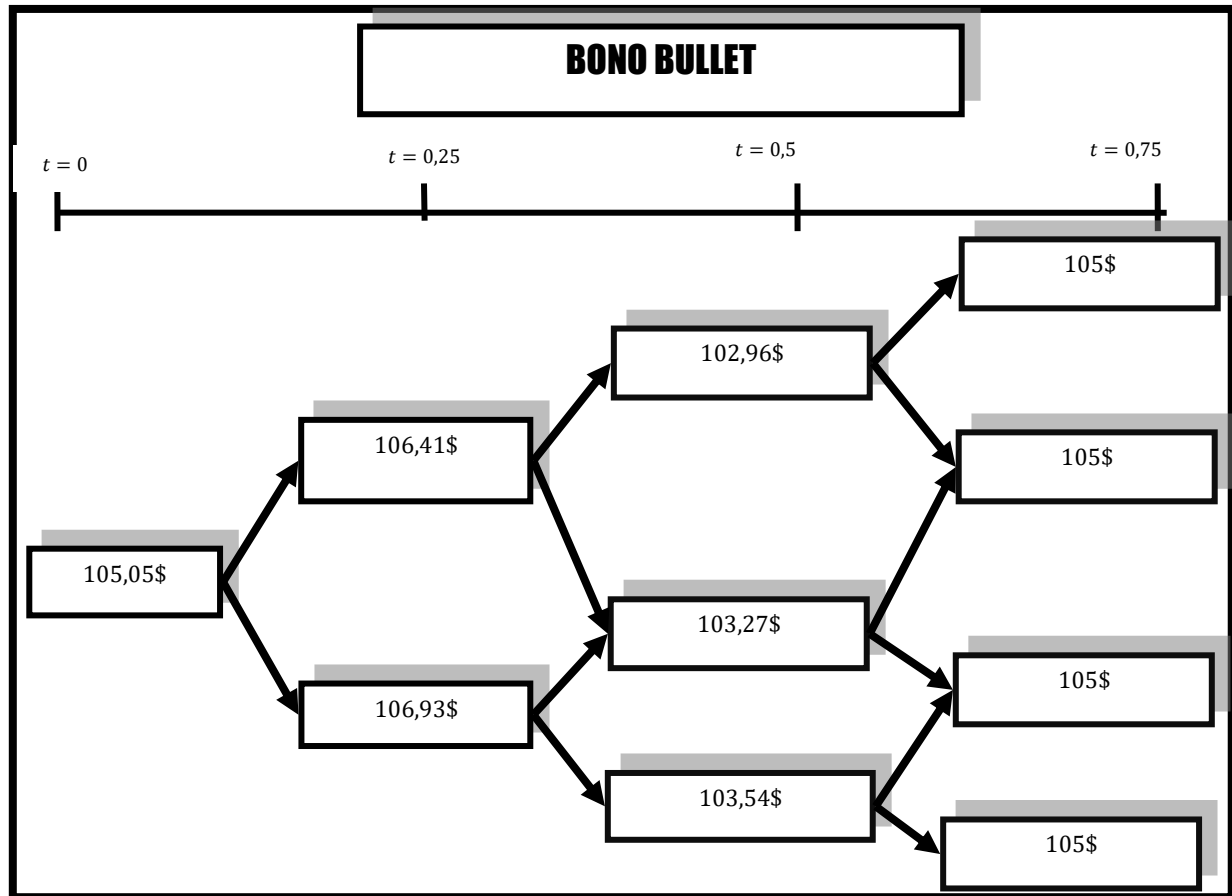
EL PRECIO DEL BONO ES IGUAL A 100,13\$



ÁRBOL DE BONO BULLET

El árbol surge de la suma de los dos árboles que construimos. Por lo tanto el precio del BONO BULLET es igual la suma de los precios de los dos BONOCERO CUPÓN

EL PRECIO DEL BONO ES IGUAL A 105,05\$



DEFINICIÓN DE BONO CALLABLE

Un BONO CALLABLE es un bono que concede el derecho al emisor del mismo a rescatar el mismo antes de su vencimiento en una fecha especificada o grupo de fechas especificadas en las condiciones de emisión (CALL DATES). El rescate se realiza a precios especificados (CALL PRICES)

CONDICIONES DE EMISIÓN DEL BONO CALLABLE

El BONO CALLABLE que valuaremos tiene iguales condiciones que el PLAIN VANILLA bono o el BONO BULLET que valuamos en el anterior punto. Se agregan por supuesto la CALL DATES y CALL PRICES

CALL DATE

Dentro de tres meses

CALL PRICE

El precio limpio o CLEAN PRICES es igual a 101,5\$. Pero necesitamos convertir el precio limpio a precio sucio o DIRTY PRICES sumándole los intereses acumulados del periodo que son iguales a 5\$, es un completo cupón porque la fecha de cobro del mismo cae en la misma fecha del rescate, por lo cual el precio sucio es igual a 106,5\$

ÁRBOL DEL BONO CALLABLE

Para el caso de un BONO CALLABLE necesitamos verificar en el proceso de descuento si la fecha correspondiente a un nodo es una CALL DATE. Si es así, y el precio futuro del bono es más grande que el CALL PRICE, luego, se

coloca el precio CALL PRICE porque es el precio en que se puede rescatar el bono. Una vez realizado el cambio se continúa con el proceso de descuento.

La fecha CALL DATE es en el momento $t = 0,25$. Por lo cual, analizamos las distintas posibilidades de payoffs

$$P_u = 106,41\$$$

$$P_d = 106,93\$$$

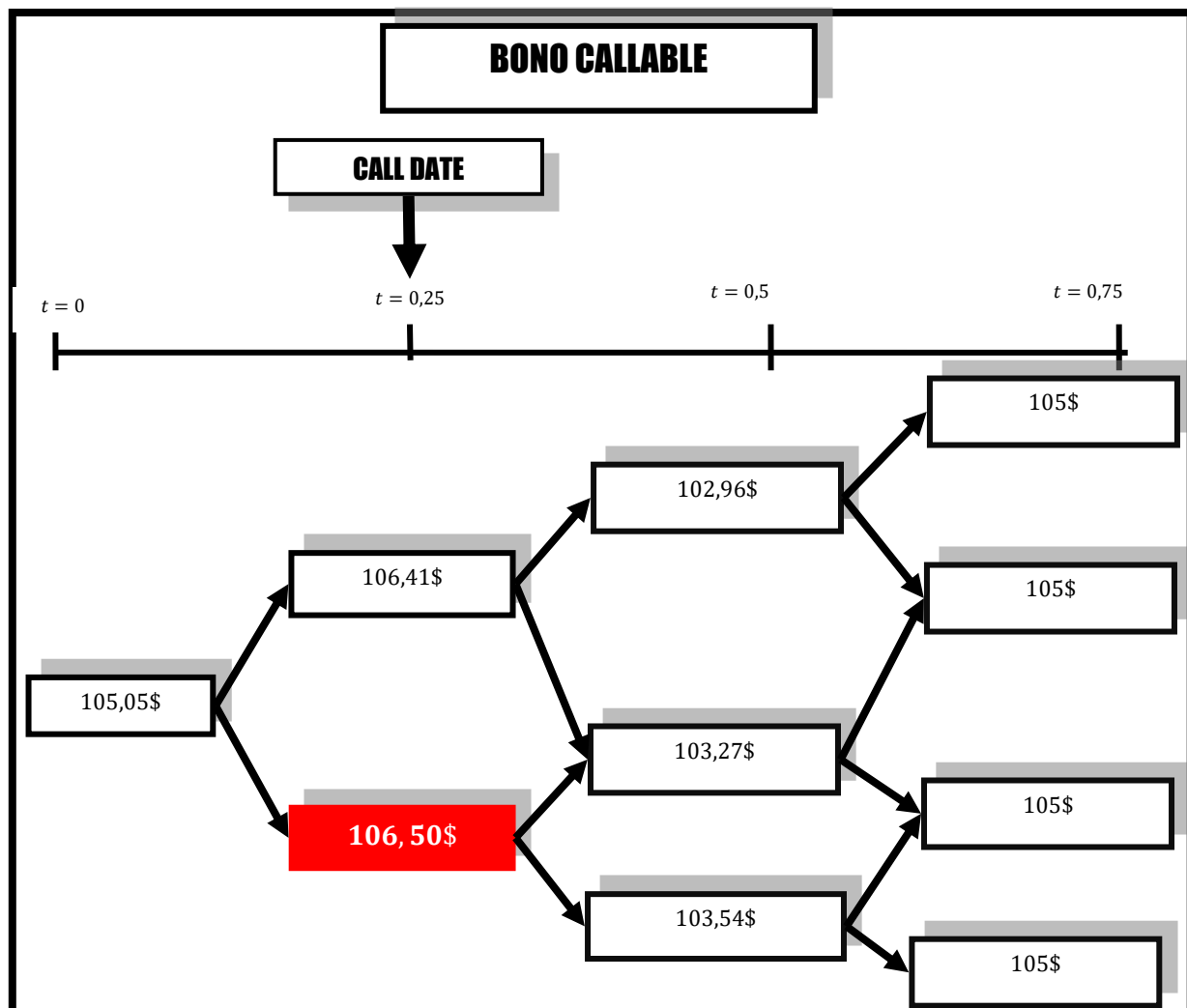
Como vemos en el ESCENARIO DOWN se excede con el CALL PRICE por lo cual hacemos el cambio y continuamos con el proceso de descuento.

CAMBIO

$$P_d = 106,50\$$$

Por lo cual el precio del BONO CALLABLE es igual a

$$P_{\text{BONO CALLABLE}} = \frac{\left[P_u \times \frac{1}{2} + P_d \times \frac{1}{2} \right]}{1 + r_0 \times \Delta t} = \frac{\left[106,41\$ \times \frac{1}{2} + 106,50\$ \times \frac{1}{2} \right]}{1 + 0,0617 \times 0,25} = 104,84\$$$



VALOR DEL DERECHO A RESCATE HOY

El derecho a rescate tiene un valor que se puede medir y es igual a la diferencia entre un bono sin tal derecho y un BONO CALLABLE

Por lo cual

$$P_{\text{BONO SIN DERECHO A RESCATE}} - P_{\text{BONO CALLABLE}}$$

En nuestro caso

$$105,05\$ - 104,84\$ = 0,21\$$$

Por lo cual cuando un bono concede el derecho de rescate a su emisor pierde un valor de 0,21\$. Esto ocurre porque el emisor puede rescatar el bono a 106,5\$ en el momento $t = 0,25$ si ocurre el ESCENARIO DOWN pero el tenedor del bono lo pudo haber colocado a un precio mayor en nuestro ejemplo a

$$P_d = 106,93\$$$

Por lo cual este derecho en el momento $t = 0$ en el momento de la compra inicial el EMISOR debe aceptar un precio menor en relación a un bono sin derecho para poder colocar el BONO CALLABLE. En este caso el valor del derecho es igual a 0,21\$, el cual, es el valor al que debe renunciar el EMISOR.

EJEMPLO DEL USO DEL MODELO BLACK-DERMAN-TOY CAPLET 1

El CAPLET es una opción de compra europea CALL de tasa de interés, donde los conceptos son iguales a las del FRA en futuros, pero teniendo en cuenta que estamos trabajando con una opción.

El payoffs al vencimiento T es igual a

$$VN \times \Delta t \times \max[r_T - r_K; 0]$$

Donde r_K es la tasa de ejercicio y r_T es la tasa que efectivamente ocurrió en el vencimiento T . Ambas son NOMINALES ANUALES que capitaliza cada Δt periodo. También tenemos VN que es el NOCIONAL que se paga por cada 1% que la tasa de ejercicio efectiva este por encima de la tasa efectiva que ocurrió en el mercado.

CONDICION DE EMISIÓN DEL CAPLET 1

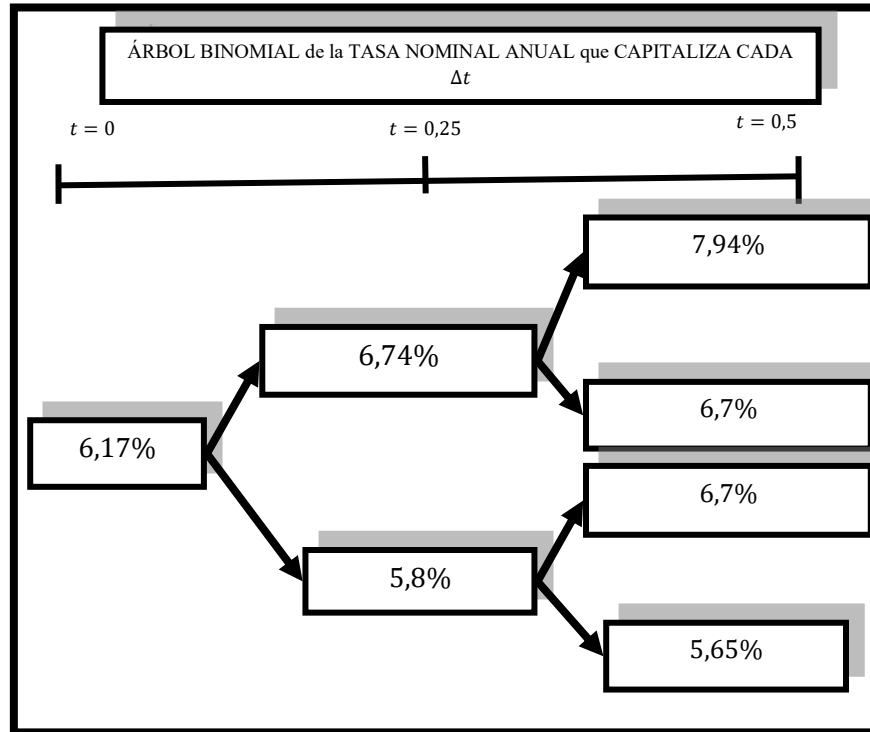
Las condiciones de emisión tienen un NOCIONAL igual a 1.000\$ y una tasa de ejercicio $r_K = 6\%$ con una fecha de vencimiento de 9 meses.

En base al ÁRBOL DE TASAS DE INRRERÉS que construimos vamos a valuar el CAPLET.

VALUACIÓN DEL CAPLET 1

Es necesario como hacíamos con ÁRBOLES BINOMIALES que obtengamos el ARBOL DEL CAPLET.

ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS



CAPLET 1

Para el cálculo del payoffs al vencimiento del CAPLET utilizamos la formula

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[r_T - 6\%; 0]$$

Por lo cual

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[7,94\% - 6\%; 0] = 1000\$ \times 0,25 \times 0,0194 = 4,85\$$$

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[6,7\% - 6\%; 0] = 1000\$ \times 0,25 \times 0,07 = 17,5\$$$

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[5,65\% - 6\%; 0] = 0\$$$

PASO IMPORTANTE

Supongamos que vamos a tomar un crédito de 1.000\$ en el momento $t = 0,5$ y lo vamos a pagar en $t = 0,75$, la tasa de interés que vamos a pagar por el crédito es r_T la cual rige para el periodo que va desde $t = 0,5$ hasta $t = 0,75$. Es importante diferenciar entre el periodo inicial en que rige la tasa y el final.

Si nosotros tomamos una posición LONG en un CAPLET para cubrirnos ya que esperamos que la tasa r_T suba mucho en el futuro, luego lo haríamos con vencimiento en $t = 0,75$, porque debemos esperar a que la tasa actúe y nos daría una compensación igual a

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[r_T - 6\%; 0]$$

Si la tasa fuera como lo dice nuestro ejemplo igual al $r_T = 7,94\%$ por lo tanto el interés a pagar es

$$0,0794 \times 0,25 \times 1.000\$ = 19,85\$$$

Estos intereses se los paga 3 meses después.

Con una tasa $r_K = 6\%$

$$0,06 \times 0,25 \times 1.000\$ = 15\$$$

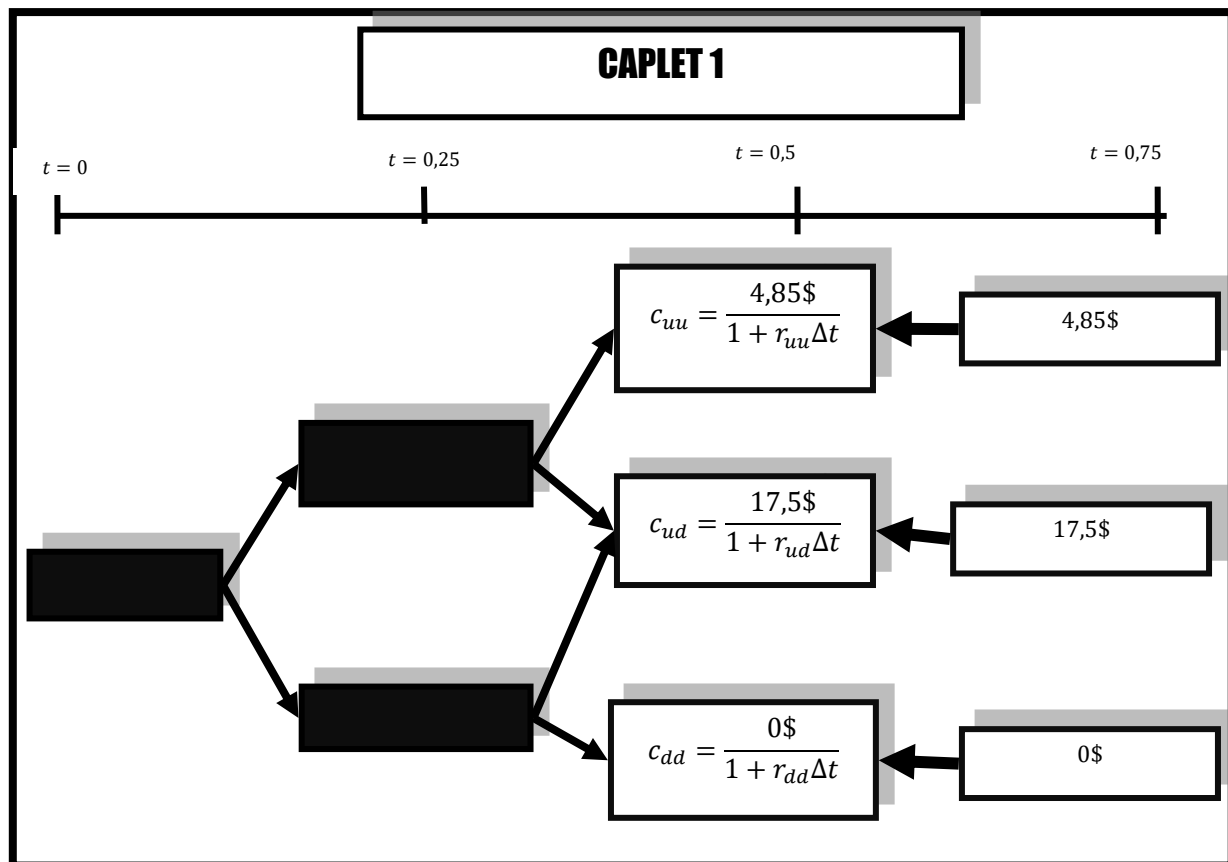
Por lo cual el CAPLET ofrece un payoff igual a 4,85\$

Nos tiene que compensar en este momento porque es el momento en que pagamos el préstamo y también porque tiene que pasar un tiempo hasta que se acrediten los intereses

Pero la tasa comienza a regir a partir de $t = 0,5$ ¿porqué esperar hasta el final del periodo para recibir el pago si se conoce el valor que toma r_T en el momento $t = 0,5$?, luego, actualizamos el payoff hasta $t = 0,5$ por lo cual

$$\frac{1000\$ \times 0,25 \times \max[r_T - 6\%; 0]}{1 + r_t \Delta t}$$

Esto lo hacemos para no esperar hasta el final del periodo de vigencia de la tasa r_T



En el momento $t = 0,5$

Calculo de c_{uu}

$$c_{uu} = \frac{4,85\$}{1 + 0,0794 \times 0,25} = 4,76\$$$

Calculo de c_{ud}

$$c_{ud} = \frac{17,5\$}{1 + 0,067 \times 0,25} = 17,21\$$$

Calculo de c_{dd}

$$c_{dd} = \frac{0\$}{1 + 0,0565 \times 0,25} = 0\$$$

VALOR DEL CAPLET EN CADA NODO

$$\boxed{E_{\pi^{RN}}(c_t) \cdot FD_t}$$

Las probabilidades riesgo neutro π^{RN} como mencionamos nos vienen dadas.

En el momento $t = 0,25$

Calculo de c_u

$$c_u = \frac{\left[4,76\$ \times \frac{1}{2} + 17,21\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,0674 \times 0,25} = 10,80\$$$

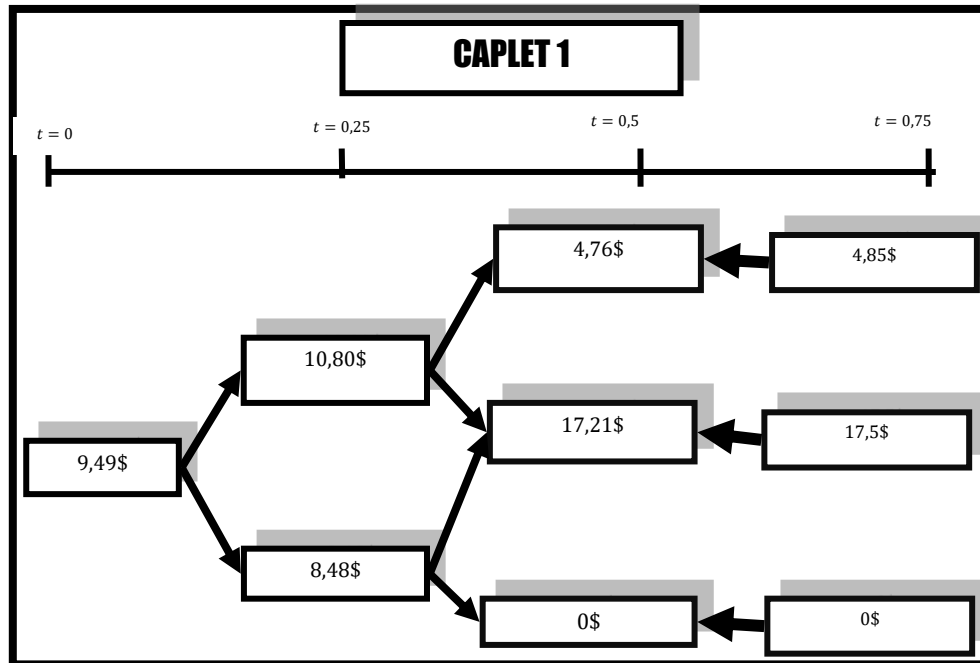
Calculo de c_d

$$c_d = \frac{\left[17,21\$ \times \frac{1}{2} + 0\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,058 \times 0,25} = 8,48\$$$

En el momento $t = 0$

Calculo c_0

$$c_0 = \frac{\left[10,80\$ \times \frac{1}{2} + 8,48\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,0617 \times 0,25} = 9,49\$$$



CONDICION DE EMISIÓN DEL CAPLET 2

Las condiciones de emisión tienen un NOCIONAL igual a 1.000\$ y una tasa de ejercicio $r_k = 6\%$ con una fecha de vencimiento de 6 meses.

VALUACIÓN DEL CAPLET 2

Para el cálculo del payoffs al vencimiento del CAPLET utilizamos la formula

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[r_T - 6\%; 0]$$

Por lo cual

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[6,74\% - 6\%; 0] = 1000\$ \times 0,25 \times 0,0674 = 16,85\$$$

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[5,80\% - 6\%; 0] = 0\$$$

En el momento $t = 0,25$

Calculo de c_u

$$c_u = \frac{16,85\$}{1 + 0,0674 \times 0,25} = 16,57\$$$

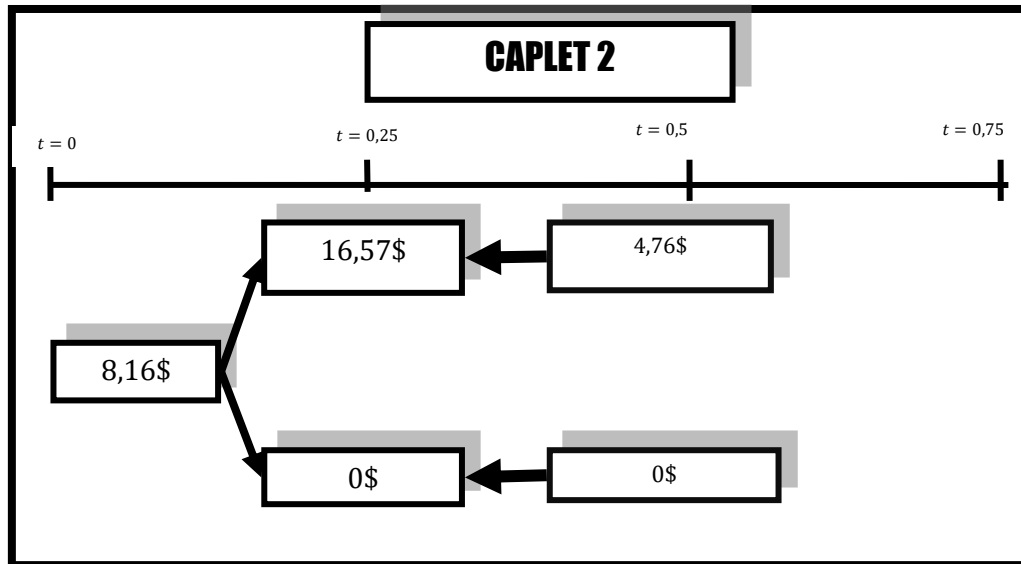
Calculo de c_d

$$c_d = \frac{0}{1 + 0,058 \times 0,25} = 0\$$$

En el momento $t = 0$

Calculo c_0

$$c_0 = \frac{\left[16,57\$ \times \frac{1}{2} + 0\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,0617 \times 0,25} = 8,16\$$$



EL CAP COMO UN PORTAFOLIO DE CAPLET

Un CAP provee un payoffs cuando la tasa de interés de mercado es más grande que cierta tasa.

Consideramos un CAP con una vida de T , un principal de L y una TASA CAP de R_K . Supongamos que las fechas en donde actúa el CAP son las siguientes

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$$

También se define

$$T = t_{n+1}$$

Se define R_k como la tasa de interés para el periodo entre t_k y t_{k+1} observada en el momento t_k donde

$$(1 \leq k \leq n)$$

El CAP lleva a un payoffs en el momento t_k y t_{k+1} ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) de

$$L \times \max[R_k - R_K; 0] \times (t_{k+1} - t_k)$$

Ambas R_k y R_K son TASAS NOMINALES ANUALES con capitalización en el periodo entre t_k y t_{k+1} .

La última ecuación es un CAPLET sobre la tasa de interés R_k con un payoffs ocurriendo en t_{k+1} . El CAP es un portafolio de n CAPLETS.

Las tasas LIBOR son observadas en los momentos

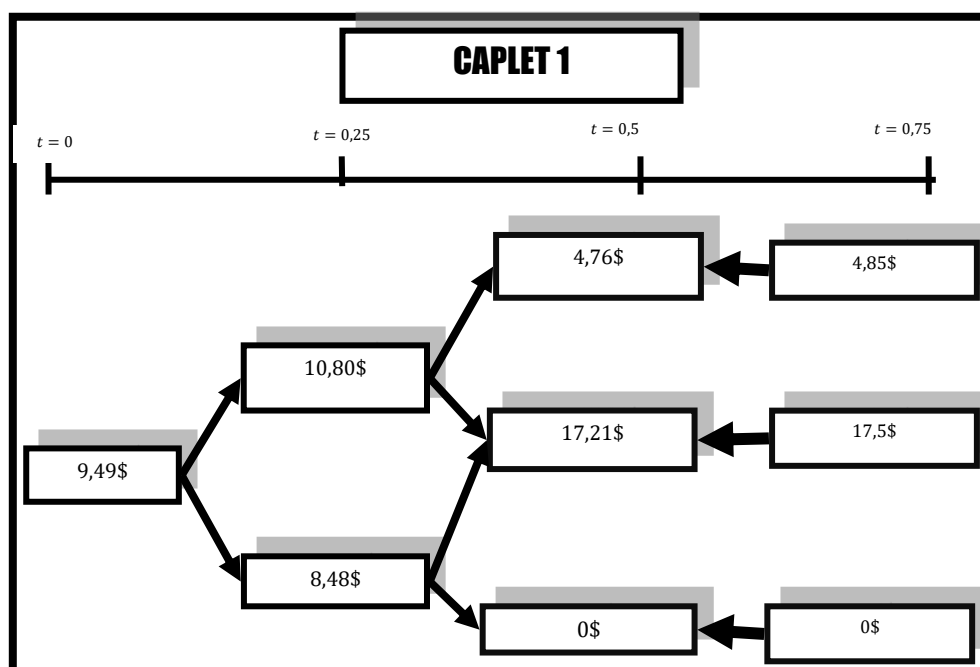
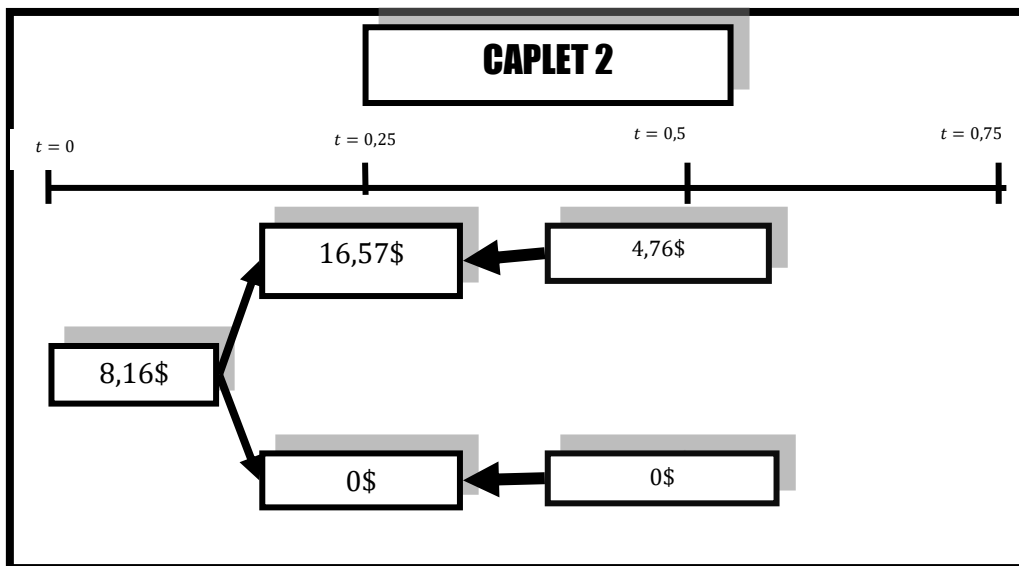
$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$$

Los correspondientes payoffs ocurren en

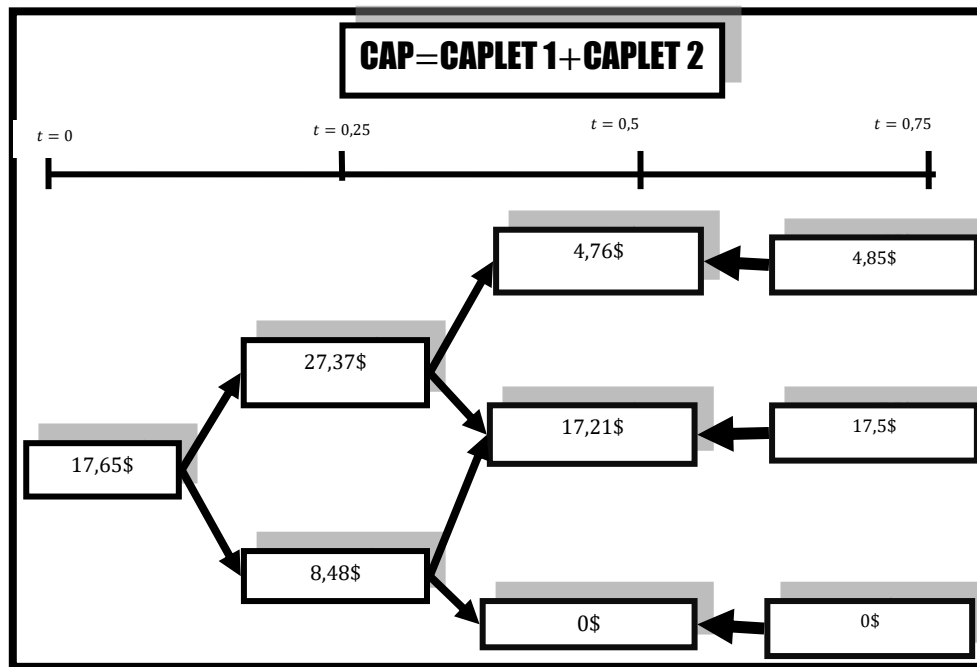
$$t_2, t_3, \dots, t_{n+1}$$

EJEMPLO

El CAP es un conjunto de CAPLET con diferentes fechas de vencimiento. En este caso vamos a armar un CAP conformado por el CAPLET 1 y el CAPLET 2. Buscamos valorar el CAP.



Para obtener los payoffs debemos sumar de ambos CAPLET



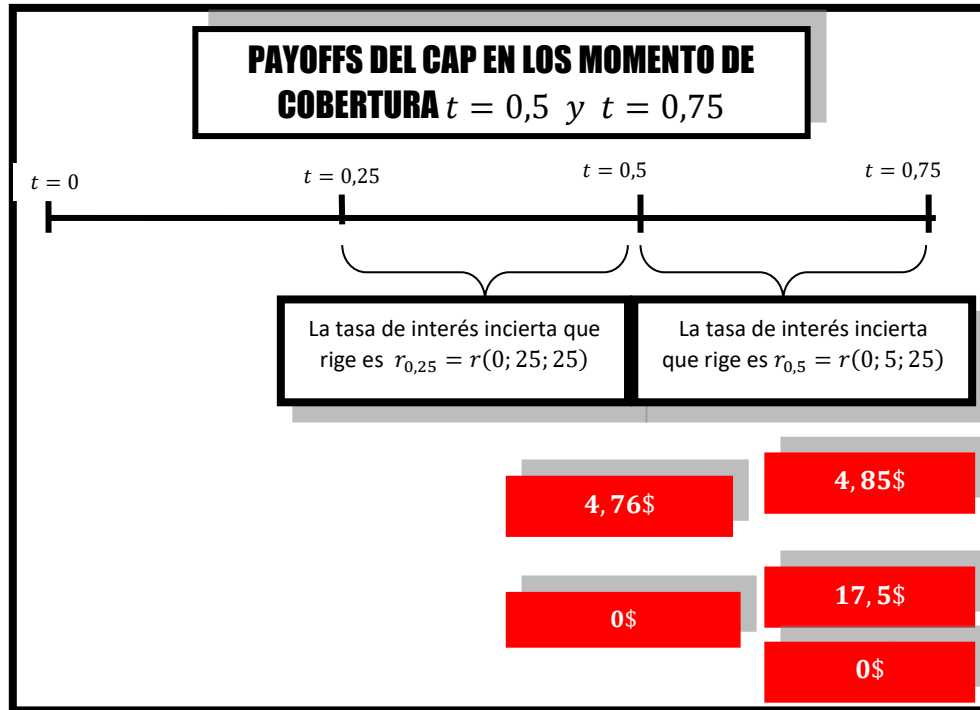
Por lo tanto la prima del CAP es igual a

$$c_{CAP} = c_{CAPLET 1} + c_{CAPLET 2} = 17,65\$$$

Con el CAP recibimos una cobertura y por lo tanto recibimos payoffs un periodo después de observar las tasas, en los momentos $t = 0,5$ y $t = 0,75$.

Donde las tasas inciertas son las que serán observadas en los momentos $t = 0,25$ y $t = 0,5$, es decir, las tasas de interés NOMINAL ANUAL $r_{0,25} = r(0; 25; 25)$ y $r_{0,5} = r(0; 0,5; 0,75)$

Como sabemos no es necesario realizar una cobertura en el momento $t = 0,25$ porque la tasa de interés NOMINAL ANUAL $r_0 = r(0; 0; 25)$ es conocida en $t = 0$.



FLOORLET 1

El FLOORLET es una opción de venta europea PUT de tasa de interés.

El payoffs al vencimiento T es igual a

$$VN \times \Delta t \times \max[r_K - r_T; 0]$$

CONDICION DE EMISIÓN DEL FLOORLET 1

Las condiciones de emisión tienen un NOCIONAL igual a 1.000\$ y una tasa de ejercicio $r_K = 7\%$ con una fecha de vencimiento de 9 meses.

VALUACIÓN DEL FLOORLET 1

Para el cálculo del payoffs al vencimiento del FLOORLET utilizamos la formula

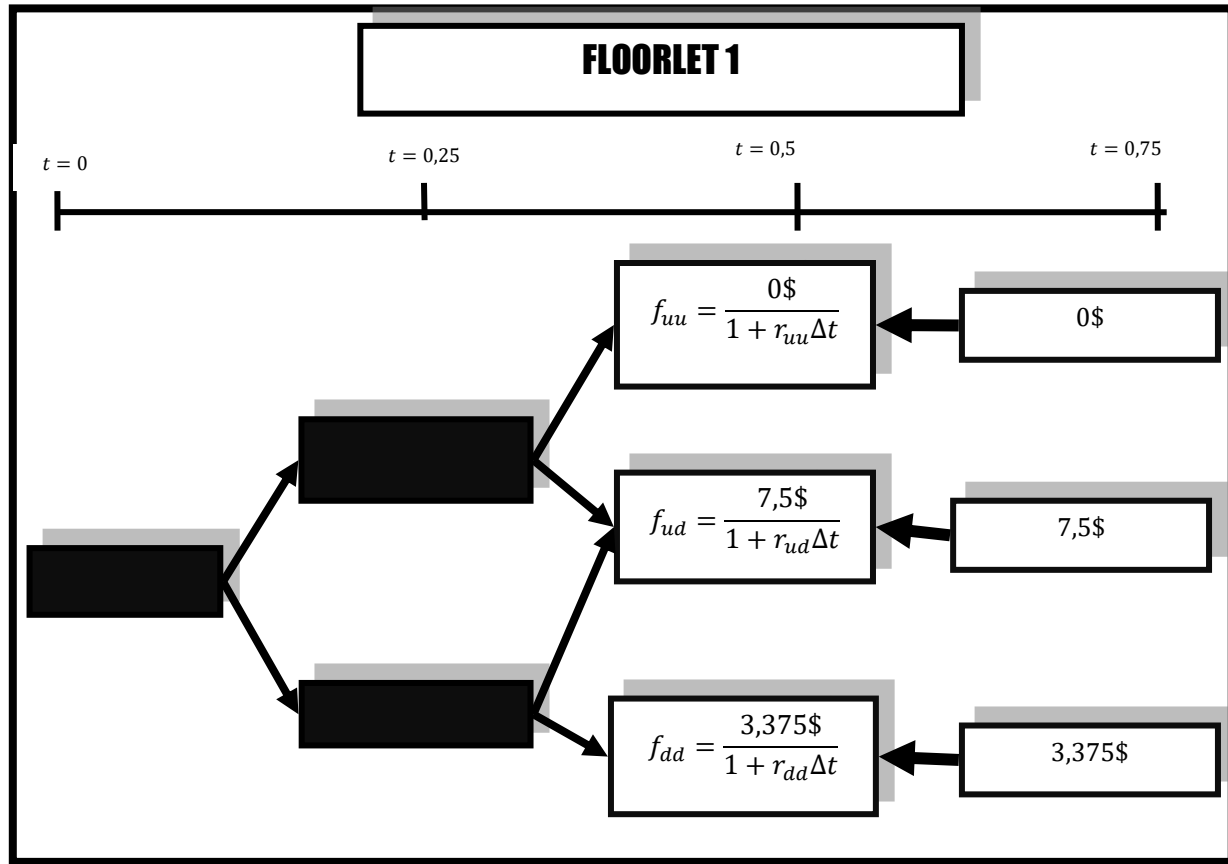
$$1000\$ \times 0,25 \times \max[7\% - r_T; 0]$$

Por lo cual

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[7\% - 7,94\%; 0] = 1000\$ \times 0,25 \times 0\$ = 0\$$$

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[7\% - 6,7\%; 0] = 1000\$ \times 0,25 \times 0,03 = 7,5\$$$

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[7\% - 5,65\%; 0] = 1000\$ \times 0,25 \times 0,0135 = 3,375\$$$



En el momento $t = 0,5$

Calculo de f_{uu}

$$f_{uu} = \frac{0\$}{1 + 0,0794 \times 0,25} = 0\$$$

Calculo de f_{ud}

$$f_{ud} = \frac{7,5\$}{1 + 0,067 \times 0,25} = 7,38\$$$

Calculo de f_{dd}

$$f_{dd} = \frac{3,375\$}{1 + 0,0565 \times 0,25} = 3,33\$$$

VALOR DEL CAPLET EN CADA NODO

$$E_{\pi^{RN}}(f_t) \cdot FD_t$$

Las probabilidades riesgo neutro π^{RN} como mencionamos nos vienen dadas.

En el momento $t = 0,25$

Calculo de f_u

$$f_u = \frac{\left[0\$ \times \frac{1}{2} + 7,38\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,0674 \times 0,25} = 3,63\$$$

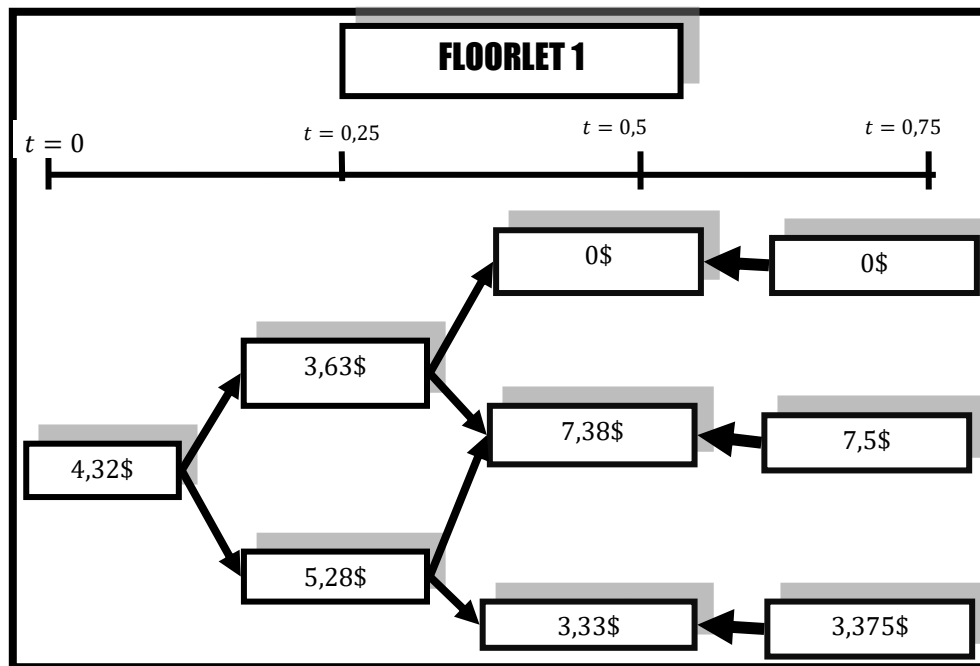
Calculo de f_d

$$f_d = \frac{\left[7,38\$ \times \frac{1}{2} + 3,33\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,058 \times 0,25} = 5,28\$$$

En el momento $t = 0$

Calculo f_0

$$f_0 = \frac{\left[3,63\$ \times \frac{1}{2} + 5,28\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,0617 \times 0,25} = 4,32\$$$

**FLOORLET 2****CONDICION DE EMISIÓN DEL FLOORLET 2**

Las condiciones de emisión tienen un NOCIONAL igual a 1.000\$ y una tasa de ejercicio $r_k = 7\%$ con una fecha de vencimiento de 6 meses.

VALUACIÓN DEL FLOORLET 2

Para el cálculo del payoffs al vencimiento del FLOORLET utilizamos la formula

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[7\% - r_T; 0]$$

Por lo cual

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[7\% - 6,74\%; 0] = 1000\$ \times 0,25 \times 0,0026 = 0,65\$$$

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[7\% - 5,80\%; 0] = 1000\$ \times 0,25 \times 0,012 = 3\$$$

En el momento $t = 0,25$

Calculo de f_u

$$f_u = \frac{0,65\$}{1 + 0,0674 \times 0,25} = 0,64\$$$

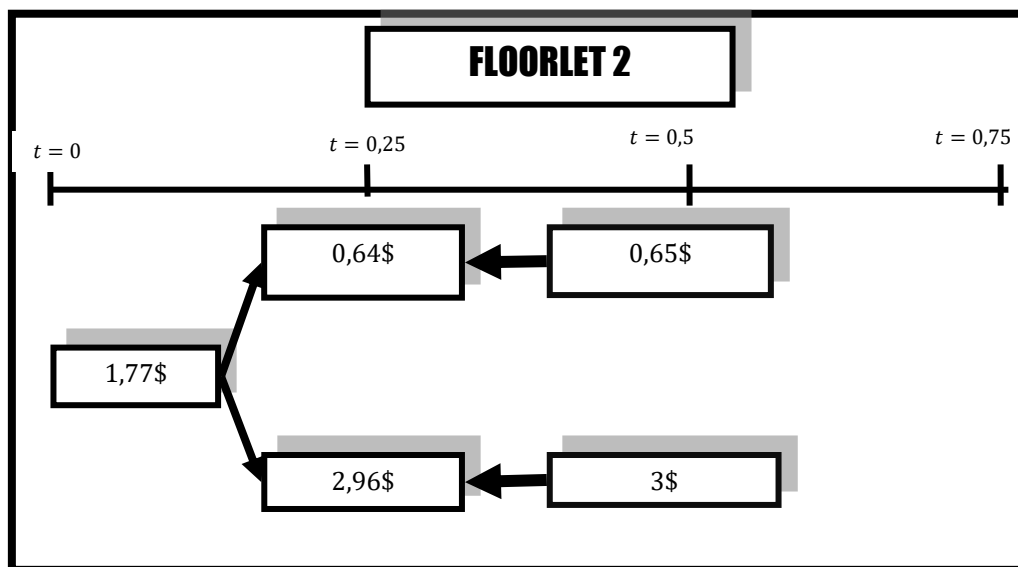
Calculo de f_d

$$f_d = \frac{3\$}{1 + 0,058 \times 0,25} = 2,96\$$$

En el momento $t = 0$

Calculo f_0

$$f_0 = \frac{\left[0,64\$ \times \frac{1}{2} + 2,96\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,0617 \times 0,25} = 1,77\$$$



EL FLOOR COMO UN PORTAFOLIO DE FLOORLET

Un FLOOR provee un payoffs cuando la tasa de interés de mercado cae bajo cierta tasa.

Consideramos un FLOOR con una vida de T , un principal de L y una TASA FLOOR de R_K . Supongamos que las fechas en donde actúa el FLOOR son las siguientes

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$$

También se define

$$T = t_{n+1}$$

Se define R_k como la tasa de interés para el periodo entre t_k y t_{k+1} observada en el momento t_k donde

$$(1 \leq k \leq n)$$

El FLOOR lleva a un payoff en el momento t_k y t_{k+1} ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) de

$$L \times \max[R_k - R_k; 0] \times (t_{k+1} - t_k)$$

Ambas R_k y R_k son TASAS NOMINALES ANUALES con capitalización en el periodo entre t_k y t_{k+1} .

La última ecuación es un FLOORLET sobre la tasa de interés R_k con un payoff ocurriendo en t_{k+1} . El FLOOR es un portafolio de n FLOORLETS.

Las tasas LIBOR son observadas en los momentos

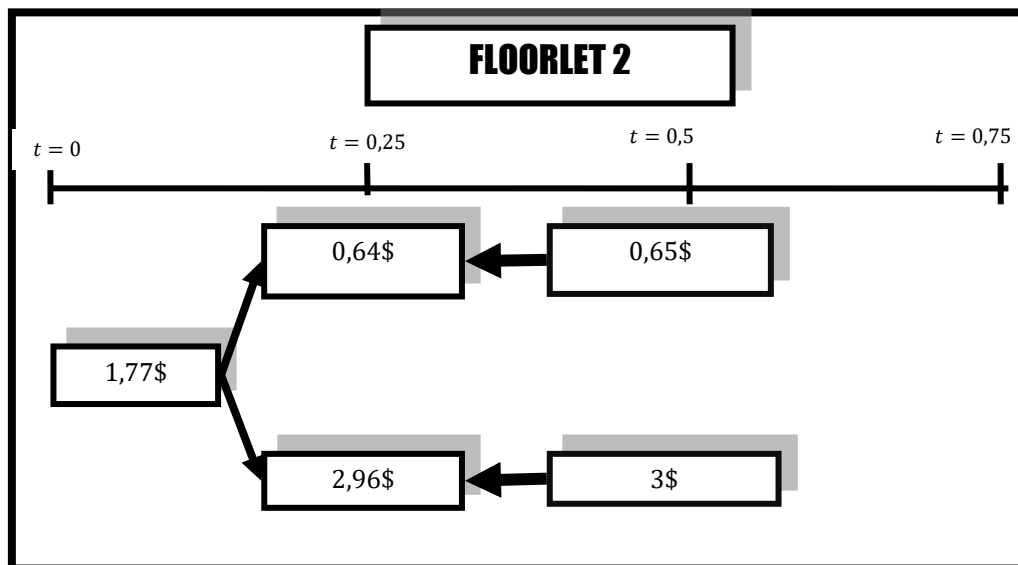
$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$$

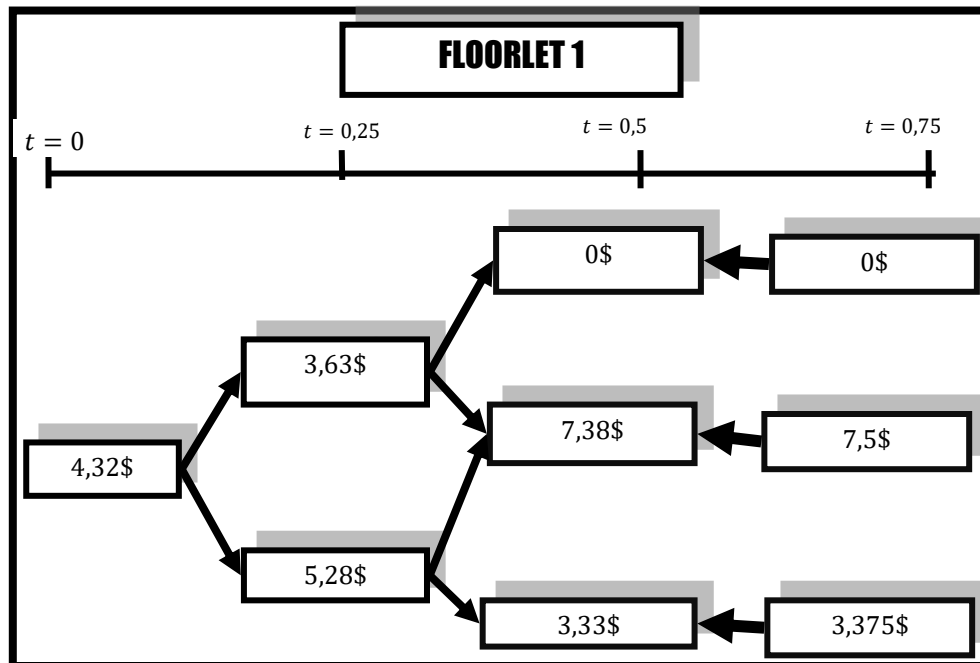
Los correspondientes payoffs ocurren en

$$t_2, t_3, \dots, t_{n+1}$$

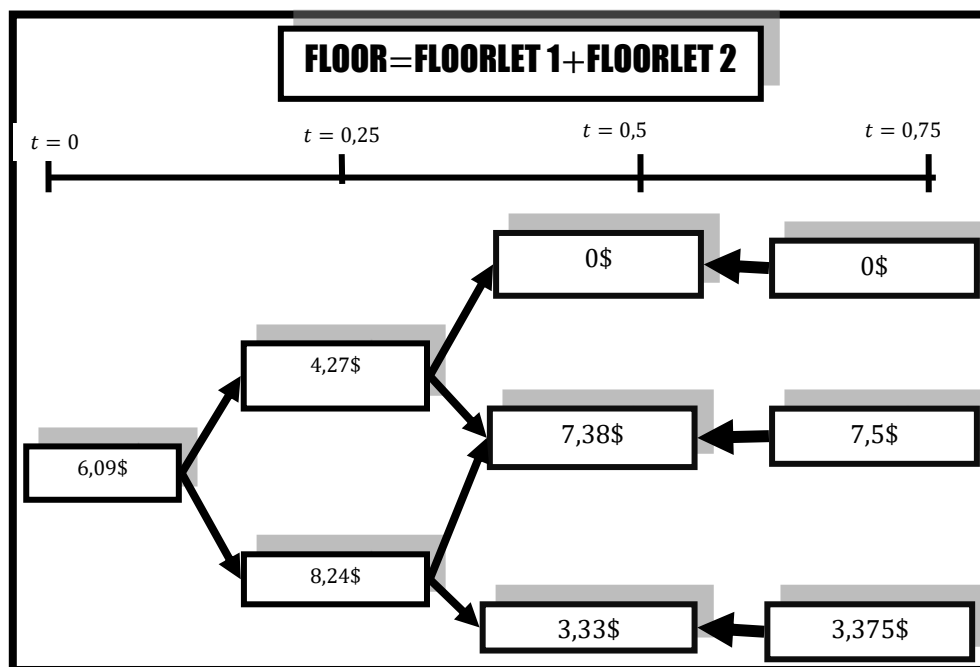
EJEMPLO

El FLOOR es un conjunto de FLOORLET con diferentes fechas de vencimiento. En este caso vamos a armar un FLOOR conformado por el FLOORLET 1 y el FLOORLET 2. Buscamos valorar el FLOOR.





Para obtener los payoffs debemos sumar de ambos FLOORLET

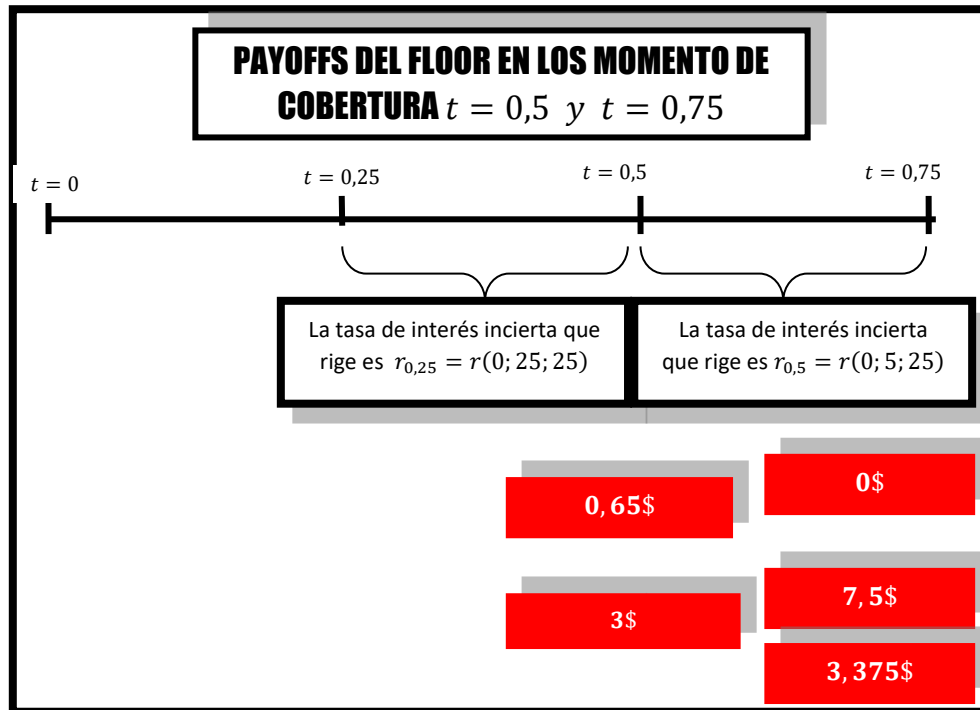


Por lo tanto la prima del FLOOR es igual a

$$f_{FLOOR} = f_{FLOORLET 1} + f_{FLOORLET 2} = 6,09\$$$

Con el FLOOR recibimos una cobertura y por lo tanto recibimos payoffs un periodo después de observar las tasas, en los momentos $t = 0,5$ y $t = 0,75$.

Donde las tasas inciertas son las que serán observadas en los momentos $t = 0,25$ y $t = 0,5$, es decir, las tasas de interés NOMINAL ANUAL $r_{0,25} = r(0; 25; 25)$ y $r_{0,5} = r(0; 0,5; 0,75)$



DEFINICIÓN DE COLLAR

Un COLLAR es un instrumento diseñado para garantizar que la tasa de interés de mercado R_k siempre se mantenga entre dos niveles. Un COLLAR es una combinación de una POSICIÓN LONG en un CAP y una POSICIÓN SHORT en un FLOOR. Es construido usualmente de manera de que el precio del CAP es inicialmente igual al precio del FLOOR. Luego el costo de entrar en un COLLAR es igual a cero.

EJEMPLO DEL USO DEL MODELO BLACK-DERMAN-TOY

OPCIONES SOBRE BONOS

Analizaremos el texto “A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options” realizado por F. Black, E. Derman y W. Toy.

ESTRUCTURA TEMPORAL DE TASAS DE INTERÉS ETTI EN EL MOMENTO $t = 0$

En el momento $t = 0$ nos dan los siguientes datos

MATURITY O PLAZO DE VENCIMIENTO EN AÑOS t	TASA YIELD O CUPÓN EFECTIVA ANUAL r_{365}	VOLATILIDAD YIELD ANUAL σ
1	10%	20%
2	11%	19%
3	12%	18%
4	12,5%	17%
5	13%	16%

Como vemos no son curvas FLAT, ni la curva YIELD ni la curva de VOLATILIDADES YIELD

Debemos encontrar lo precios de los BONO CERO CUPÓN que están implícitos. Por lo cual

$$P(0; 1) = \frac{VN}{1 + r_{365}} = \frac{100\$}{1 + 0,1} = 90,90909091\$$$

$$P(0; 2) = \frac{VN}{(1 + r_{365})^{0,5}} = \frac{100\$}{(1 + 0,11)^2} = 81,16224332\$$$

$$P(0; 3) = \frac{VN}{(1 + r_{365})^{0,75}} = \frac{100\$}{(1 + 0,12)^3} = 71,17802478\$$$

$$P(0; 4) = \frac{VN}{(1 + r_{365})^{0,5}} = \frac{100\$}{(1 + 0,125)^4} = 62,4295077\$$$

$$P(0; 5) = \frac{VN}{(1 + r_{365})^{0,75}} = \frac{100\$}{(1 + 0,13)^5} = 54,2759936\$$$

Por lo cual armamos la siguiente tabla de precios

PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	PRECIO BONO CERO CUPÓN con VALOR NOMINAL 100\$ $P(0; t)$
1	90,91\$
2	81,16\$
3	71,18\$
4	62,43\$
5	54,28\$

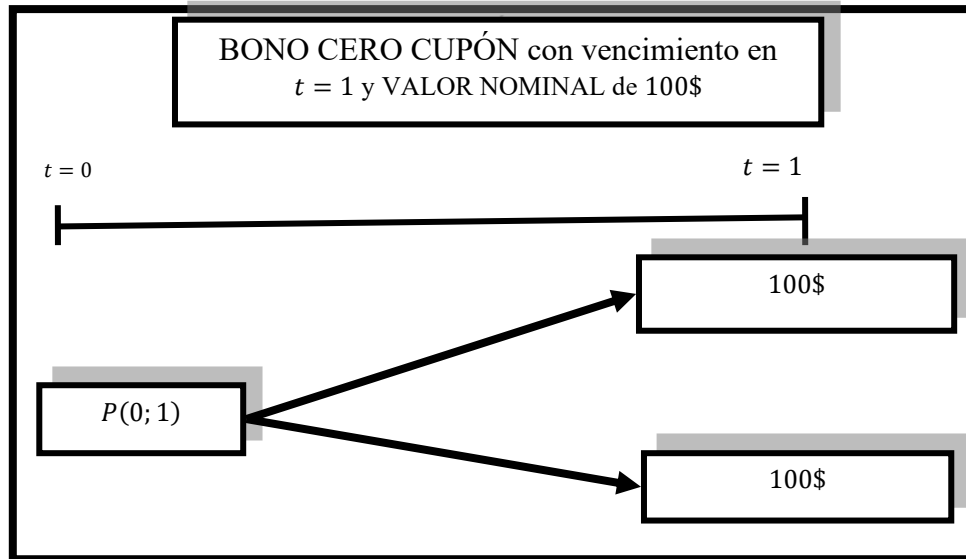
PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

Las probabilidades riesgo neutro son constante e iguales a $\frac{1}{2}$

CALCULO DEL ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS NOMINAL ANUAL

CALCULO DE r_0

Tomamos el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en 1 año y un VALOR NOMINAL de 100\$, de manera gráfica



Por lo cual

$$P(0; t + \Delta t) = \frac{100\$}{(1 + \Delta t \times r_0)}$$

Donde

$$\Delta t = 1$$

De donde despejamos r_0 para obtener su valor.

$$90,91\$ = \frac{100\$}{(1 + 1 \times r_0)}$$

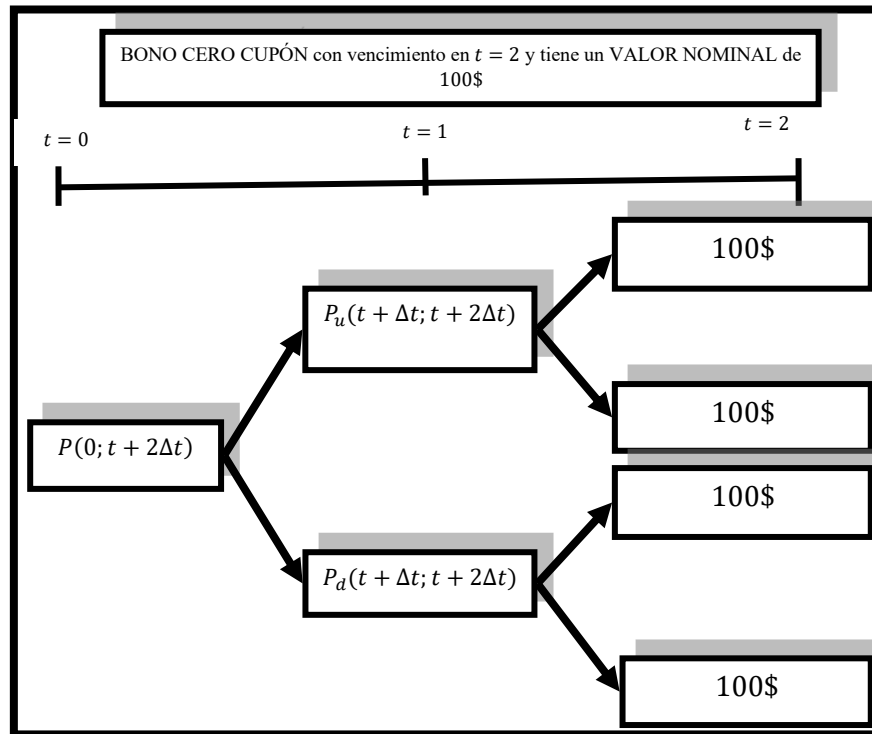
$$r_0 = \left[\frac{100\$}{90,91\$} - 1 \right] = 0,1$$

En porcentajes

$$r_0 = 10\%$$

CALCULO DE r_d

Tomamos el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en 2 años y un VALOR NOMINAL de 100\$, de manera gráfica



Donde

$$P(0; t + 2\Delta t) = \frac{1}{(1 + r_0 \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_d \cdot e^{2\sigma_1 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} + \frac{100\$}{(1 + r_d \times \Delta t)} \right]$$

$$r_u = r_d \cdot e^{2\sigma_1 \sqrt{\Delta t}}$$

Donde

$$\sigma_1 = \sigma(0; 1; 2) = 19\%$$

Por lo cual

$$81,16\$ = \frac{1}{(1 + 0,1 \times 1)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_d \cdot e^{2 \times 0,19 \sqrt{1}} \times 1)} + \frac{100\$}{(1 + r_d \times 1)} \right]$$

$$178,552\$ = \left[\frac{100\$}{(1 + r_d \cdot e^{2 \times 0,19 \sqrt{1}} \times 1)} + \frac{100\$}{(1 + r_d \times 1)} \right]$$

$$178,552\$ = \left[\frac{100\$}{(1 + r_d \times 1,462284589)} + \frac{100\$}{(1 + r_d \times 1)} \right]$$

$$\frac{178,552\$}{100\$} = \left[\frac{1}{(1 + r_d \times 1,462284589)} + \frac{1}{(1 + r_d \times 1)} \right]$$

$$1,78552 = \left[\frac{1}{(1 + r_d \times 1,462284589)} + \frac{1}{(1 + r_d \times 1)} \right]$$

$$\frac{1}{(1 + r_d \times 1,462284589)} + \frac{1}{(1 + r_d \times 1)} = \frac{(1 + r_d \times 1) + (1 + r_d \times 1,462284589)}{(1 + r_d \times 1,462284589) \times (1 + r_d \times 1)}$$

Donde

$$\frac{(1 + r_d \times 1) + (1 + r_d \times 1,462284589)}{(1 + r_d \times 1,462284589) \times (1 + r_d \times 1)} = \frac{2 + 2,462284589 \times r_d}{1 + r_d \times 1 + r_d \times 1,462284589 + r_d^2 \times 1,462284589}$$

$$\frac{(1 + r_d \times 1) + (1 + r_d \times 1,462284589)}{(1 + r_d \times 1,462284589) \times (1 + r_d \times 1)} = \frac{2 + 2,462284589 \times r_d}{1 + r_d \times 2,462284589 + r_d^2 \times 1,462284589}$$

Por lo tanto

$$1,78552 = \frac{2 + 2,462284589 \times r_d}{1 + r_d \times 2,462284589 + r_d^2 \times 1,462284589}$$

$$1,78552 \times [1 + r_d \times 2,462284589 + r_d^2 \times 1,462284589] = 2 + 2,462284589 \times r_d$$

$$1,78552 + r_d \times 4,396458379 + r_d^2 \times 2,610938379 = 2 + 2,462284589 \times r_d$$

$$r_d^2 \times 2,610938379 + r_d \times 1,93417379 - 0,21448 = 0$$

Por lo cual

$$r_d = 0,097940924$$

La otra raíz es negativa. Si lo llevamos a porcentajes

$$r_d = 9,79\%$$

Por lo tanto

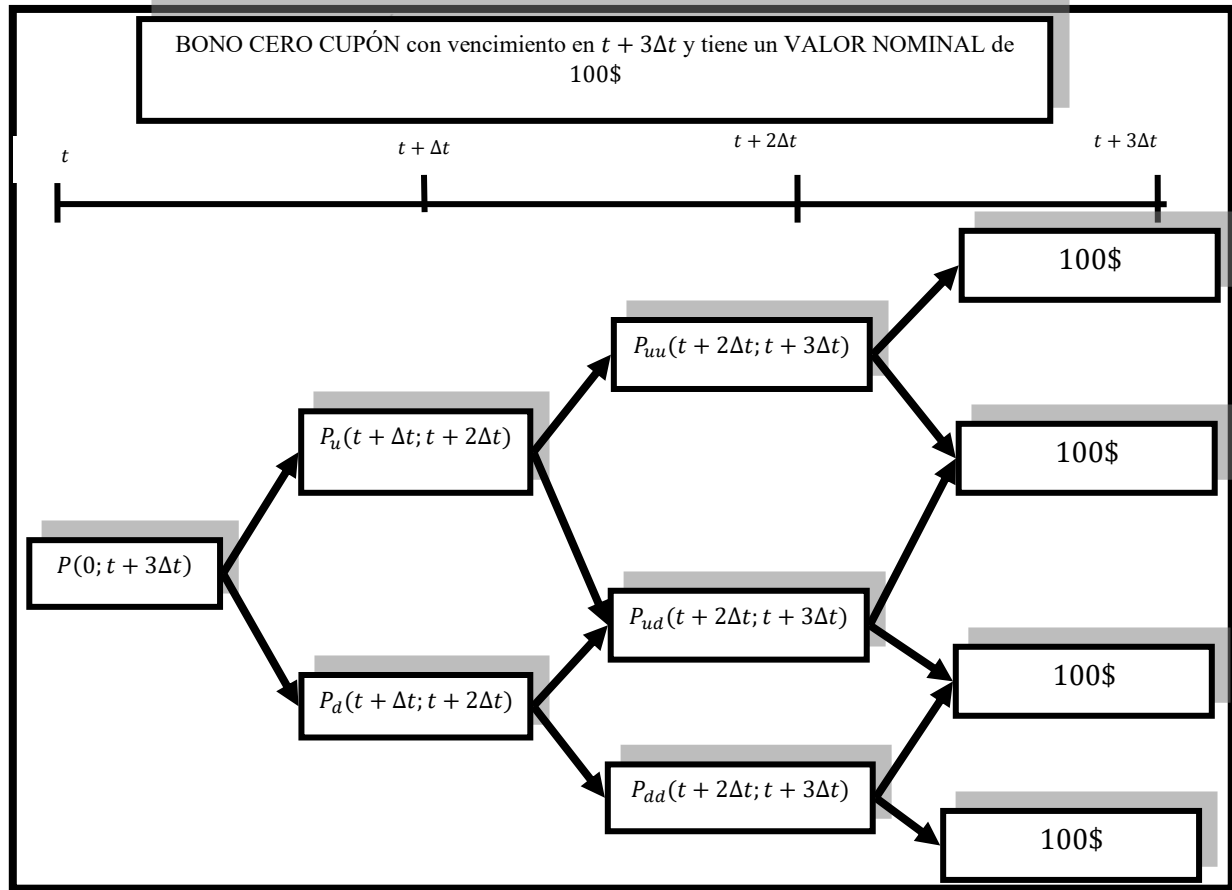
$$r_u = 0,097940924e^{2 \times 0,19 \times \sqrt{1}} = 0,143217503$$

Si lo llevamos a porcentajes

$$r_u = 14,32\%$$

CALCULO DE r_{dd}

Tomamos el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en 3 años y un VALOR NOMINAL de 100\$, de manera gráfica



Tenemos que

$$\begin{aligned}
 P(0; t + 3\Delta t) &= \frac{1}{(1 + r_0 \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \\
 &\times \left[\frac{1}{(1 + r_d \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times \Delta t)} \right] \right. \\
 &\left. + \frac{1}{(1 + r_u \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{4\sigma_2 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$r_{uu} = r_{dd} \cdot e^{4\sigma_2 \sqrt{\Delta t}}$$

$$r_{du} = r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2 \sqrt{\Delta t}}$$

Donde

$$\sigma_2 = \sigma(0; 2; 3) = 18\%$$

Por lo cual

$$71,18\$ = \frac{1}{(1 + 0,1 \times 1)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{(1 + 0,0979 \times 1)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2 \times 0,18\sqrt{1}} \times 1)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 1)} \right] + \frac{1}{(1 + 0,1432 \times 1)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{4 \times 0,18\sqrt{1}} \times 1)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2 \times 0,18\sqrt{1}} \times 1)} \right] \right]$$

$$71,18\$ = \frac{5}{11} \times \left[\frac{5000}{10979} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2 \times 0,18\sqrt{1}} \times 1)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 1)} \right] + \frac{625}{1429} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{4 \times 0,18\sqrt{1}} \times 1)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2 \times 0,18\sqrt{1}} \times 1)} \right] \right]$$

$$71,18\$ = \frac{5}{11} \times \left[\frac{5000}{10979} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot 1,43329415)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 1)} \right] + \frac{625}{1429} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot 2,054433211)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot 1,43329415)} \right] \right]$$

$$71,18\$ = \frac{500}{11} \$ \times \left[\frac{5000}{10979} \times \left[\frac{1}{(1 + r_{dd} \cdot 1,43329415)} + \frac{1}{(1 + r_{dd} \times 1)} \right] + \frac{625}{1429} \times \left[\frac{1}{(1 + r_{dd} \cdot 2,054433211)} + \frac{1}{(1 + r_{dd} \cdot 1,43329415)} \right] \right]$$

$$1,56596 = \frac{0,455414883}{(1 + r_{dd} \times 1)} + \frac{0,455414883}{(1 + r_{dd} \cdot 1,43329415)} + \frac{0,437368789}{(1 + r_{dd} \cdot 2,054433211)} + \frac{0,437368789}{(1 + r_{dd} \cdot 1,43329415)}$$

$$1,56596 = \frac{0,455414883}{(1 + r_{dd} \times 1)} + \frac{0,892783672}{(1 + r_{dd} \cdot 1,43329415)} + \frac{0,437368789}{(1 + r_{dd} \cdot 2,054433211)}$$

NUMERADOR

$$0,455414883 \times (1 + r_{dd} \cdot 1,43329415) \times (1 + r_{dd} \cdot 2,054433211) + 0,892783672 \times (1 + r_{dd} \times 1) \times (1 + r_{dd} \cdot 2,054433211) + 0,437368789 \times (1 + r_{dd} \times 1) \times (1 + r_{dd} \cdot 1,43329415)$$

PRIMER TERMINO

$$(0,455414883 + r_{dd} \times 0,652743487) \times (1 + r_{dd} \cdot 2,054433211)$$

$$0,455414883 + r_{dd} \times 0,652743487 + r_{dd} \times 0,93561946 + r_{dd}^2 \times 1,341017898$$

$$0,455414883 + r_{dd} \times 1,588362947 + r_{dd}^2 \times 1,341017898$$

SEGUNDO TERMINO

$$\begin{aligned} & (0,892783672 + r_{dd} \times 0,892783672) \times (1 + r_{dd} \cdot 2,054433211) \\ & 0,892783672 + r_{dd} \times 0,892783672 + r_{dd} \times 1,834164426 + r_{dd}^2 \times 1,834164426 \\ & 0,892783672 + r_{dd} \times 2,726948098 + r_{dd}^2 \times 1,834164426 \end{aligned}$$

TERCER TERMINO

$$\begin{aligned} & (0,437368789 + r_{dd} \times 0,437368789) \times (1 + r_{dd} \cdot 1,43329415) \\ & 0,437368789 + r_{dd} \times 0,437368789 + r_{dd} \times 0,626878126 + r_{dd}^2 \times 0,626878126 \\ & 0,437368789 + r_{dd} \times 1,064246915 + r_{dd}^2 \times 0,626878126 \end{aligned}$$

TOTAL

$$1,785567344 + r_{dd} \times 5,37955796 + r_{dd}^2 \times 3,80206045$$

DENOMINADOR

$$(1 + r_{dd} \times 1) \times (1 + r_{dd} \cdot 1,43329415) \times (1 + r_{dd} \cdot 2,054433211)$$

EL PRIMER PRODUCTO

$$(1 + r_{dd} \times 1) \times (1 + r_{dd} \cdot 1,43329415)$$

DA COMO RESULTADO

$$= 1 + r_{dd} \times 1 + r_{dd} \cdot 1,43329415 + r_{dd}^2 \times 1,43329415$$

EL SEGUNDO PRODUCTO

$$(1 + r_{dd} \cdot 2,43329415 + r_{dd}^2 \times 1,43329415) \times (1 + r_{dd} \cdot 2,054433211)$$

DA COMO RESULTADO

$$\begin{aligned} & 1 + r_{dd} \cdot 2,43329415 + r_{dd}^2 \times 1,43329415 + r_{dd} \cdot 2,054433211 + r_{dd}^2 \times 4,999040314 \\ & + r_{dd}^3 \times 2,944607103 \end{aligned}$$

Por lo cual

$$1 + r_{dd} \times 4,487727361 + r_{dd}^2 \times 6,432334464 + r_{dd}^3 \times 2,944607103$$

Si multiplicamos este resultado por el valor 1,56596 obtenemos

$$1,56596 + r_{dd} \times 7,027601538 + r_{dd}^2 \times 10,07277848 + r_{dd}^3 \times 4,611136939$$

RESULTADO HASTA AHORA

$$1,56596 + r_{dd} \times 7,027601538 + r_{dd}^2 \times 10,07277848 + r_{dd}^3 \times 4,611136939$$

$$= 1,785567344 + r_{dd} \times 5,37955796 + r_{dd}^2 \times 3,80206045$$

Igualando a cero

$$-0,219607344 + r_{dd} \times 1,648043578 + r_{dd}^2 \times 6,27071803 + r_{dd}^3 \times 4,611136939 = 0$$

$$r_{dd} = 0,09584030373$$

En porcentaje

$$r_{dd} = 9,58\%$$

También

$$r_{uu} = 0,09584030373 \cdot e^{4 \times 0,18\sqrt{1}} = 0,196897502$$

En porcentaje

$$r_{uu} = 19,68\%$$

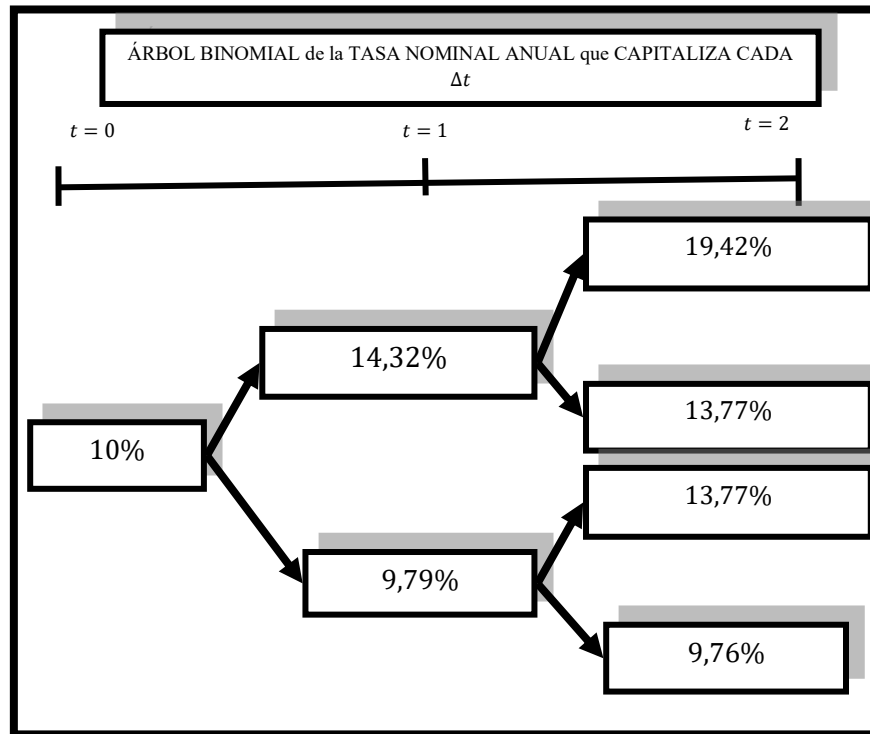
$$r_{du} = 0,09584030373 \cdot e^{2 \times 0,18\sqrt{1}} = 0,137370726$$

En porcentaje

$$r_{du} = 13,74\%$$

Hay una diferencia leve con lo que aparece en el texto lo cual se asocia a errores de redondeo. Por lo cual utilizaremos los datos que nos dan en el texto

ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS



VALUACIÓN DE UN BONO

Primero vamos a valorar un bono y a partir de este, luego, valuaremos opciones sobre bonos.

SEA EL BONO A

VALOR NOMINAL 100\$ y vencimiento en UN AÑO

SEA EL BONO B

VALOR NOMINAL 100\$ y vencimiento en DOS AÑOS

SEA EL BONO C

VALOR NOMINAL 100\$ y vencimiento en TRES AÑOS

Los precios de estos bonos los calculamos al inicio

PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	PRECIO BONO CERO CUPÓN con VALOR NOMINAL 100\$ $P(0; t)$
1	90,91\$
2	81,16\$
3	71,18\$

PRIMER PASO

Es necesario replicar tres BONOS CERO CUPÓN, uno con VALOR NOMINAL 10\$ y fecha de vencimiento en UN AÑO, otro con VALOR NOMINAL 10\$ y vencimiento en DOS AÑOS y por ultimo uno con VALOR

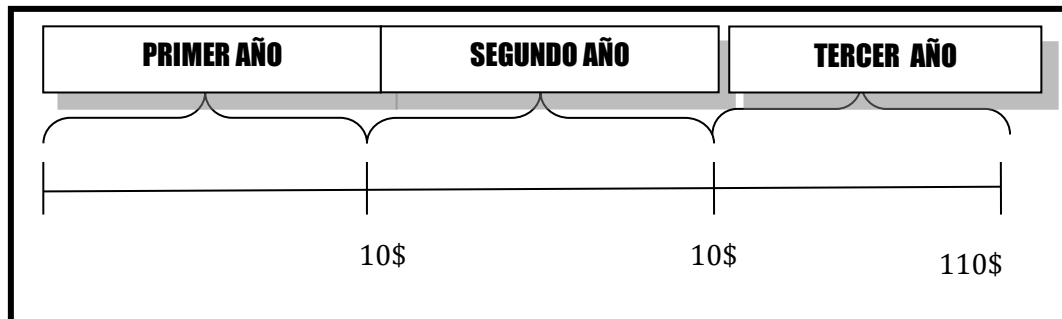
NOMINAL 110\$ y vencimiento en TRES AÑOS. Para replicar el primer bono se compra $\frac{1}{10}$ del BONO A, para el segundo se compra $\frac{1}{10}$ del BONO B, y para replicar el tercero es necesario comprar $\frac{11}{10}$ del BONO C.

SEGUNDO PASO

Es necesario replicar un BONO BULLET con una tasa cupón del 10% que paga intereses cada año y VALOR NOMINAL de 100\$ y vence dentro de TRES AÑOS.

La tasa cupón es NOMINAL ANUAL y es igual a la efectiva por lo cual los interés a pagar son iguales a

$$100\$ \times 0,1 = 10\$$$



Para replicar el payoffs del BONO BULLET es necesario armar una cartera compuesta por una posición LONG o comprada en un BONO CERO CUPÓN de VALOR NOMINAL de 10 \$ con vencimiento en UN AÑO, una posición LONG o comprada en un BONO CERO CUPÓN de VALOR NOMINAL de 10\$ con vencimiento en DOS AÑOS y por ultimo un BONO CERO CUPÓN de VALOR NOMINAL de 110\$ y vencimiento dentro de TRES AÑOS. Estos bonos los replicamos en el primer paso.

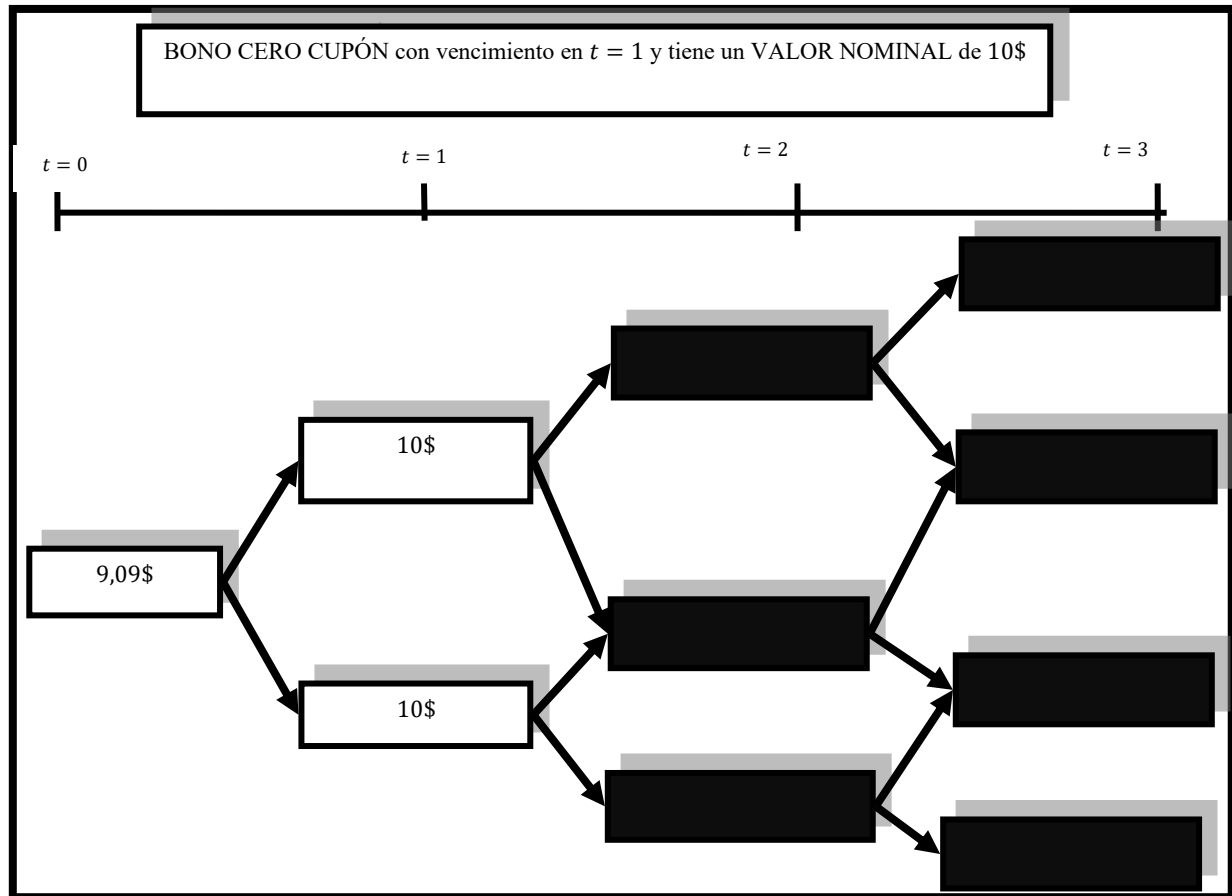
Se hace necesario construir el árbol de los tres bonos para de esta manera construir a partir de ellos el ARBOL DE BONO BULLET.

Hacemos los descuentos utilizando el ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS que construimos.

ÁRBOL DEL BONO CERO CUPÓN DE VALOR NOMINAL DE 10\$ Y VENCIMIENTO EN UN AÑO

$$\frac{10\$}{1 + r_0 \times \Delta t} = \frac{10\$}{1 + 0,1 \times 1} = 9,09\$$$

EL PRECIO DEL BONO ES IGUAL A 9,09\$



ÁRBOL DEL BONO CERO CUPÓN DE VALOR NOMINAL DE 10\$ Y VENCIMIENTO EN DOS AÑOS

En el momento $t = 1$

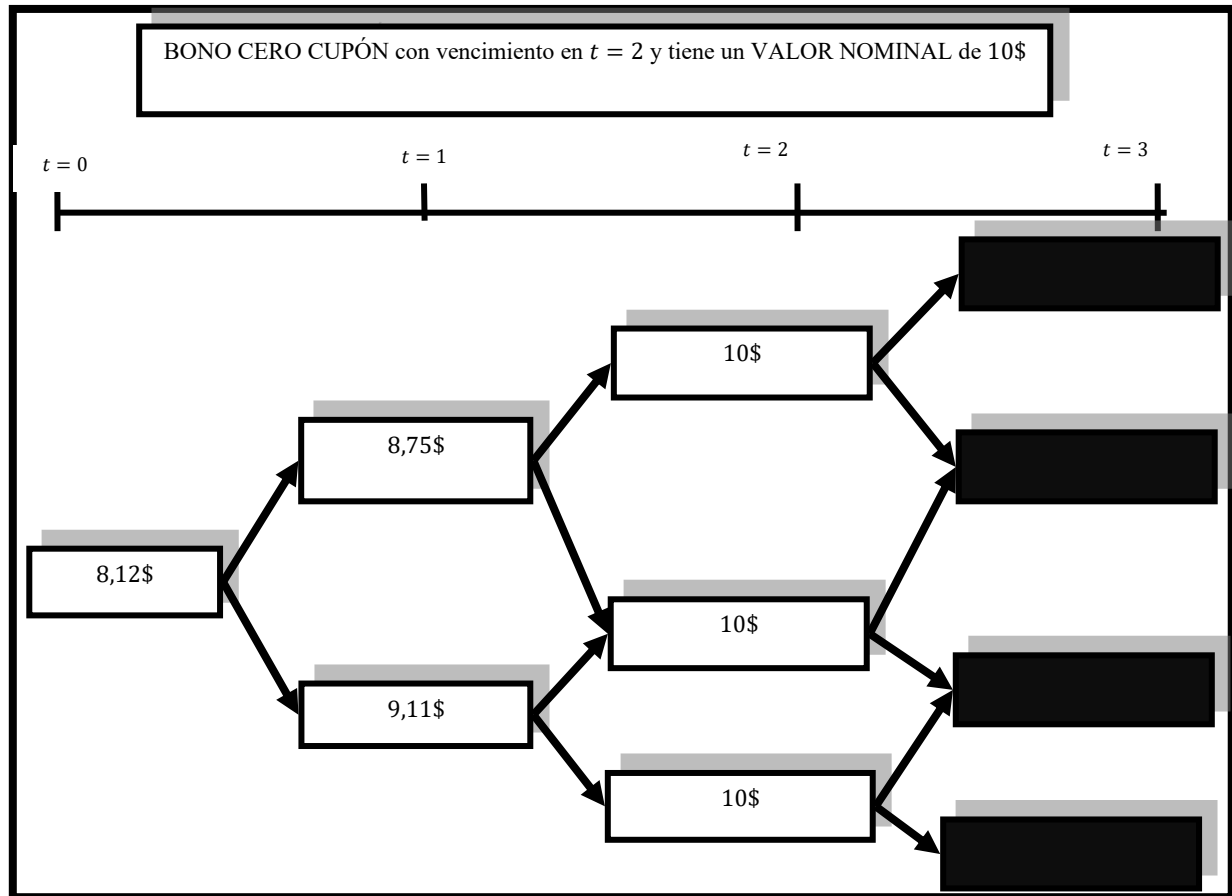
$$\frac{10\$}{1 + r_u \times \Delta t} = \frac{10\$}{1 + 0,1432 \times 1} = 8,75\$$$

$$\frac{10\$}{1 + r_d \times \Delta t} = \frac{10\$}{1 + 0,0979 \times 1} = 9,11\$$$

En el momento $t = 1$

$$\frac{8,75\$ \times \frac{1}{2} + 9,11\$ \times \frac{1}{2}}{1 + r_0 \times \Delta t} = \frac{8,75\$ \times \frac{1}{2} + 9,11\$ \times \frac{1}{2}}{1 + 0,1 \times 1} = 8,12\$$$

EL PRECIO DEL BONO ES IGUAL A 8,12\$



ÁRBOL DEL BONO CERO CUPÓN DE VALOR NOMINAL DE 110\$ Y VENCIMIENTO EN TRES AÑOS

$$P_{uu} = \frac{110\$}{1 + r_{uu} \times \Delta t} = \frac{110\$}{1 + 0,1942 \times 1} = 92,11\$$$

$$P_{ud} = \frac{110\$}{1 + r_{ud} \times \Delta t} = \frac{110\$}{1 + 0,1377 \times 1} = 96,69\$$$

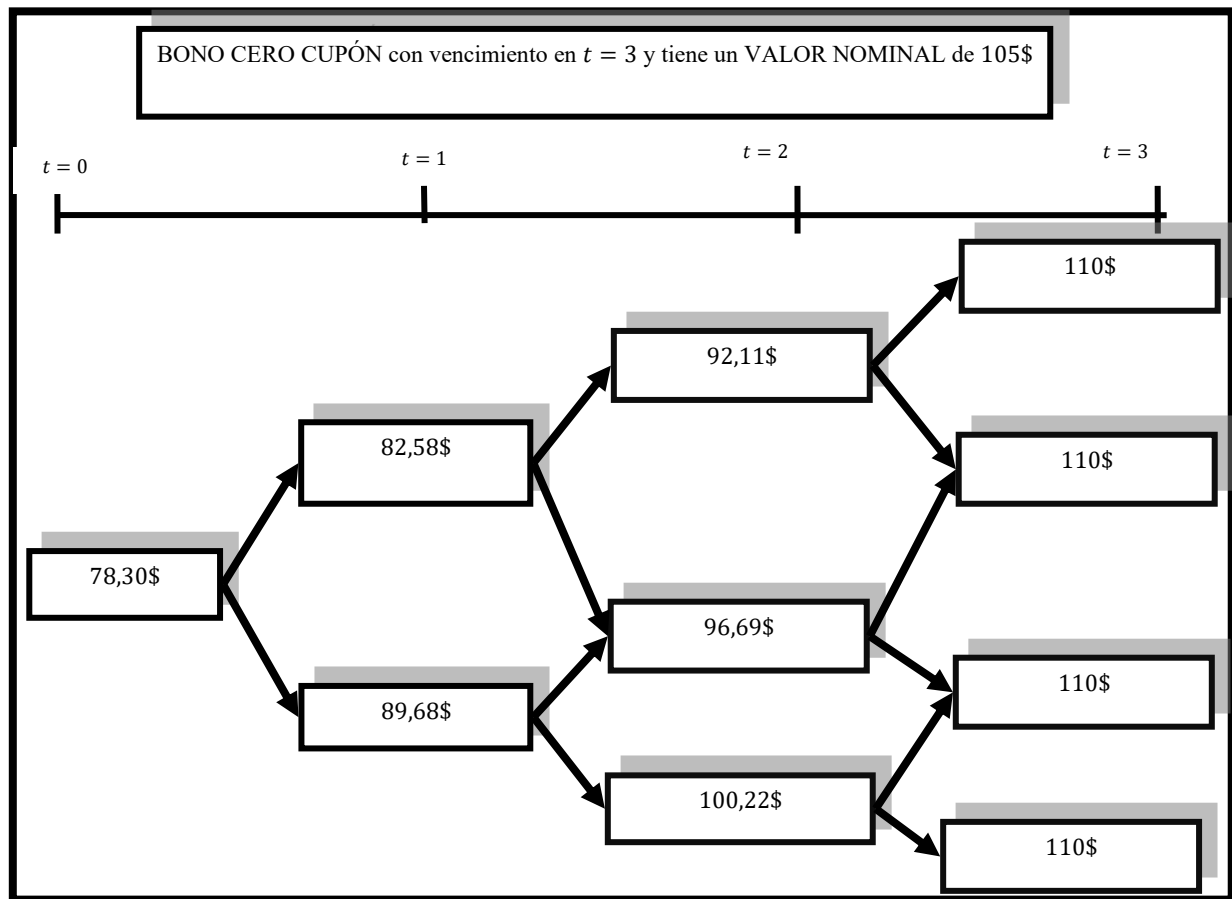
$$P_{dd} = \frac{110\$}{1 + r_{dd} \times \Delta t} = \frac{110\$}{1 + 0,0976 \times 1} = 100,22\$$$

$$P_u = \frac{\left[P_{uu} \times \frac{1}{2} + P_{ud} \times \frac{1}{2} \right]}{1 + r_u \times \Delta t} = \frac{\left[92,11\$ \times \frac{1}{2} + 96,69\$ \times \frac{1}{2} \right]}{1 + 0,1432 \times 1} = 82,58\$$$

$$P_d = \frac{\left[P_{ud} \times \frac{1}{2} + P_{dd} \times \frac{1}{2} \right]}{1 + r_d \times \Delta t} = \frac{\left[96,69\$ \times \frac{1}{2} + 100,22\$ \times \frac{1}{2} \right]}{1 + 0,0976 \times 1} = 89,68\$$$

$$P_0 = \frac{\left[P_u \times \frac{1}{2} + P_d \times \frac{1}{2} \right]}{1 + r_0 \times \Delta t} = \frac{\left[82,58\$ \times \frac{1}{2} + 89,68\$ \times \frac{1}{2} \right]}{1 + 0,01 \times 1} = 78,30\$$$

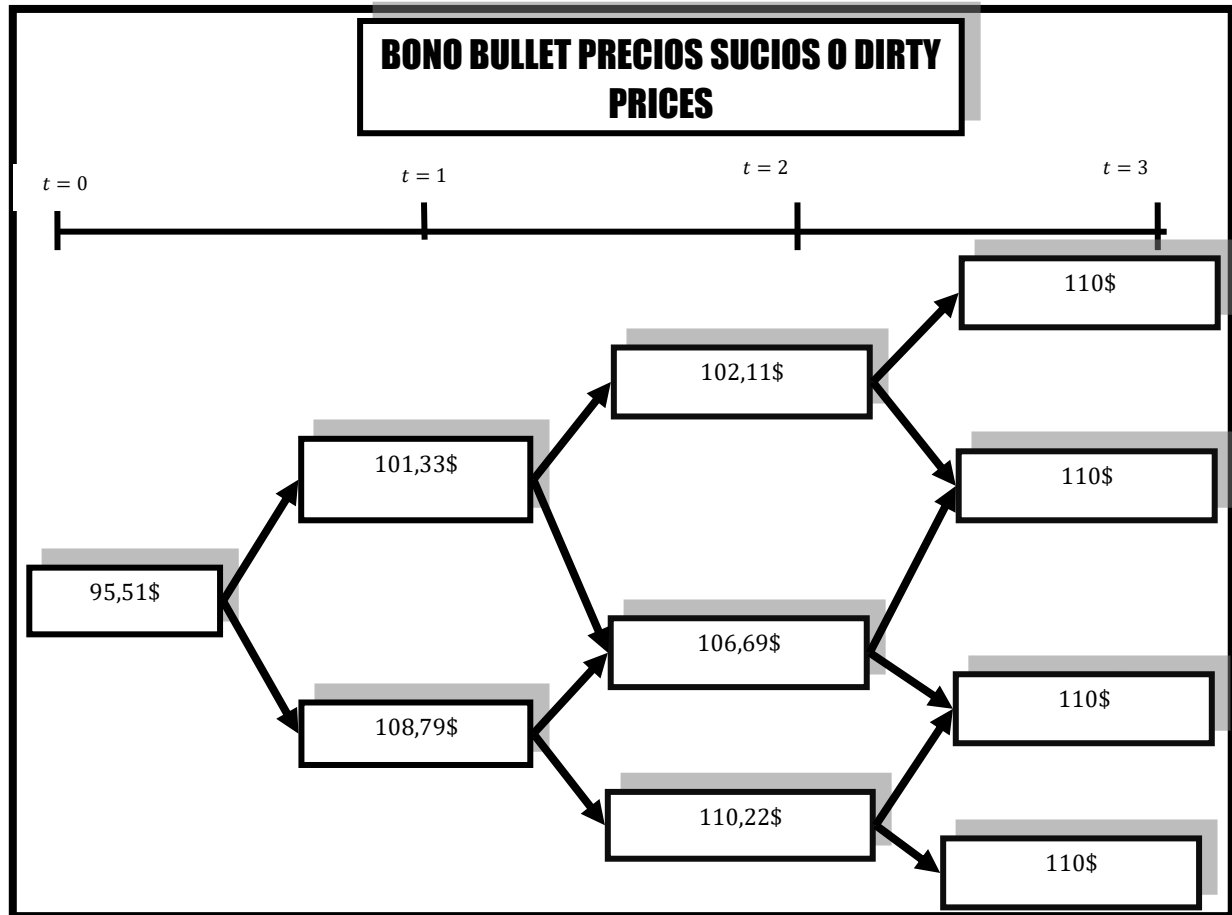
EL PRECIO DEL BONO ES IGUAL A 78,30\$



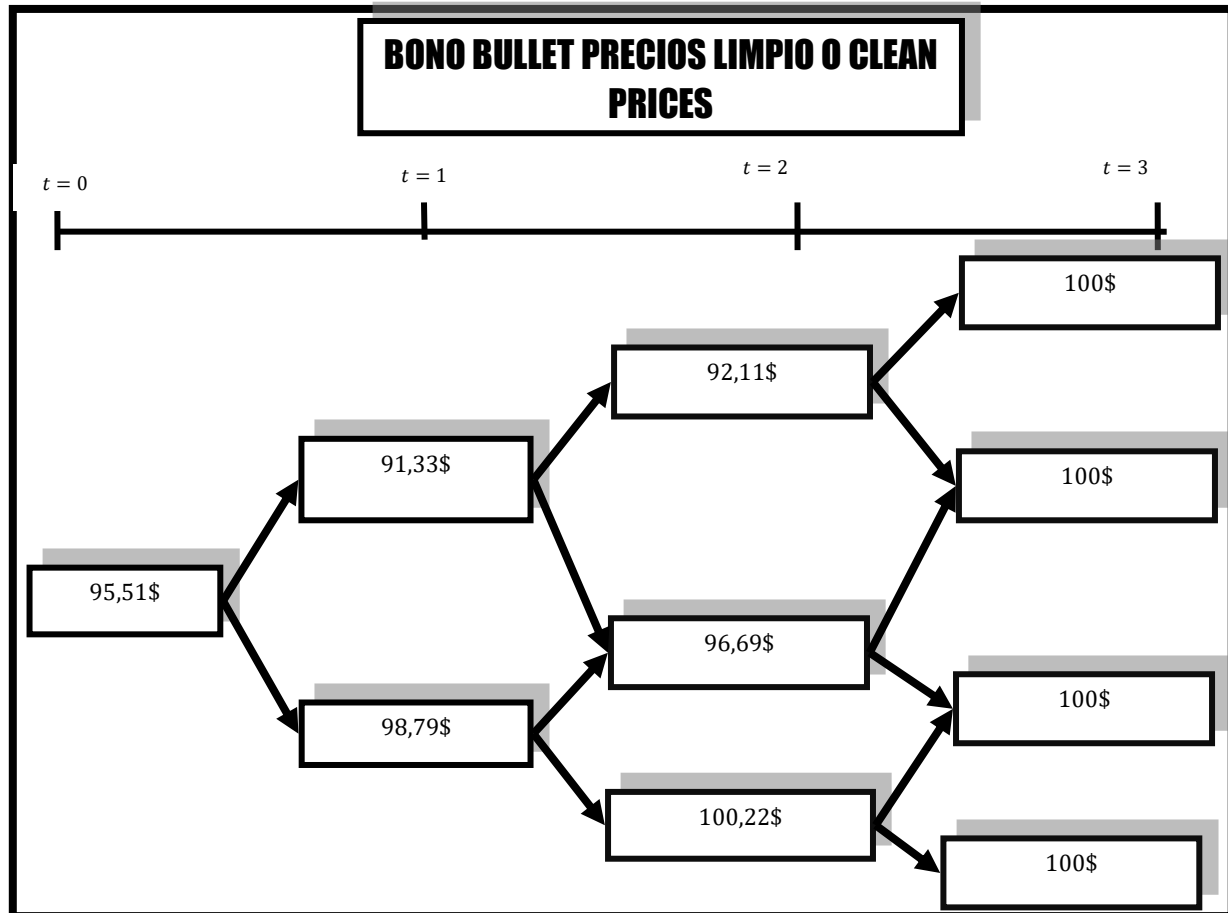
ÁRBOL DE BONO BULLET

El árbol surge de la suma de los dos árboles que construimos. Por lo tanto, el precio del BONO BULLET es igual la suma de los precios de los dos BONO CERO CUPÓN

EL PRECIO DEL BONO ES IGUAL A 95,51\$



Si quitamos los intereses en cada fecha cupón al BONO BULLET obtenemos los precios limpios o CLEAN PRICES, sobre los que basaremos las opciones, ya que en muchos mercados los bonos se comercializan a estos precios.



Como podemos apreciar el BONO BULLET en el momento $t = 0$ cotiza BAJO LA PAR porque su precio es de 95,51\$ el cual es menor al VALOR NOMINAL que es igual a 100\$. El BONO BULLET tiene una CURVA YIELD con valores, en general, mucho más grandes del 10% de la tasa cupón.

Lo que buscamos es valorar opciones que tienen como activo subyacente al BONO BULLET que acabamos de construir.

VALUACIÓN DE OPCIÓN DE COMPRA EUROPEO CALL CON ACTIVO SUBYACENTE BONO BULLET

CONDICIONES DE EMISIÓN DEL CALL

La fecha de vencimiento es en DOS AÑOS con un STRIKE igual a $K = 95\$$

Para comenzar en el momento $t = 2$ en el último pay-off del árbol binomial del CALL se utiliza la fórmula habitual ya que es donde se puede hacer ejercicio de la opción

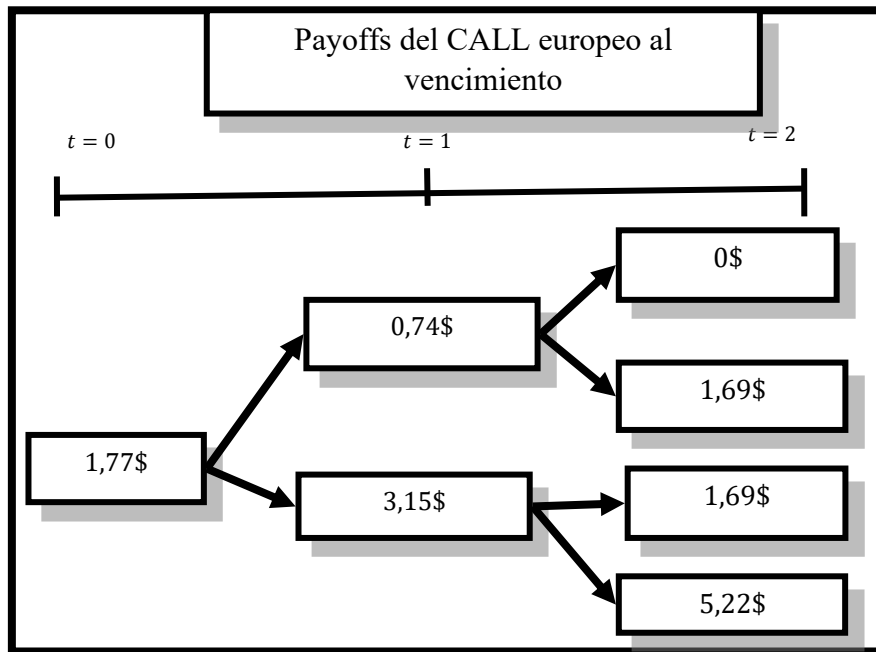
$$\max[P_T - K; 0]$$

Luego

$$c_u = \frac{0 \cdot \frac{1}{2} + 1,69\$ \cdot \frac{1}{2}}{1 + r_u \Delta t} = \frac{0 \cdot \frac{1}{2} + 1,69\$ \cdot \frac{1}{2}}{1 + 0,1432} = 0,74\$$$

$$c_d = \frac{1,69\$ \cdot \frac{1}{2} + 5,22\$ \cdot \frac{1}{2}}{1 + r_d \Delta t} = \frac{1,69\$ \cdot \frac{1}{2} + 5,22\$ \cdot \frac{1}{2}}{1 + 0,0979} = 3,15\$$$

$$c = \frac{0,74\$ \cdot \frac{1}{2} + 3,25\$ \cdot \frac{1}{2}}{1 + r_0 \Delta t} = \frac{0,74\$ \cdot \frac{1}{2} + 3,15\$ \cdot \frac{1}{2}}{1 + 0,1} = 1,77\$$$



VALUACIÓN DE OPCIÓN DE VENTA EUROPEO PUT CON ACTIVO SUBYACENTE UN BONO BULLET

CONDICIONES DE EMISIÓN DEL PUT

La fecha de vencimiento es en DOS AÑOS con un STRIKE igual a $K = 95\$$

Para comenzar en el momento $t = 2$ en el último pay-off del árbol binomial del PUT se utiliza la fórmula habitual ya que es donde se puede hacer ejercicio de la opción

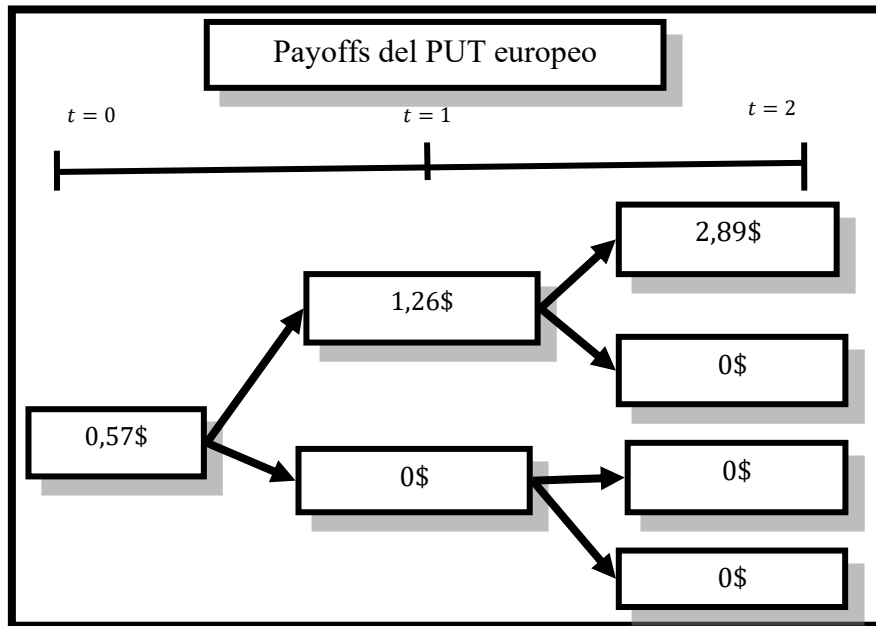
$$\max[K - P_T; 0]$$

Luego

$$p_u = \frac{2,89\$ \cdot \frac{1}{2} + 0\$ \cdot \frac{1}{2}}{1 + r_u \Delta t} = \frac{2,89\$ \cdot \frac{1}{2} + 0\$ \cdot \frac{1}{2}}{1 + 0,1432} = 1,26\$$$

$$p_d = \frac{0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}}{1 + r_d \Delta t} = \frac{0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}}{1 + 0,0979} = 0\$$$

$$p = \frac{1,26\$ \cdot \frac{1}{2} + 0\$ \cdot \frac{1}{2}}{1 + r_0 \Delta t} = \frac{1,26\$ \cdot \frac{1}{2} + 0\$ \cdot \frac{1}{2}}{1 + 0,1} = 0,57\$$$



CAPLET

ESTRUCTURA TEMPORAL DE TASAS DE INTERÉS ETTI EN EL MOMENTO $t = 0$

CURVA YIELD FLAT

PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	TASA CUPÓN EFECTIVA ANUAL r_{365} Supuesto FLAT	PRECIO BONO CERO CUPÓN con VALOR NOMINAL 100\$ $P(0; t)$
0,25	10%	97,64540897\$
0,5	10%	95,34625892\$
0,75	10%	93,10124446\$

Donde

$$P(0; 25) = \frac{VN}{(1 + r_{365})^{0,25}} = \frac{100\$}{(1 + 0,1)^{0,25}} = 97,64540897\$$$

$$P(0; 5) = \frac{VN}{(1 + r_{365})^{0,5}} = \frac{100\$}{(1 + 0,1)^{0,5}} = 95,34625892\$$$

$$P(0; 75) = \frac{VN}{(1 + r_{365})^{0,75}} = \frac{100\$}{(1 + 0,1)^{0,75}} = 93,10124446\$$$

Donde el cero en la notación indica que la valuación del BONO CERO CUPÓN es para el momento $t = 0$. Es importante notar que en $t = 0$ conocemos las tasas que se pagan para préstamos y depósitos para los plazos $t_1 = 0,25$ $t_2 = 0,5$ $t_3 = 0,75$

Si tenemos en cuenta la formula

$$i = \frac{CAPITAL\ FINAL}{CAPITAL\ INICIAL} - 1$$

Luego

$$r_{90} = \frac{VN}{p(0; 0,25)} - 1 = \frac{100\$}{97,64540897\$} - 1$$

$$r_{90} = 2,411368906\%$$

$$r_{180} = \frac{VN}{p(0; 0,5)} - 1 = \frac{100\$}{95,34625892\$} - 1$$

$$r_{180} = 4,880884822\%$$

$$r_{270} = \frac{VN}{p(0; 0,75)} - 1 = \frac{100\$}{93,10124446\$} - 1$$

$$r_{270} = 7,409949867\%$$

PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	TASA CUPÓN EFECTIVA ANUAL r_{365}	TASA CUPÓN EFECTIVA PARA EL PERIODO t
0,25	10%	2,411368906%
0,5	10%	4,880884822%
0,75	10%	7,409949867%

Como podemos apreciar hay una estructura temporal de tasas de interés en el momento $t = 0$ sobre la que nos basaremos para analizar LA EVOLUCIÓN A LARGO DEL TIEMPO de la tasa efectiva del periodo de Δt (en nuestro caso supusimos que era igual a $\Delta t = 0,25$). Esta estructura es representativa de todo el mercado de crédito porque cualquier BONO puede ser replicado en su payoffs con la compra o venta de varios BONO CERON CUPON.

Es importante notar que para hacer un ARBOL DE TASAS DE INTERÉS nos deben dar o bien las tasas efectivas anuales, o del plazo de vencimiento, o los precios de los BONOS CERO CUPÓN.

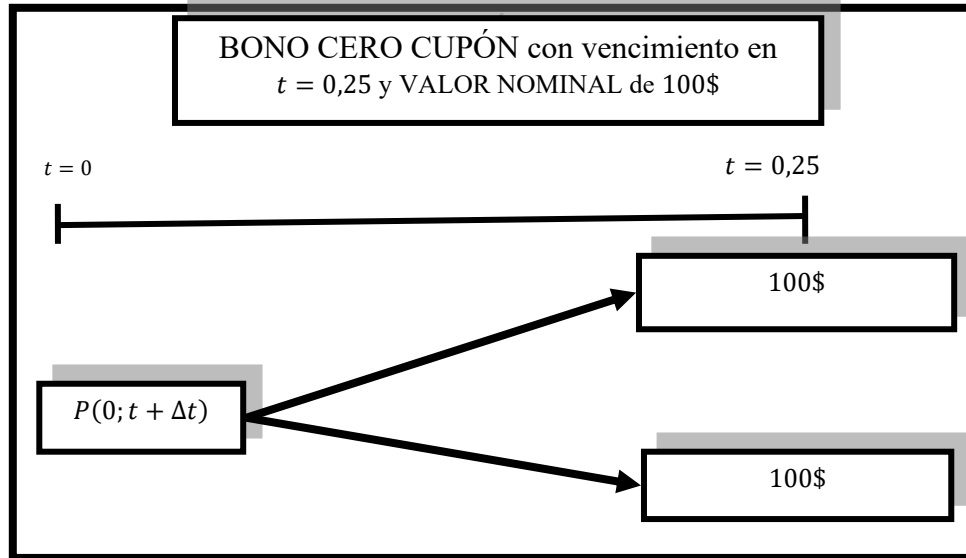
CURVA DE VOLATILIDADES YIELD FLAT

PLAZO DE VENCIMIENTO DEL BONO CERO CUPÓN t	VOLATILIDAD YIELD ANUAL σ
0,25	10%
0,5	10%
0,75	10%

CALCULO DEL ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS NOMINAL ANUAL

CALCULO DE r_0

Tomamos el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en 0,25 y un VALOR NOMINAL de 100\$, de manera gráfica



Por lo cual

$$P(0; t + \Delta t) = \frac{100\$}{(1 + \Delta t \times r_0)}$$

De donde despejamos r_0 para obtener su valor.

$$97,6454\$ = \frac{100\$}{(1 + 0,25 \times r_0)}$$

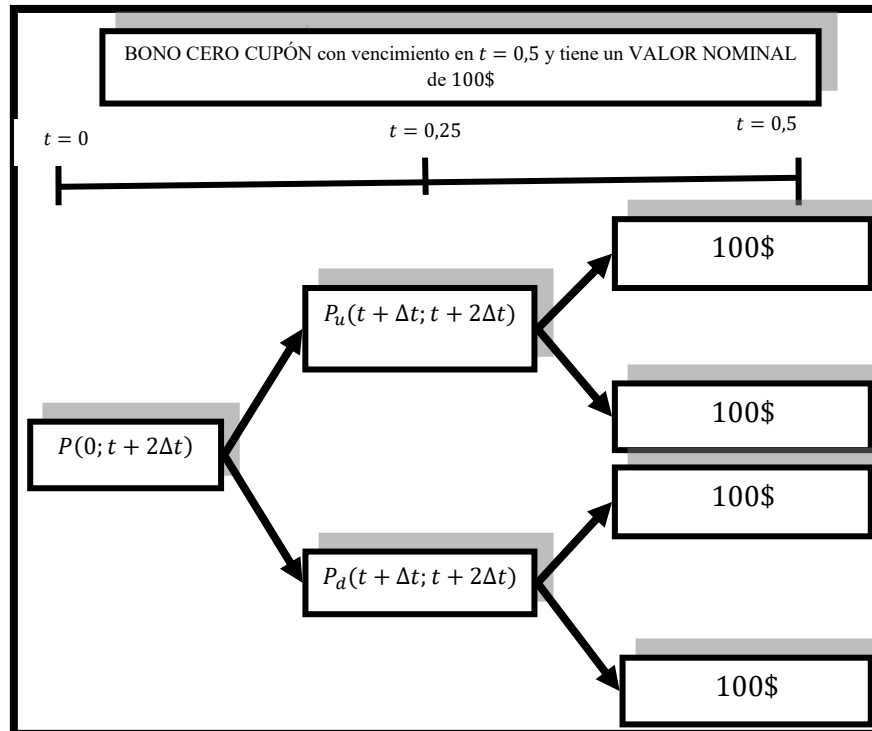
$$r_0 = \left[\frac{100\$}{97,6454\$} - 1 \right] \times 4 = 0,096455132$$

En porcentajes

$$r_0 = 9,65\%$$

CALCULO DE r_d

Tomamos el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en 0,5 y un VALOR NOMINAL de 100\$, de manera gráfica



Donde

$$P(0; t + 2\Delta t) = \frac{1}{(1 + r_0 \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_d \cdot e^{2\sigma_1 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} + \frac{100\$}{(1 + r_d \times \Delta t)} \right]$$

$$r_u = r_d \cdot e^{2\sigma_1 \sqrt{\Delta t}}$$

Por lo cual

$$95,3463\$ = \frac{1}{(1 + 0,0965 \times 0,25)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_d \cdot e^{2 \times 0,20 \sqrt{0,25} \times 0,25})} + \frac{100\$}{(1 + r_d \times 0,25)} \right]$$

$$195,293059\$ = \left[\frac{100\$}{(1 + r_d \cdot e^{2 \times 0,2 \sqrt{0,25} \times 0,25})} + \frac{100\$}{(1 + r_d \times 0,25)} \right]$$

$$195,293059\$ = \left[\frac{100\$}{(1 + r_d \times 0,305350689)} + \frac{100\$}{(1 + r_d \times 0,25)} \right]$$

$$\frac{195,293059\$}{100\$} = \left[\frac{1}{(1 + r_d \times 0,305350689)} + \frac{1}{(1 + r_d \times 0,25)} \right]$$

$$1,95293059 = \left[\frac{1}{(1 + r_d \times 0,305350689)} + \frac{1}{(1 + r_d \times 0,25)} \right]$$

$$\frac{1}{(1 + r_d \times 0,305350689)} + \frac{1}{(1 + r_d \times 0,25)} = \frac{(1 + r_d \times 0,25) + (1 + r_d \times 0,305350689)}{(1 + r_d \times 0,305350689) \times (1 + r_d \times 0,25)}$$

$$= \frac{2 + 0,555350689 \times r_d}{1 + r_d \times 0,305350689 + r_d \times 0,25 + r_d^2 \times 0,076337672}$$

$$= \frac{2 + 0,555350689 \times r_d}{1 + r_d \times 0,555350689 + r_d^2 \times 0,076337672}$$

Por lo tanto

$$1,95293059 = \frac{2 + 0,555350689 \times r_d}{1 + r_d \times 0,555350689 + r_d^2 \times 0,076337672}$$

$$1,95293059 \times [1 + r_d \times 0,555350689 + r_d^2 \times 0,076337672] = 2 + 0,555350689 \times r_d$$

$$1,95293059 + r_d \times 1,084561349 + r_d^2 \times 0,076337672 = 2 + 0,555350689 \times r_d$$

$$r_d^2 \times 0,076337672 + r_d \times 0,52921066 - 0,04706941 = 0$$

Por lo cual

$$r_d = 0,087829927$$

La otra raíz es negativa. Si lo llevamos a porcentajes

$$r_d = 8,78\%$$

Por lo tanto

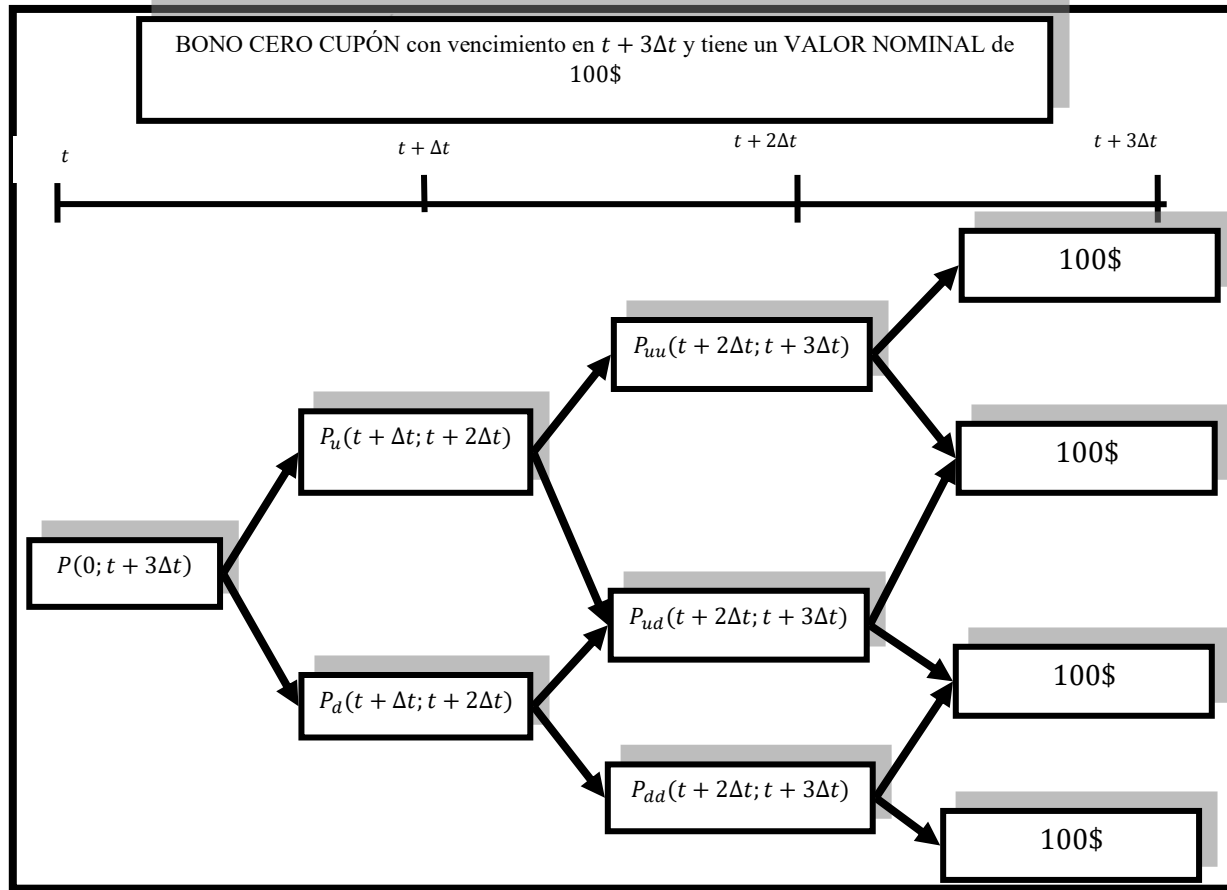
$$r_u = 0,087829927 e^{2 \times 0,2 \times \sqrt{0,25}} = 0,107275715$$

Si lo llevamos a porcentajes

$$r_u = 10,72\%$$

CALCULO DE r_{dd}

Tomamos el BONO CERO CUPÓN con vencimiento en 0,75 y un VALOR NOMINAL de 100\$, de manera gráfica



Tenemos que

$$\begin{aligned}
 P(0; t + 3\Delta t) &= \frac{1}{(1 + r_0 \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \\
 &\times \left[\frac{1}{(1 + r_d \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times \Delta t)} \right] \right. \\
 &\left. + \frac{1}{(1 + r_u \times \Delta t)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{4\sigma_2 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2 \sqrt{\Delta t}} \times \Delta t)} \right] \right] \\
 r_{uu} &= r_{dd} \cdot e^{4\sigma_2 \sqrt{\Delta t}} \\
 r_{du} &= r_{dd} \cdot e^{2\sigma_2 \sqrt{\Delta t}}
 \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}
 95,35\$ &= \frac{1}{(1 + 0,0965 \times 0,25)} \times \frac{1}{2} \\
 &\times \left[\frac{1}{(1 + 0,0878 \times 0,25)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2 \times 0,2 \sqrt{0,25}} \times 0,25)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 0,25)} \right] \right. \\
 &\left. + \frac{1}{(1 + 0,1072 \times 0,25)} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{4 \times 0,2 \sqrt{0,25}} \times 0,25)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2 \times 0,2 \sqrt{0,25}} \times 0,25)} \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$93,1012\$ = 0,4882$$

$$\times \left[0,4892 \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2 \times 0,2 \sqrt{0,25}} \times 0,25)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 0,25)} \right] \right. \\ \left. + 0,4869 \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{4 \times 0,2 \sqrt{0,25}} \times 0,25)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot e^{2 \times 0,2 \sqrt{0,25}} \times 0,25)} \right] \right]$$

$$93,1012\$ = 0,4882 \times \left[0,4892 \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 0,3053)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 0,25)} \right] + 0,4869 \times \left[\frac{100\$}{(1 + r_{dd} \times 0,3729)} + \frac{100\$}{(1 + r_{dd} \cdot 0,3053)} \right] \right]$$

$$1,907029906 = \frac{0,4892}{(1 + r_{dd} \times 0,3053)} + \frac{0,4892}{(1 + r_{dd} \times 0,25)} + \frac{0,4869}{(1 + r_{dd} \times 0,3729)} + \frac{0,4869}{(1 + r_{dd} \times 0,3053)}$$

$$1,907029906 = \frac{0,9761}{(1 + r_{dd} \times 0,3053)} + \frac{0,4892}{(1 + r_{dd} \times 0,25)} + \frac{0,4869}{(1 + r_{dd} \times 0,3729)}$$

NUMERADOR

$$0,9761 \times (1 + r_{dd} \times 0,25) \times (1 + r_{dd} \times 0,3729) + 0,4892 \times (1 + r_{dd} \times 0,3053) \times (1 + r_{dd} \times 0,3729) \\ + 0,4869 \times (1 + r_{dd} \times 0,25) \times (1 + r_{dd} \times 0,3053)$$

PRIMER TERMINO

$$(0,9761 + r_{dd} \times 0,244025) \times (1 + r_{dd} \times 0,3729)$$

$$0,9761 + r_{dd} \times 0,244025 + r_{dd} \times 0,364 + r_{dd}^2 \times 0,091$$

$$0,9761 + r_{dd} \times 0,608025 + r_{dd}^2 \times 0,091$$

SEGUNDO TERMINO

$$(0,4892 + r_{dd} \times 0,1493) \times (1 + r_{dd} \times 0,3729)$$

$$0,4892 + r_{dd} \times 0,1493 + r_{dd} \times 0,1824 + r_{dd}^2 \times 0,0557$$

$$0,4892 + r_{dd} \times 0,3317 + r_{dd}^2 \times 0,0557$$

TERCER TERMINO

$$(0,4869 + r_{dd} \times 0,1217) \times (1 + r_{dd} \times 0,3053)$$

$$0,4869 + r_{dd} \times 0,1217 + r_{dd} \times 0,14865 + r_{dd}^2 \times 0,0371$$

$$0,4869 + r_{dd} \times 0,27035 + r_{dd}^2 \times 0,0371$$

TOTAL

$$1,9522 + r_{dd} \times 1,210075 + r_{dd}^2 \times 0,1838$$

DENOMINADOR

$$(1 + r_{dd} \times 0,25) \times (1 + r_{dd} \times 0,3729) \times (1 + r_{dd} \times 0,30537)$$

EL PRIMER PRODUCTO

$$(1 + r_{dd} \times 0,25) \times (1 + r_{dd} \times 0,3729)$$

DA COMO RESULTADO

$$= 1 + r_{dd} \times 0,25 + r_{dd} \times 0,3729 + r_{dd}^2 \times 0,093225$$

EL SEGUNDO PRODUCTO

$$(1 + r_{dd} \times 0,6229 + r_{dd}^2 \times 0,093225) \times (1 + r_{dd} \times 0,30537)$$

DA COMO RESULTADO

$$1 + r_{dd} \times 0,6229 + r_{dd}^2 \times 0,093225 + r_{dd} \times 0,30537 + r_{dd}^2 \times 0,1902 + r_{dd}^3 \times 0,0285$$

Por lo cual

$$1 + r_{dd} \times 0,92827 + r_{dd}^2 \times 0,283425 + r_{dd}^3 \times 0,0285$$

Si multiplicamos este resultado por el valor 1,907029906 obtenemos

$$1,907029906 + r_{dd} \times 1,77024 + r_{dd}^2 \times 0,5405 + r_{dd}^3 \times 0,05435$$

RESULTADO HASTA AHORA

$$1,907029906 + r_{dd} \times 1,77024 + r_{dd}^2 \times 0,5405 + r_{dd}^3 \times 0,05435$$

$$= 1,9522 + r_{dd} \times 1,210075 + r_{dd}^2 \times 0,1838$$

Igualando a cero

$$-0,04517701 + r_{dd} \times 0,560165 + r_{dd}^2 \times 0,3567 + r_{dd}^3 \times 0,05435 = 0$$

$$r_{dd} = 0,07684516$$

En porcentaje

$$r_{dd} = 7,68\%$$

Se asocia la diferencia a errores de redondeo

También

$$r_{uu} = 0,07684516 \cdot e^{4 \times 0,2 \sqrt{0,25}} = 0.114639507$$

En porcentaje

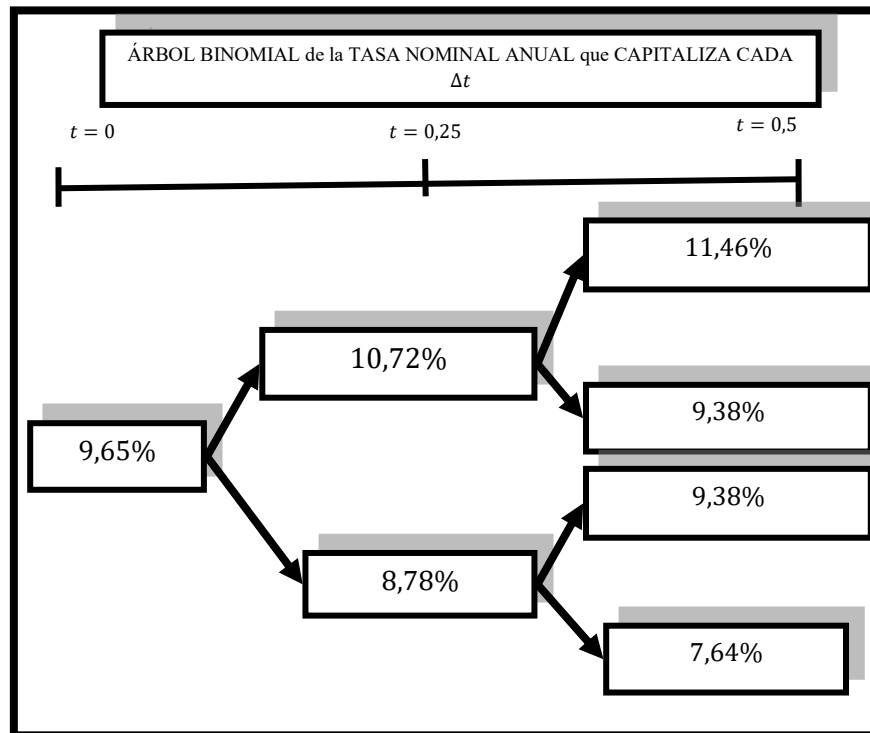
$$r_{uu} = 11,46\%$$

$$r_{du} = 0,07684516 \cdot e^{2 \times 0,2 \sqrt{0,25}} = 0,09385889$$

En porcentaje

$$r_{du} = 9,38\%$$

ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS



CONDICION DE EMISIÓN DEL CAPLET

Las condiciones de emisión tienen un NOCIONAL igual a 1.000\$ y una tasa de ejercicio $r_k = 9\%$ con una fecha de vencimiento de 9 meses.

En base al ÁRBOL DE TASAS DE INTERÉS que construimos vamos a valorar el CAPLET.

VALUACIÓN DEL CAPLET

Para el cálculo del payoffs al vencimiento del CAPLET utilizamos la formula

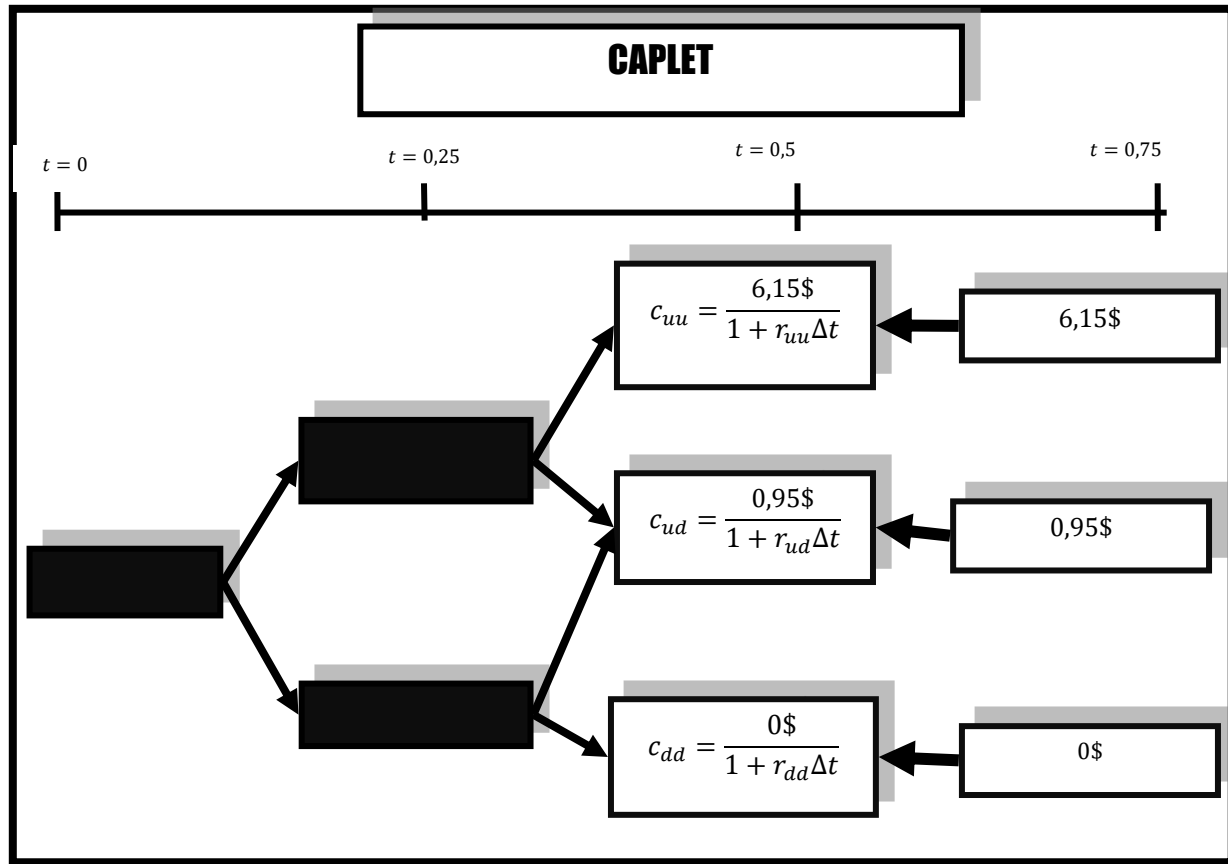
$$1000\$ \times 0,25 \times \max[r_T - 9\%; 0]$$

Por lo cual

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[11,46\% - 9\%; 0] = 1000\$ \times 0,25 \times 0,0246 = 6,15\$$$

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[9,38\% - 9\%; 0] = 1000\$ \times 0,25 \times 0,0038 = 0,95\$$$

$$1000\$ \times 0,25 \times \max[7,64\% - 9\%; 0] = 0\$$$



En el momento $t = 0,5$

Calculo de c_{uu}

$$c_{uu} = \frac{6,15\$}{1 + 0,1146 \times 0,25} = 5,9787\$$$

Calculo de c_{ud}

$$c_{ud} = \frac{0,95\$}{1 + 0,0938 \times 0,25} = 0,9282\$$$

Calculo de c_{dd}

$$c_{dd} = \frac{0\$}{1 + 0,0764 \times 0,25} = 0\$$$

VALOR DEL CAPLET EN CADA NODO

$$E_{\pi^{RN}}(c_t) \cdot FD_t$$

Las probabilidades riesgo neutro π^{RN} como mencionamos nos vienen dadas.

En el momento $t = 0,25$

Calculo de c_u

$$c_u = \frac{\left[5,9787\$ \times \frac{1}{2} + 0,9282\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,1072 \times 0,25} = 3,3633\$$$

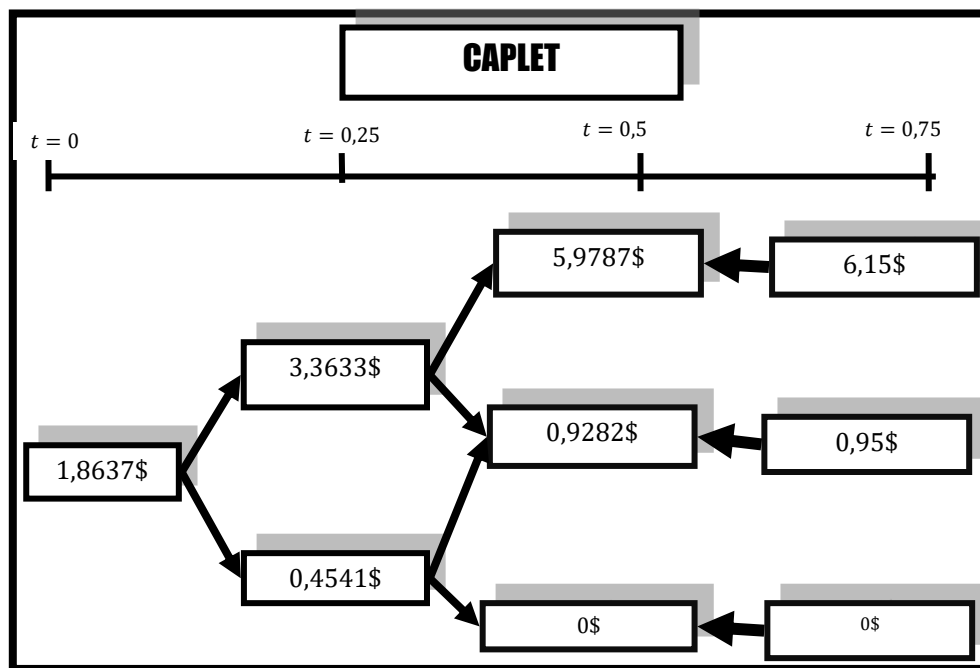
Calculo de c_d

$$c_d = \frac{\left[0,9282\$ \times \frac{1}{2} + 0\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,0878 \times 0,25} = 0,4541\$$$

En el momento $t = 0$

Calculo c_0

$$c_0 = \frac{\left[3,3633\$ \times \frac{1}{2} + 0,4541\$ \times \frac{1}{2}\right]}{1 + 0,0965 \times 0,25} = 1,8637\$$$

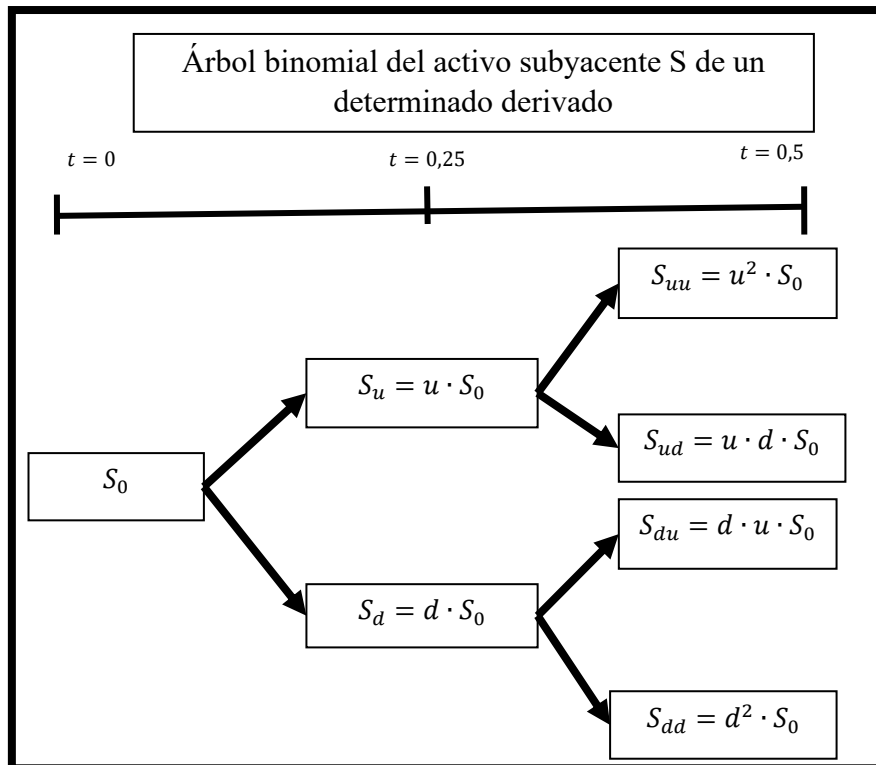


Capítulo 8: Valuación de derivados. Ejercitación

VALUACIÓN DE DERIVADOS

VALUACIÓN DE UN CALL EUROPEO CON NUMERARIO P LIBRE DE RIESGO Y PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

ACTIVO SUBYACENTE



Sean los siguientes datos

$r = 10\%$ compuesta continua

$\sigma = 20\%$

$\Delta t = 0,25$

Recordando las formulas

$$u = e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}}$$

$$d = \frac{1}{u}$$

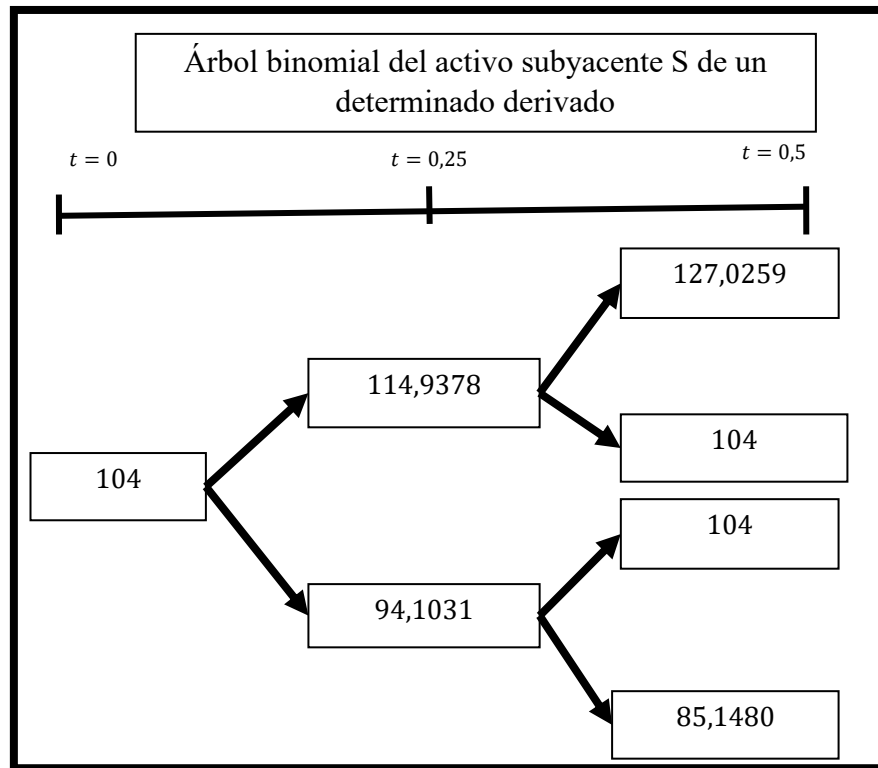
Tenemos que

$$u = e^{0,2 \cdot \sqrt{0,25}}$$

$$u = 1,10517$$

$$d = \frac{1}{e^{0,2 \cdot \sqrt{0,25}}} = \frac{1}{1,10517}$$

$$d = 0,90484$$



NUMERARIO P LIBRE DE RIESGO

El numerario puede ser cualquier activo, en este caso en particular lo supongo un Bono Cero Cupón

Sea el siguiente Bono Cero Cupón

Fecha de vencimiento: 6 meses

Valor nominal: 100

Como el numerario p es libre de riesgo el pay-off en el momento $t = 0,5$ deben ser todos y cada uno de ellos iguales.

Como estamos trabajando en tiempo continuo y debemos obtener los diferentes precios. Luego

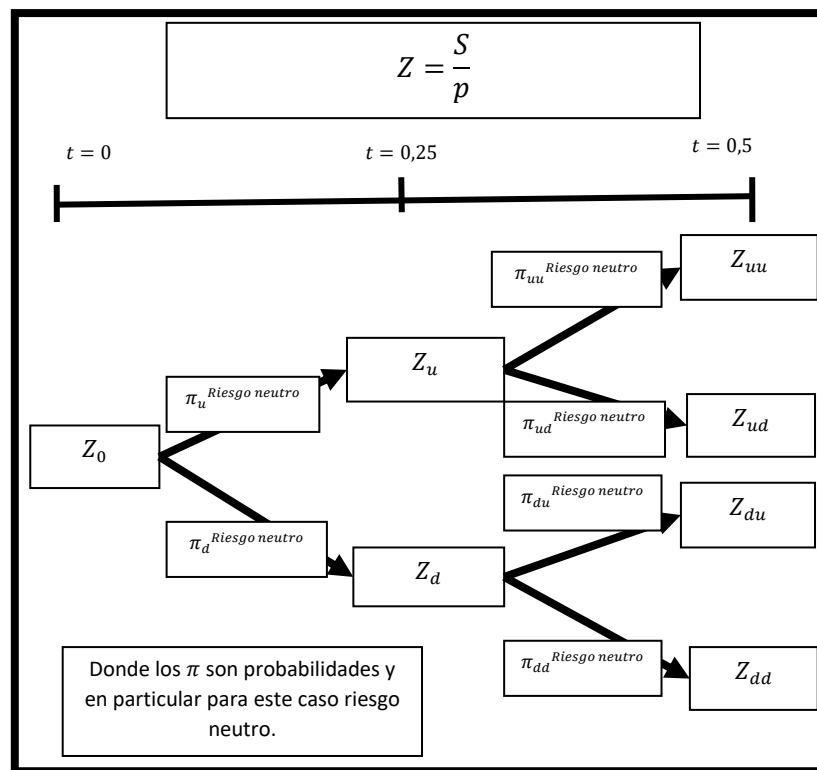
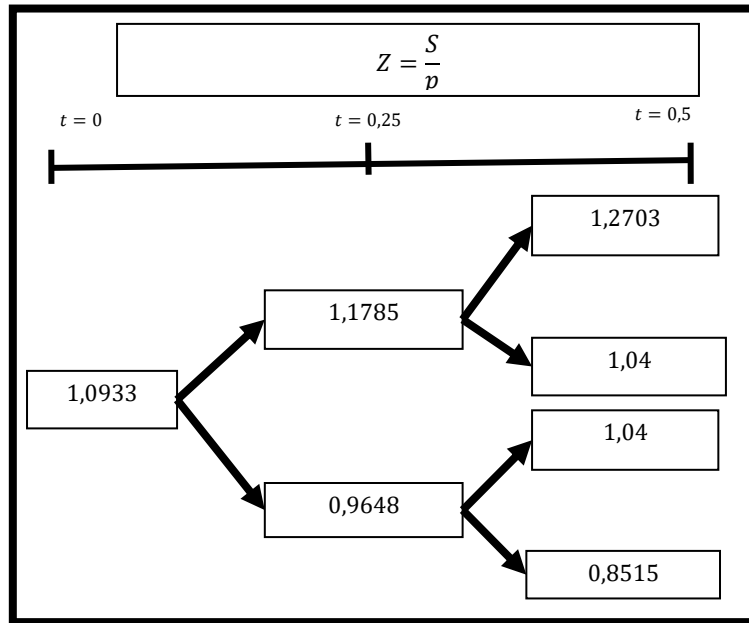
El valor del bono cero cupón en $t = 0,25$ es igual a

$$P(0; 0,25) = 100 \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25} = 97,5310$$

El valor del bono cero cupón en $t = 0$ es igual a

$$P(0; 0) = 100 \cdot e^{-0,1 \cdot 0,5} = 95,1229$$

T	$P(0; t)$
0	95,1229
0,25	97,5310
0,5	100



Para el cálculo de las probabilidades hay que realizar la esperanza de cada nodo y que sea una martingala

Donde un proceso de martingala es igual a

$$E_{p^n}(Z_t) = Z$$

Por lo cual

$$Z_u = (\pi_{uu}^{RN} \cdot Z_{uu} + \pi_{ud}^{RN} \cdot Z_{ud})$$

$$Z_d = (\pi_{dd}^{RN} \cdot Z_{dd} + \pi_{du}^{RN} \cdot Z_{du})$$

$$Z_0 = (\pi_d^{RN} \cdot Z_d + \pi_u^{RN} \cdot Z_u)$$

Donde

$$\pi_d^{RN} = 1 - \pi_u^{RN}$$

Luego tenemos que π_u^{RN} y π_d^{RN}

$$1,0933 = ((1 - \pi_u^{RN}) \cdot 0,9648 + \pi_u^{RN} \cdot 1,1785)$$

$$1,0933 = 0,9648 - 0,9648 \cdot \pi_u^{RN} + \pi_u^{RN} \cdot 1,1785$$

$$0,1285 = 0,2137 \cdot \pi_u^{RN}$$

$$\pi_u^{RN} = 0,601310248$$

Luego tenemos que

$$\pi_d^{RN} = 0,398689752$$

Calculo de las restantes probabilidades $\pi_{uu}^{RN}, \pi_{ud}^{RN}, \pi_{du}^{RN}, \pi_{dd}^{RN}$

Tenemos que

$$\pi_{ud}^{RN} = 1 - \pi_{uu}^{RN}$$

Así también

$$\pi_{du}^{RN} = 1 - \pi_{dd}^{RN}$$

Por lo cual

$$1,1785 = (\pi_{uu}^{RN} \cdot 1,2703 + (1 - \pi_{uu}^{RN}) \cdot 1,04)$$

$$1,1785 = \pi_{uu}^{RN} \cdot 1,2703 + 1,04 - 1,04\pi_{uu}^{RN}$$

$$0,1385 = 0,2303\pi_{uu}^{RN}$$

$$\pi_{uu}^{RN} = 0,601389492$$

$$\pi_{ud}^{RN} = 0,398610508$$

$$0,9649 = (\pi_{dd}^{RN} \cdot 0,8515 + (1 - \pi_{dd}^{RN}) \cdot 1,04)$$

$$0,9649 = \pi_{dd}^{RN} \cdot 0,8515 + 1,04 - 1,04\pi_{dd}^{RN}$$

$$-0,0751 = -0,1885\pi_{dd}^{RN}$$

$$\pi_{dd}^{RN} = 0,398408488$$

$$\pi_{du}^{RN} = 0,601591511$$

PROBABILIDADES DE CAMINO

Camino $\overline{Z_0 Z_u}$

$$\pi_u^{RN} = 0,601310248$$

$$\boxed{Pr_{\overline{Z_0 Z_u}} = 0,601310248}$$

$$\text{Camino } \overline{Z_0 Z_d}$$

$$\pi_d^{RN} = 0,398689752$$

$$\boxed{Pr_{\overline{Z_0 Z_d}} = 0,398689752}$$

$$\text{Camino } \overline{Z_0 Z_u Z_{uu}}$$

$$\pi_u^{RN} \cdot \pi_{uu}^{RN} = 0,601310248 \cdot 0,601389492 = 0,361621664$$

$$\boxed{Pr_{\overline{Z_0 Z_u Z_{uu}}} = 0,361621664}$$

$$\text{Camino } \overline{Z_0 Z_u Z_{ud}}$$

$$\pi_u^{RN} \cdot \pi_{ud}^{RN} = 0,601310248 \cdot 0,398610508 = 0,239688583$$

$$\boxed{Pr_{\overline{Z_0 Z_u Z_{ud}}} = 0,239688583}$$

$$\text{Camino } \overline{Z_0 Z_d Z_{du}}$$

$$\pi_d^{RN} \cdot \pi_{du}^{RN} = 0,398689752 \cdot 0,601591511 = 0,23984837$$

$$\boxed{Pr_{\overline{Z_0 Z_d Z_{du}}} = 0,23984837}$$

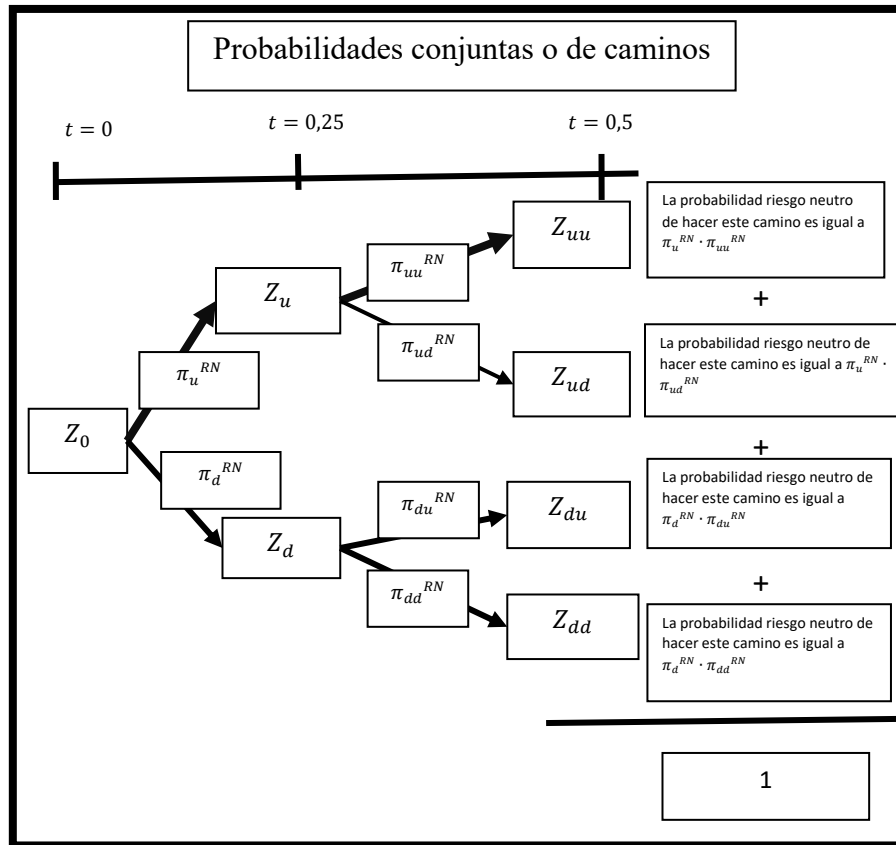
$$\text{Camino } \overline{Z_0 Z_d Z_{dd}}$$

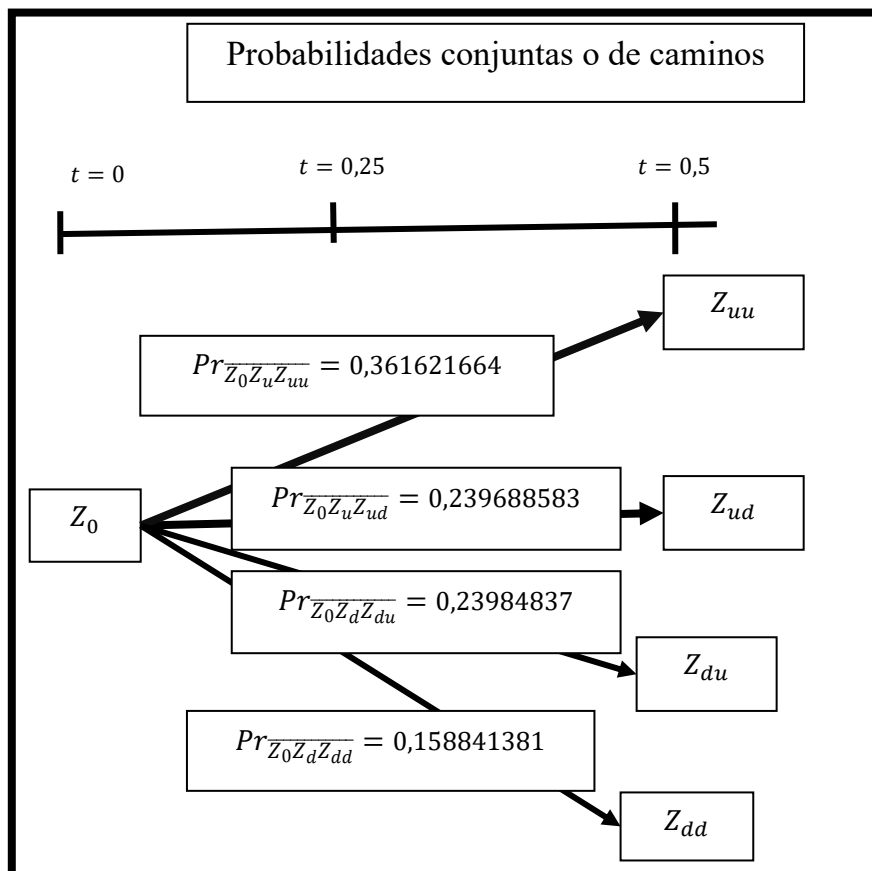
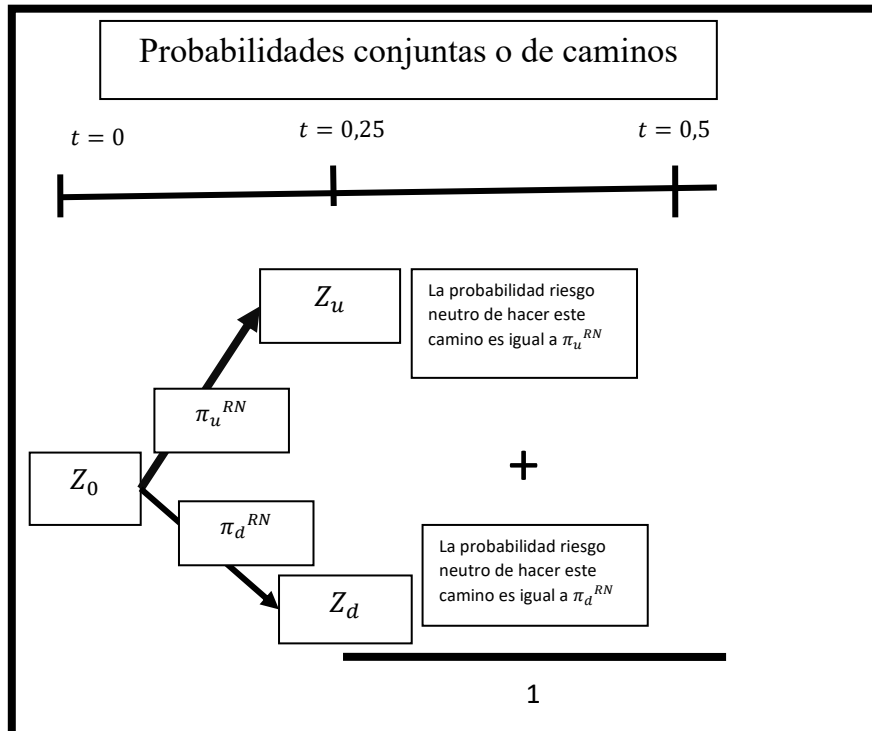
$$\pi_d^{RN} \cdot \pi_{dd}^{RN} = 0,398689752 \cdot 0,398408488 = 0,158841381$$

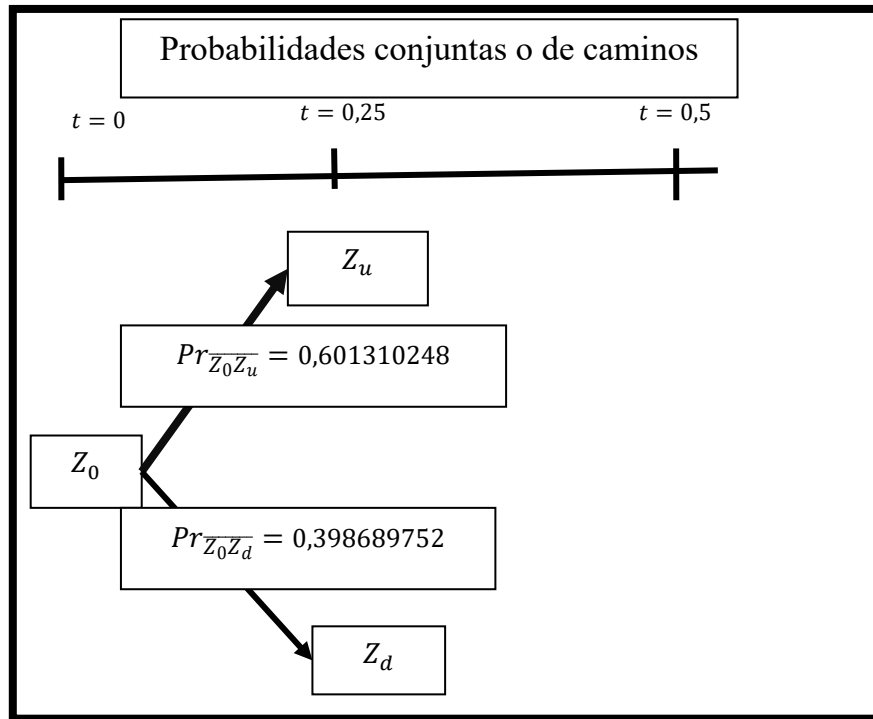
$$\boxed{Pr_{\overline{Z_0 Z_d Z_{dd}}} = 0,158841381}$$

La suma debe ser igual a 1

$$\begin{aligned} & Pr_{\overline{Z_0 Z_u Z_{uu}}} + Pr_{\overline{Z_0 Z_u Z_{ud}}} + Pr_{\overline{Z_0 Z_d Z_{du}}} + Pr_{\overline{Z_0 Z_d Z_{dd}}} \\ &= 0,158841381 + 0,23984837 + 0,239688583 + 0,361621664 = 1 \\ & Pr_{\overline{Z_0 Z_d}} + Pr_{\overline{Z_0 Z_u}} = 0,398689752 + 0,601310248 = 1 \end{aligned}$$





**PROPIEDAD**

$$Z_0 = Pr_{\overline{Z_0 Z_u}} \cdot Z_u + Pr_{\overline{Z_0 Z_d}} \cdot Z_d$$

$$Z_0 = 0,601310248 \cdot 1,1785 + 0,398689752 \cdot 0,9649$$

$$Z_0 = 1,0933$$

$$Z_0 = Pr_{\overline{Z_0 Z_u Z_{uu}}} \cdot Z_{uu} + Pr_{\overline{Z_0 Z_u Z_{ud}}} \cdot Z_{ud} + Pr_{\overline{Z_0 Z_d Z_{du}}} \cdot Z_{du} + Pr_{\overline{Z_0 Z_d Z_{dd}}} \cdot Z_{dd}$$

$$= 0,361621664 \cdot 1,2703 + 0,239688583 \cdot 1,04 + 0,23984837 \cdot 1,04 + 0,158841381 \cdot 0,8515$$

$$Z_0 = 1,0933$$

VALUACIÓN DE UN CALL EUROPEO

Tenemos el siguiente call europeo

$$K = 100$$

Vencimiento en $t = 0,5$

El activo subyacente es el que estuvimos analizando arriba

Pay-off del call europeo

Hay dos estados de la naturaleza up y down. Para que haya mercados completos tiene que haber tantos activos linealmente independientes como estados de la naturaleza haya, por lo cual, en este caso tiene que haber dos activos

linealmente independientes. Estos activos son el subyacente y el numerario p . Con ellos podemos replicar cualquier activo.

Armamos una cartera que replica el movimiento que realiza el pay-off del call

En el momento $t = 0$

$$c_0 = \alpha S_0 + \beta P_0$$

En el momento $t = 0,25$

$$c_u = \alpha S_u + \beta p_u$$

$$c_d = \alpha S_d + \beta p_d$$

En el momento $t = 0,5$

$$c_{uu} = \alpha S_{uu} + \beta p_{uu}$$

$$c_{ud} = \alpha S_{ud} + \beta p_{ud}$$

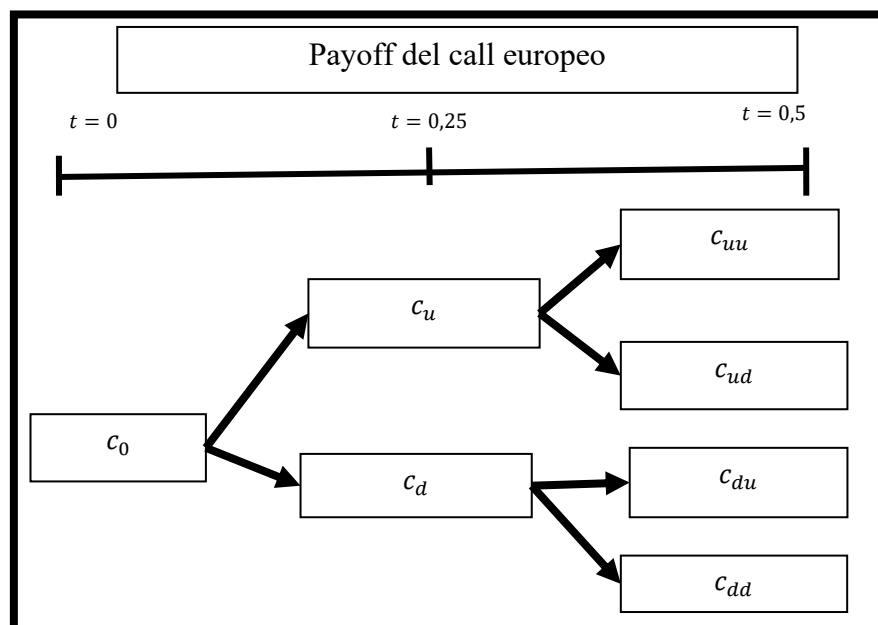
$$c_{du} = \alpha S_{du} + \beta p_{du}$$

$$c_{dd} = \alpha S_{dd} + \beta p_{dd}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones hay que encontrar el payoff del call europeo

Recordando que

$$\max [S_t - K; 0]$$



Resolvemos de atrás hasta llegar hasta $t = 0$.

Hay dos maneras

1. Método tradicional que consiste en el valor actual de la esperanza

2. Trabajando con una variable $Z_2 = \frac{c}{p}$ donde únicamente se trabaja con la esperanza, es decir, se basa en el proceso de martingala.

METODO TRADICIONAL

$$\boxed{VALOR\ DEL\ CALL\ EN\ CADA\ NODO = E_{\pi^{RN}}(c_t) \cdot e^{-r \cdot T}}$$

Primero, obtenemos el pay-off del último nodo con el pay-off del call $\max(S_t - K; 0)$, de esta manera obtenemos c_{uu} , c_{ud} , c_{du} y c_{dd} y el resto de los nodos los obtenemos con el método tradicional. Las probabilidades riesgo neutro π^{RN} ya las calculamos más arriba.

En el momento $t = 0,25$

Calculo de c_u

$$c_u = [\pi_{uu}^{RN} c_{uu} + (1 - \pi_{uu}^{RN}) c_{ud}] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

$$c_u = [0,601386 \cdot 27,0259 + (0,398614) \cdot 4] \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25}$$

$$c_u = 17,4068$$

Calculo de c_d

$$c_d = [\pi_{dd}^{RN} c_{dd} + (1 - \pi_{dd}^{RN}) c_{du}] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

$$c_d = [0,601386 \cdot 0 + (0,398614) \cdot 4] \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25}$$

$$c_d = 2,3461$$

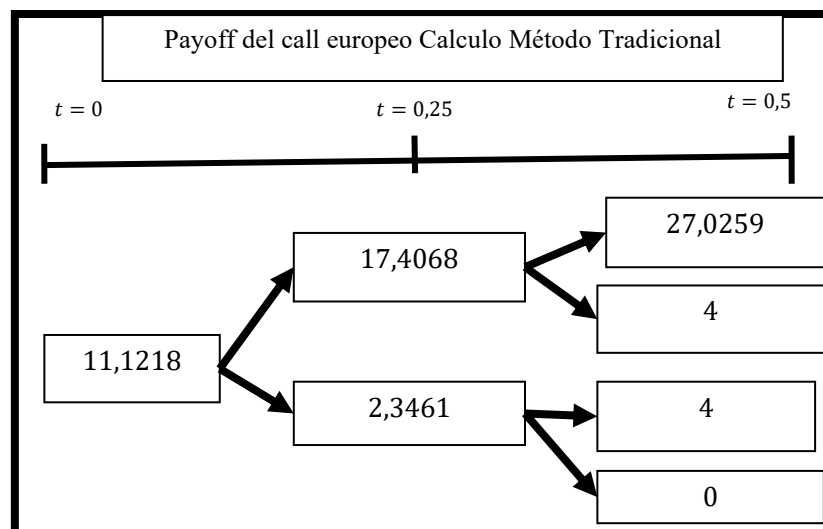
En el momento $t = 0$

Calculo c_0

$$c_0 = [\pi_u^{RN} c_u + \pi_d^{RN} c_d] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

$$c_0 = [(0,601386) \cdot 17,4068 + (0,398614) \cdot 2,3461] \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25}$$

$$\boxed{c_0 = 11,1218}$$



MÉTODO BASADO EN EL PROCESO DE MARTINGALA

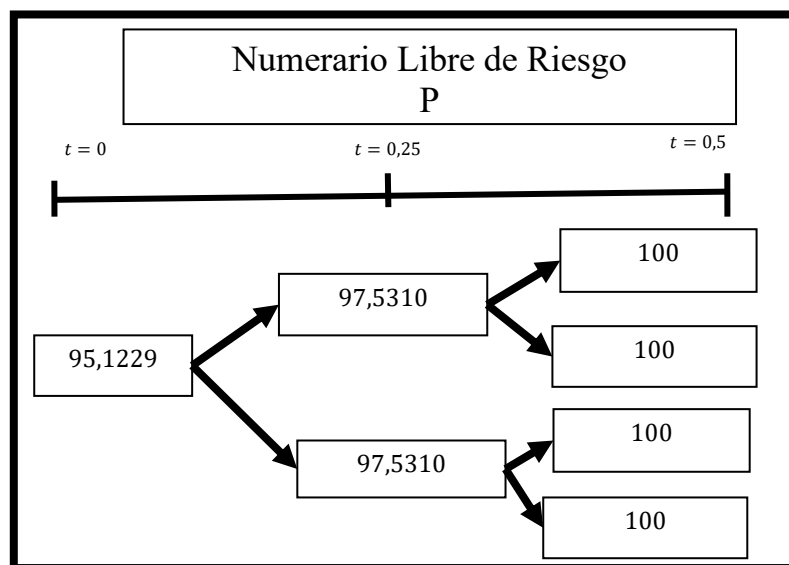
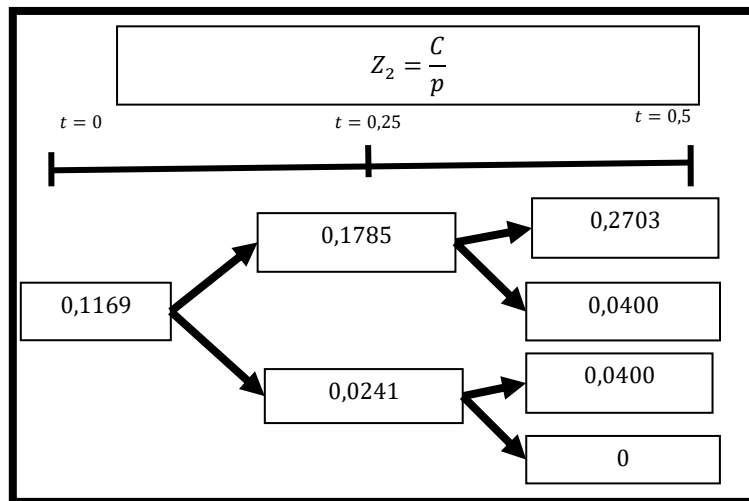
Para encontrar el valor de cada nodo hay que realizar el mismo procedimiento que hicimos con el subyacente, es decir, que hay que definir una variable $Z_2 = \frac{C}{p}$ con el numerario p libre de riesgo.

Donde el proceso de martingala implica el siguiente concepto

$$E_{p^n}(Z_t) = Z_0$$

Lo cual implica que el valor de cada nodo ya no es el valor actual de la esperanza, sino únicamente la esperanza. Con este propósito utilizamos la variable Z_2 , por lo cual, se hacen más sencillas las cuentas.

Como en el método tradicional, primero obtenemos el pay-off del último nodo con el pay-off del call $\max(S_t - K; 0)$, de esta manera obtenemos c_{uu}, c_{ud}, c_{du} y c_{dd} y el resto de los nodos los obtenemos con el método. Las probabilidades riesgo neutro π^{RN} ya las calculamos más arriba.



En el momento $t = 0,25$ calculamos c_u y c_d

Si tomamos el método tradicional

$$c_u = [\pi_{uu}^{RN} c_{uu} + (1 - \pi_{uu}^{RN}) c_{ud}] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

Y lo dividimos por p_u

$$\frac{c_u}{p_u} = [\pi_{uu}^{RN} c_{uu} + (1 - \pi_{uu}^{RN}) c_{ud}] \cdot \frac{e^{-r \cdot \Delta t}}{p_u}$$

Donde

$$p_u = p_d$$

$$P_{uu} = P_{ud}$$

También

$$p_u = P_{uu} \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

Reemplazando p_u

$$\frac{c_u}{p_u} = [\pi_{uu}^{RN} c_{uu} + (1 - \pi_{uu}^{RN}) c_{ud}] \cdot \frac{e^{-r \cdot \Delta t}}{P_{uu} \cdot e^{-r \cdot \Delta t}}$$

Si hacemos distributiva y cancelamos

$$\frac{c_u}{p_u} = \left[\pi_{uu}^{RN} \frac{c_{uu}}{P_{uu}} + (1 - \pi_{uu}^{RN}) \frac{c_{ud}}{P_{uu}} \right]$$

Reemplazando $P_{uu} = P_{ud}$

$$\frac{c_u}{p_u} = \left[\pi_{uu}^{RN} \frac{c_{uu}}{P_{uu}} + (1 - \pi_{uu}^{RN}) \frac{c_{ud}}{P_{ud}} \right]$$

De esta manera obtenemos la martingala

$$\frac{c_u}{p_u} = [0,601386 \cdot 0,27,0259 + (0,398614) \cdot 0,04]$$

$$\frac{c_u}{p_u} = 0,1785$$

En el momento $t = 0,25$ calculamos c_u y c_d

Si tomamos el método tradicional

$$c_d = [\pi_{dd}^{RN} c_{dd} + (1 - \pi_{dd}^{RN}) c_{du}] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

Y lo dividimos por p_u

$$\frac{c_d}{p_d} = [\pi_{uu}^{RN} c_{uu} + (1 - \pi_{uu}^{RN}) c_{ud}] \cdot \frac{e^{-r \cdot \Delta t}}{p_d}$$

Donde

$$p_u = p_d$$

$$P_{du} = P_{dd}$$

También

$$p_d = P_{dd} \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

Reemplazando p_d

$$\frac{c_d}{P_d} = [\pi_{dd}^{RN} c_{dd} + (1 - \pi_{dd}^{RN}) c_{du}] \cdot \frac{e^{-r \cdot \Delta t}}{P_{dd} \cdot e^{-r \cdot \Delta t}}$$

Si hacemos distributiva y cancelamos

$$\frac{c_d}{P_d} = \left[\pi_{dd}^{RN} \frac{c_{dd}}{P_{dd}} + (1 - \pi_{dd}^{RN}) \frac{c_{du}}{P_{dd}} \right]$$

Reemplazando $P_{du} = P_{dd}$

$$\frac{c_d}{P_d} = \left[\pi_{dd}^{RN} \frac{c_{dd}}{P_{dd}} + (1 - \pi_{du}^{RN}) \frac{c_{ud}}{P_{du}} \right]$$

De esta manera obtenemos la martingala

$$\frac{c_d}{p_d} = [0,601386 \cdot 0,04 + (0,398614) \cdot 0]$$

$$\frac{c_d}{p_d} = 0,0241$$

En el momento $t = 0$ calculamos c_0

$$c_0 = [\pi_u^{RN} c_u + \pi_d^{RN} c_d] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

Si dividimos por p_0

$$\frac{c_0}{p_0} = [\pi_u^{RN} c_u + \pi_d^{RN} c_d] \cdot \frac{e^{-r \cdot \Delta t}}{p_0}$$

También

$$p_0 = P_u \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

Donde

$$p_u = p_d$$

$$\frac{c_0}{p_0} = [\pi_u^{RN} c_u + \pi_d^{RN} c_d] \cdot \frac{e^{-r \cdot \Delta t}}{P_u \cdot e^{-r \cdot \Delta t}}$$

Si hacemos distributiva y cancelamos

$$\frac{c_0}{P_0} = \left[\pi_u^{RN} \frac{c_u}{P_u} + (1 - \pi_u^{RN}) \frac{c_d}{P_u} \right]$$

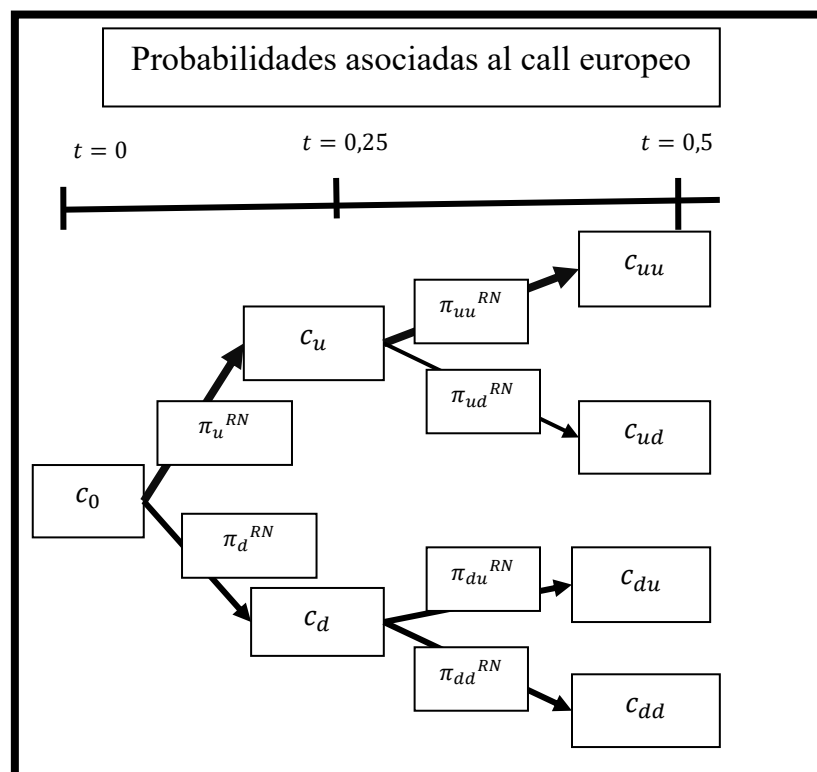
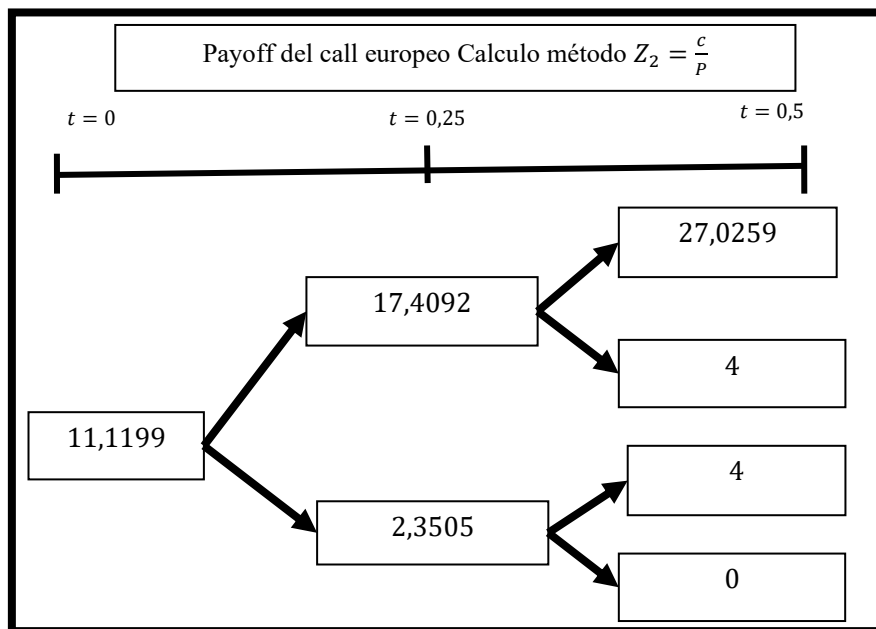
Reemplazando $P_u = P_d$

$$\frac{c_0}{P_0} = \left[\pi_u^{RN} \frac{c_u}{P_u} + (1 - \pi_u^{RN}) \frac{c_d}{P_d} \right]$$

$$\frac{c_0}{p_0} = [(0,601386) \cdot 0,1785 + (0,398614) \cdot 0,0241]$$

$$\frac{c_0}{p_0} = 0,1169$$

Si multiplicamos cada nodo por p obtenemos los pay-off del call.



ESTRATEGIA

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

Estrategia		
Cartera		Pay-off del call
$S_u = 114,9378$	$P_u = 97,5310$	$c_u = 17,4068$
$S_d = 94,1031$	$P_d = 97,5310$	$c_d = 2,3461$

Escenario Up

$$c_u = \alpha S_u + \beta p_u$$

Escenario Down

$$c_d = \alpha S_d + \beta p_d$$

Lo que falta es determinar la cantidad de α y β que son las cantidades que se debe tener de cada activo en la cartera para replicar el comportamiento del derivado. Para que no haya oportunidades de arbitraje se debe cumplir que las igualdades se mantengan o de lo contrario la cartera o el derivado podrían estar subvaluado o sobrevaluado y por lo tanto se podría obtener una ganancia libre de riesgo sin colocar capital. Esto para cada nodo

Para encontrar los valores debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} S_u & p_u \\ S_d & p_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_u \\ c_d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 114,9378 & 97,5310 \\ 94,1031 & 97,5310 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,4068 \\ 2,3461 \end{bmatrix}$$

Se resuelve por Cramer

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} S_u & p_u \\ S_d & p_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 114,9378 & 97,5310 \\ 94,1031 & 97,5310 \end{vmatrix}$$

$$= (114,9378 \cdot 97,5310) - (94,1031 \cdot 97,5310) = 2032,0291$$

El cual es distinto de cero por lo cual

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} S_u & c_u \\ S_d & c_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & p_u \\ S_d & p_d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 114,9378 & 17,4068 \\ 94,1031 & 2,3461 \end{vmatrix}}{2032,0291} = \frac{-1368,3783}{2032,0291} = -0,6734$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} c_u & p_u \\ c_d & p_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & p_u \\ S_d & p_d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 17,4068 & 97,5310 \\ 2,3461 & 97,5310 \end{vmatrix}}{2032,0291} = \frac{1468,8851}{2032,0291} = 0,7229$$

Estrategia				
Cartera			Pay-off del call	
Subyacente	α	P	β	Call
$S_u = 114,9378$	0,7229	$P_u = 97,5310$	-0,6734	$c_u = 17,4068$
$S_d = 94,1031$		$P_d = 97,5310$		$c_d = 2,3461$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

Escenario Up

$$c_{uu} = \alpha S_{uu} + \beta p_{uu}$$

$$c_{ud} = \alpha S_{ud} + \beta p_{ud}$$

Estrategia		
Cartera		Pay-off del call
$S_{uu} = 127,0259$	$P_{uu} = 100$	$c_{uu} = 27,0259$
$S_{ud} = 104$	$P_{ud} = 100$	$c_{ud} = 4$
Estrategia		
Cartera		Pay-off del call
$S_{du} = 104$	$P_{du} = 100$	$c_{du} = 4$
$S_{dd} = 85,1480$	$P_{dd} = 100$	$c_{dd} = 0$

Para encontrar los valores debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} S_{uu} & p_{uu} \\ S_{ud} & p_{ud} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{uu} \\ c_{ud} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 127,0259 & 100 \\ 104 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27,0259 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se resuelve por Cramer

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} S_{uu} & p_{uu} \\ S_{ud} & p_{ud} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 127,0259 & 100 \\ 104 & 100 \end{vmatrix}$$

$$= (127,0259 \cdot 100) - (104 \cdot 100) = 2302,59$$

El cual es distinto de cero por lo cual

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} S_{uu} & c_{uu} \\ S_{ud} & c_{ud} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{uu} & p_{uu} \\ S_{ud} & p_{ud} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 127,0259 & 27,0259 \\ 104 & 4 \end{vmatrix}}{2302,59} = \frac{-2302,59}{2302,59} = -1$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} c_{uu} & p_{uu} \\ c_{ud} & p_{ud} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{uu} & p_{uu} \\ S_{ud} & p_{ud} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 27,0259 & 100 \\ 4 & 100 \end{vmatrix}}{2302,59} = \frac{2302,59}{2302,59} = 1$$

Escenario down

$$c_{du} = \alpha S_{du} + \beta p_{du}$$

$$c_{dd} = \alpha S_{dd} + \beta p_{dd}$$

Para encontrar los valores debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} S_{du} & p_{du} \\ S_{dd} & p_{dd} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{du} \\ c_{dd} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 104 & 100 \\ 85,1480 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se resuelve por Cramer

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} S_{du} & p_{du} \\ S_{dd} & p_{dd} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 104 & 100 \\ 85,1480 & 100 \end{vmatrix}$$

$$= (104 \cdot 100) - (85,1480 \cdot 100) = 1885,2$$

El cual es distinto de cero por lo cual

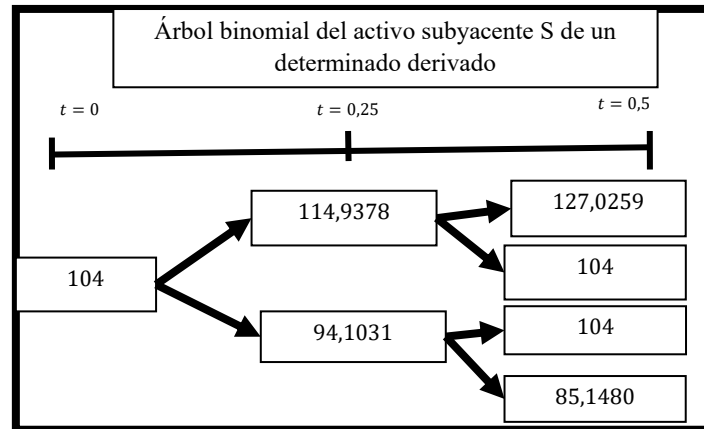
$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} S_{du} & c_{du} \\ S_{dd} & c_{dd} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{du} & p_{du} \\ S_{dd} & p_{dd} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 104 & 4 \\ 85,1480 & 0 \end{vmatrix}}{1885,2} = \frac{-340,592}{1885,2} = -0,1807$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} c_{du} & p_{du} \\ c_{dd} & p_{dd} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{du} & p_{du} \\ S_{dd} & p_{dd} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 100 \\ 0 & 100 \end{vmatrix}}{1885,2} = \frac{400}{1885,2} = 0,2122$$

Estrategia				
Cartera				Pay-off del call
Subyacente	α	P	β	Call
$S_{uu} = 127,0259$	1	$P_{uu} = 100$	-1	$c_{uu} = 27,0259$
$S_{ud} = 104$		$P_{ud} = 100$		$c_{ud} = 4$
Cartera				Pay-off del call
Subyacente	α	P	β	Call
$S_{du} = 104$	0,2122	$P_{du} = 100$	-0,1807	$c_{du} = 4$
$S_{dd} = 85,1480$		$P_{dd} = 100$		$c_{dd} = 0$

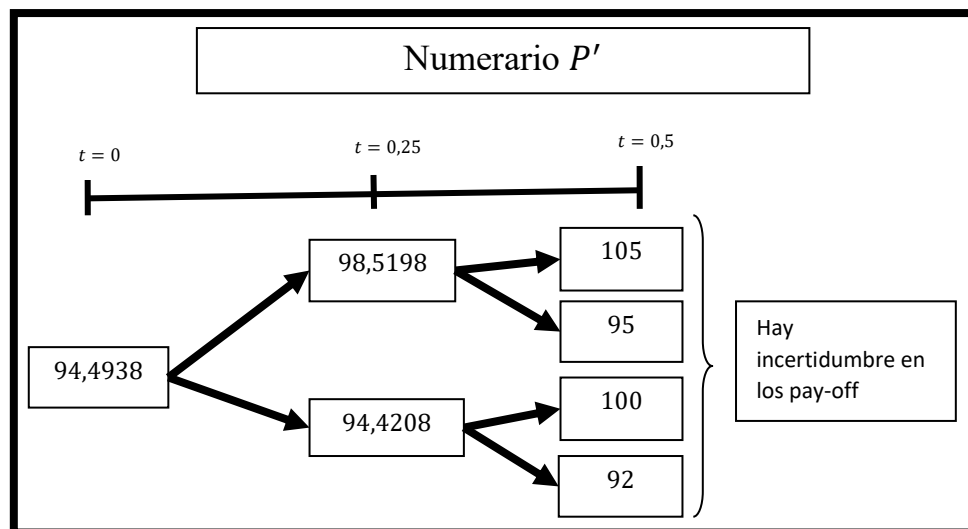
VALUACIÓN DE UN CALL EUROPEO CON NUMERARIO P' EL CUAL NO ES LIBRE DE RIESGO Y SIN PROBABILIDADES RIESGO NEUTRO

ACTIVO SUBYACENTE



NUMERARIO P' EL CUAL NO ES LIBRE DE RIESGO

El numerario puede ser cualquier activo



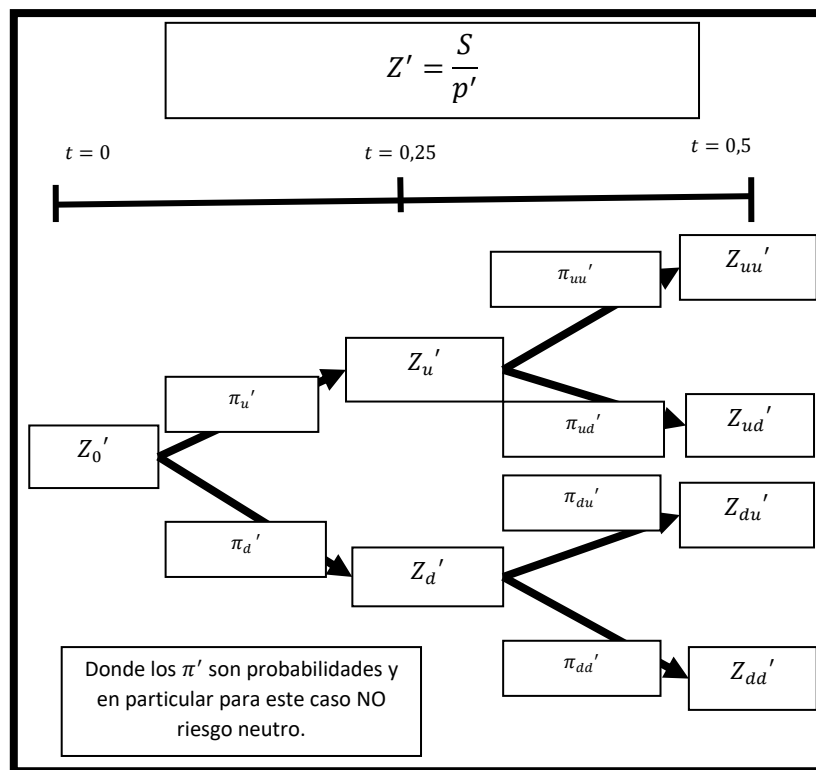
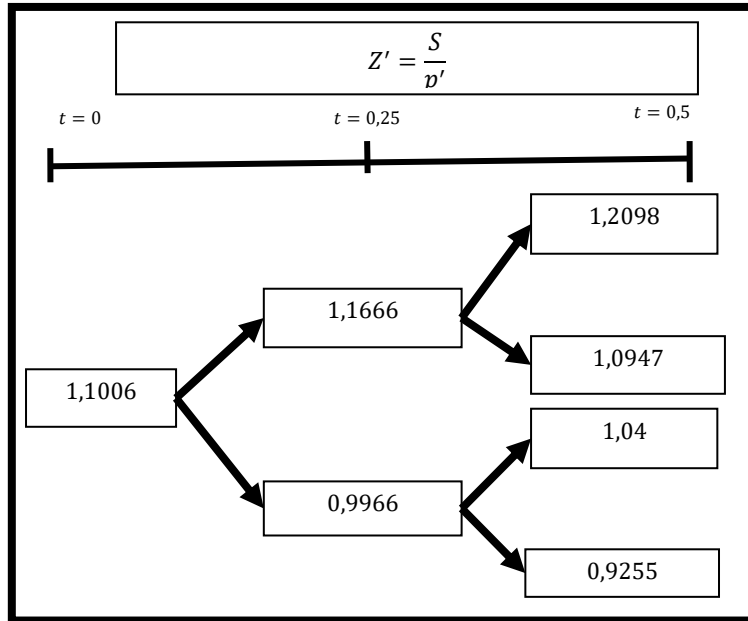
CALCULOS DE LAS PROBABILIDADES π

Para el cálculo de las probabilidades que no son riesgo neutro hay que utilizar una variable Z creada en base al subyacente del derivado y el numerario P' . Esta variable es igual a

$$Z' = \frac{S}{P'}$$

Lo que nos dice Z es cuantos subyacentes obtengo con una unidad de p'

Este mecanismo se realiza para cada nodo del árbol binomial como se muestra a continuación



Para el cálculo de las probabilidades hay que realizar la esperanza de cada nodo y que sea una martingala

Por lo cual

$$Z_u' = (\pi_{uu}' \cdot Z_{uu}' + \pi_{ud}' \cdot Z_{ud}')$$

$$Z_d' = (\pi_{dd}' \cdot Z_{dd}' + \pi_{du}' \cdot Z_{du}')$$

$$Z_0' = (\pi_d' \cdot Z_d' + \pi_u' \cdot Z_u')$$

Donde

$$\pi_d' = 1 - \pi_u'$$

Luego tenemos que π_u' y π_d'

$$1,1006 = ((1 - \pi_u') \cdot 0,9966 + \pi_u' \cdot 1,1666)$$

$$1,1006 = (0,9966 - \pi_u' \cdot 0,9966 + \pi_u' \cdot 1,1666)$$

$$0,104 = \pi_u' \cdot 0,17$$

$$\pi_u' = 0,611764705$$

Luego tenemos que

$$\pi_d' = 0,388235294$$

Calculo de las restantes probabilidades π_{uu}' ; π_{ud}' ; π_{dd}' ; π_{du}'

Tenemos que

$$\pi_{ud}' = 1 - \pi_{uu}'$$

Así también

$$\pi_{du}' = 1 - \pi_{dd}'$$

Por lo cual

$$1,1666 = \pi_{uu}' \cdot 1,2098 + (1 - \pi_{uu}') \cdot 1,0947$$

$$1,1666 = \pi_{uu}' \cdot 1,2098 + 1,0947 - \pi_{uu}' \cdot 1,0947$$

$$0,0719 = 0,1151 \cdot \pi_{uu}'$$

$$\pi_{uu}' = 0,624674196$$

$$\pi_{ud}' = 0,375325803$$

$$0,9966 = (1 - \pi_{dd}') \cdot 1,04 + \pi_{dd}' \cdot 0,9255$$

$$0,9966 = 1,04 - \pi_{dd}' \cdot 1,04 + \pi_{dd}' \cdot 0,9255$$

$$-0,0434 = -\pi_{dd}' \cdot 0,1145$$

$$\pi_{dd}' = 0,379039301$$

$$\pi_{du}' = 0,620960698$$

PROBABILIDADES DE CAMINO

Camino $\overline{Z_0' Z_u'}$

$$\pi'_u = 0,611764705$$

$$\boxed{Pr_{Z_0 Z_u} = 0,611764705}$$

$$\text{Camino } \overline{Z_0' Z_d'}$$

$$\pi'_d = 0,388235294$$

$$\boxed{Pr_{Z_0 Z_d} = 0,388235294}$$

$$\text{Camino } \overline{Z_0' Z_u' Z_{uu}'}$$

$$\pi'_u \cdot \pi'_{uu} = 0,611764705 \cdot 0,624674196 = 0,382153625$$

$$\boxed{Pr_{Z_0 Z_u' Z_{uu}'} = 0,382153625}$$

$$\text{Camino } \overline{Z_0' Z_u' Z_{ud}'}$$

$$\pi'_u \cdot \pi'_{ud} = 0,611764705 \cdot 0,375325803 = 0,229611079$$

$$\boxed{Pr_{Z_0 Z_u' Z_{ud}'} = 0,229611079}$$

$$\text{Camino } \overline{Z_0' Z_d' Z_{du}'}$$

$$\pi'_d \cdot \pi'_{du} = 0,388235294 \cdot 0,620960698 = 0,241078859$$

$$\boxed{Pr_{Z_0 Z_d' Z_{du}'} = 0,241078859}$$

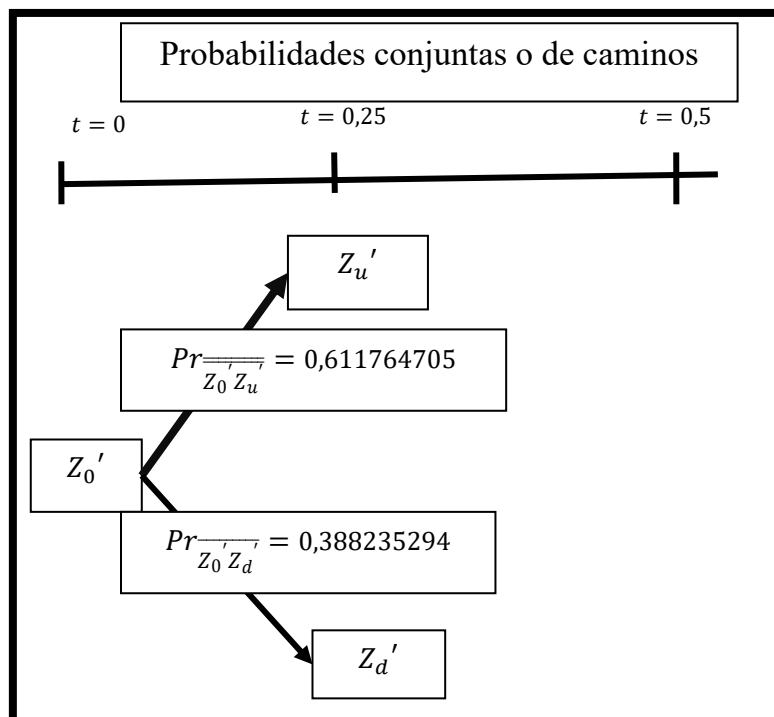
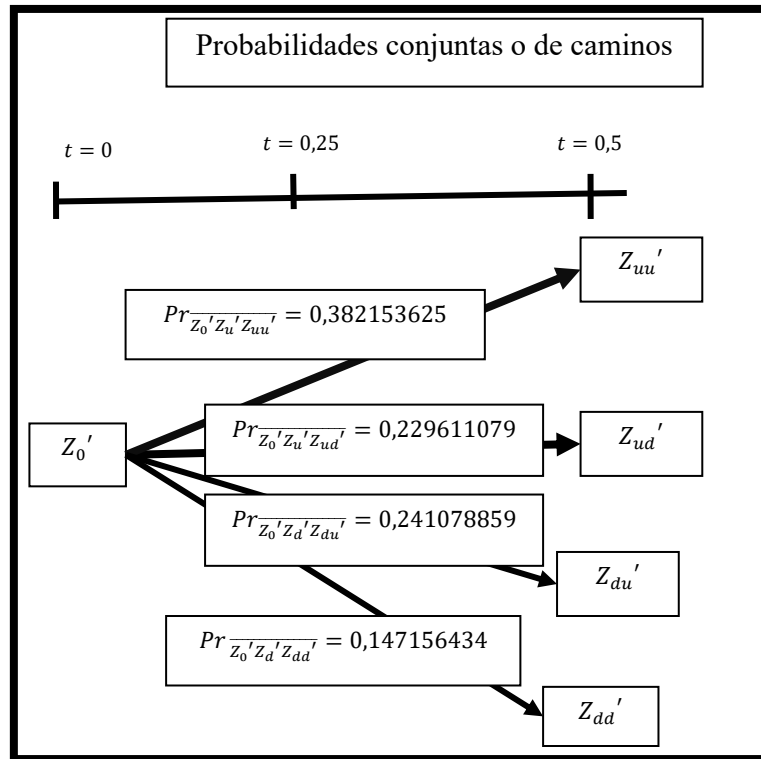
$$\text{Camino } \overline{Z_0' Z_d' Z_{dd}'}$$

$$\pi'_d \cdot \pi'_{dd} = 0,388235294 \cdot 0,379039301 = 0,147156434$$

$$\boxed{Pr_{Z_0 Z_d' Z_{dd}'} = 0,147156434}$$

La suma debe ser igual a 1

$$\begin{aligned} & Pr_{\overline{Z_0 Z_u Z_{uu}}} + Pr_{\overline{Z_0 Z_u Z_{ud}}} + Pr_{\overline{Z_0 Z_d Z_{du}}} + Pr_{\overline{Z_0 Z_d Z_{dd}}} \\ &= 0,382153625 + 0,229611079 + 0,241078859 + 0,147156434 = 1 \\ & Pr_{\overline{Z_0 Z_d}} + Pr_{\overline{Z_0 Z_u}} = 0,611764705 + 0,388235294 = 1 \end{aligned}$$



PROPIEDAD

$$Z_0' = Pr_{Z_0'Z_u'} \cdot Z_u' + Pr_{Z_0'Z_d'} \cdot Z_d'$$

$$Z_0' = 0,611764705 \cdot 1,1666 + 0,388235294 \cdot 0,9966$$

$$Z_0' = 1,1006$$

$$Z_0' = Pr_{Z_0'Z_u'Z_{uu}'} \cdot Z_{uu}' + Pr_{Z_0'Z_u'Z_{ud}'} \cdot Z_{ud}' + Pr_{Z_0'Z_d'Z_{du}'} \cdot Z_{du}' + Pr_{Z_0'Z_d'Z_{dd}'} \cdot Z_{dd}'$$

$$0,382153625 \cdot 1,2098 + 0,229611079 \cdot 1,0947 + 0,241078859 \cdot 1,04 + 0,147156434 \cdot 0,9255$$

$$Z_0' = 1,006$$

VALUACIÓN DE UN CALL EUROPEO

Tenemos el siguiente call europeo

$$K = 100$$

Vencimiento en $t = 0,5$

El activo subyacente es el que estuvimos analizando arriba

Pay- off del call europeo

Hay dos estados de la naturaleza up y down. Para que haya mercados completos tiene que haber tantos activos linealmente independientes como estados de la naturaleza haya, por lo cual, en este caso tiene que haber dos activos linealmente independientes. Estos activos son el subyacente y el numerario p. Con ellos podemos replicar cualquier activo.

Armamos una cartera que replica el movimiento que realiza el pay-off del call

En el momento $t = 0$

$$c_0 = \alpha S_0 + \beta P_0'$$

En el momento $t = 0,25$

$$c_u = \alpha S_u + \beta p_u'$$

$$c_d = \alpha S_d + \beta p_d'$$

En el momento $t = 0,5$

$$c_{uu} = \alpha S_{uu} + \beta p_{uu}'$$

$$c_{ud} = \alpha S_{ud} + \beta p_{ud}'$$

$$c_{du} = \alpha S_{du} + \beta p_{du}'$$

$$c_{dd} = \alpha S_{dd} + \beta p_{dd}'$$

Para resolver el sistema de ecuaciones hay que encontrar el payoff del call europeo

Recordando que

$$\max [S_t - K; 0]$$

Hay dos maneras de calcular los pay-off de cada nodo del call

1. **PROBABILIDADES NO RIESGO NEUTRO π'** . Se utiliza el método de **Radon-Nikodym** que consiste en hacer un ajuste cuando las probabilidades no son riesgo neutro π' . También es el valor actual de la esperanza pero basada en las probabilidades π' y el ajuste Ψ_t

$$\boxed{\text{VALOR DE DERIVADO EN UN NODO} = E_{\pi'}(\Psi_t V_t) \cdot e^{-r \cdot T}}$$

2. **NUMERARIO p' NO LIBRE DE RIESGO**. Se utiliza el método del numerario p' que es un activo no libre de riesgo, también se basa en el proceso de **martingala**. El método consiste en definir una variable $Z_2' = \frac{c}{p'}$ con el numerario p' como se venía realizando. Que consiste en tres pasos
 - a) Elegir p' activo con riesgo y definir la variable $\boxed{Z_2' = \frac{c}{p'}}$
 - b) Calcular π' de tal manera que sea una martingala, es decir, $\boxed{E_{\pi'}(Z_t) = Z_0}$
 - c) $\boxed{c_0 = E_{\pi'}\left(\frac{c_t}{p_t}\right) \cdot p_0}$
3. **NUMERARIO p' NO LIBRE DE RIESGO con RADON NYKODYM**. Se utiliza el método del numerario p' que es un activo no libre de riesgo, también se basa en el proceso de **martingala**. El método consiste en definir una variable $Z_2' = \frac{c}{p'}$ con el numerario p' como se venía realizando. Que consiste en tres pasos
 - a) Elegir p' activo con riesgo y definir la variable $\boxed{Z_2' = \frac{c}{p'}}$
 - b) Calcular π' de tal manera que sea una martingala, es decir, $\boxed{E_{\pi'}(\Psi_t Z_t) = Z_0}$
 - c) $\boxed{c_0 = E_{\pi'}\left(\Psi_t \frac{c_t}{p_t}\right) \cdot p_0}$

MÉTODO DE RADON-NIKODYM

Tenemos que trabajar con probabilidades no riesgo neutro y para ello hay que hacer un ajuste

$$\text{VALOR DE DERIVADO EN UN NODO} =$$

$$= E_{\text{probabilidades con riesgo}}(V_t) \cdot e^{-\mu_v \cdot T} = E_{\pi^{RN}}(V_t) \cdot e^{-r \cdot T} = E_{\pi'}(\Psi_t V_t) \cdot e^{-r \cdot T}$$

Con lo cual con probabilidades no riesgo neutro π' hay que hacer un ajuste, esto está representado por Ψ_t , para igualar el valor del derivado obtenido con las probabilidades riesgo neutro π^{RN}

$$\boxed{E_{\pi^{RN}}(V_t) \cdot e^{-r \cdot T} = E_{\pi'}(\Psi_t V_t) \cdot e^{-r \cdot T}}$$

Donde el subíndice indica la esperanza calculada con las probabilidades π^{RN} o π'

¿Cómo es el cálculo de Ψ_t ?

CALCULO DE c_u

Partimos del modo tradicional obteniendo el valor actual de la esperanza con las probabilidades riesgo neutro

$$c_u = E_{\pi^{RN}}(c_t) \cdot e^{-r \cdot T}$$

Por lo cual

$$c_u = [\pi_{uu}^{RN} \cdot c_{uu} + \pi_{ud}^{RN} \cdot c_{ud}] \cdot e^{-r \cdot T}$$

Si multiplicamos y dividimos por π'_{uu} y π'_{ud} cada término de manera tal de cambiar la medida de probabilidad y conservar el valor de la esperanza

$$c_u = \left[\frac{\pi_{uu}^{RN}}{\pi'_{uu}} \cdot c_{uu} \cdot \pi'_{uu} + \frac{\pi_{ud}^{RN}}{\pi'_{ud}} \cdot c_{ud} \cdot \pi'_{ud} \right] \cdot e^{-r \cdot T}$$

Si llamamos

$$\psi_{uu} = \frac{\pi_{uu}^{RN}}{\pi'_{uu}} \quad y \quad \psi_{ud} = \frac{\pi_{ud}^{RN}}{\pi'_{ud}}$$

Por lo cual

$$c_u = \left[[\psi_{uu} \cdot c_{uu}] \cdot \pi'_{uu} + [\psi_{ud} \cdot c_{ud}] \cdot \pi'_{ud} \right] \cdot e^{-r \cdot T}$$

Que es igual a

$$c_u = E_{\pi'}(\psi_t \cdot c_t) \cdot e^{-r \cdot T}$$

CALCULO DE c_d

Partimos del modo tradicional obteniendo el valor actual de la esperanza con las probabilidades riesgo neutro

$$c_d = E_{\pi^{RN}}(c_t) \cdot e^{-r \cdot T}$$

Por lo cual

$$c_d = [\pi_{dd}^{RN} \cdot c_{dd} + \pi_{du}^{RN} \cdot c_{du}] \cdot e^{-r \cdot T}$$

Si multiplicamos y dividimos por π'_{dd} y π'_{du} cada término de manera tal de cambiar la medida de probabilidad y conservar el valor de la esperanza

$$c_d = \left[\frac{\pi_{dd}^{RN}}{\pi'_{dd}} \cdot c_{dd} \cdot \pi'_{dd} + \frac{\pi_{du}^{RN}}{\pi'_{du}} \cdot c_{du} \cdot \pi'_{du} \right] \cdot e^{-r \cdot T}$$

Si llamamos

$$\psi_{dd} = \frac{\pi_{dd}^{RN}}{\pi'_{dd}} \quad y \quad \psi_{du} = \frac{\pi_{du}^{RN}}{\pi'_{du}}$$

Por lo cual

$$c_d = \left[[\psi_{dd} \cdot c_{dd}] \cdot \pi'_{dd} + [\psi_{du} \cdot c_{du}] \cdot \pi'_{du} \right] \cdot e^{-r \cdot T}$$

Que es igual a

$$c_d = E_{\pi'}(\psi_t \cdot c_t) \cdot e^{-r \cdot T}$$

CALCULO DE c_0

Partimos del modo tradicional obteniendo el valor actual de la esperanza con las probabilidades riesgo neutro

$$c_0 = E_{\pi^{RN}}(c_t) \cdot e^{-r \cdot T}$$

Por lo cual

$$c_0 = [\pi_d^{RN} \cdot c_d + \pi_u^{RN} \cdot c_u] \cdot e^{-r \cdot T}$$

Si multiplicamos y dividimos por π'_d y π'_u cada término de manera tal de cambiar la medida de probabilidad y conservar el valor de la esperanza

$$c_0 = \left[\frac{\pi_d^{RN}}{\pi'_d} \cdot c_d \cdot \pi'_d + \frac{\pi_u^{RN}}{\pi'_u} \cdot c_u \cdot \pi'_u \right] \cdot e^{-r \cdot T}$$

Si llamamos

$$\Psi_d = \frac{\pi_d^{RN}}{\pi'_d} \quad y \quad \Psi_u = \frac{\pi_u^{RN}}{\pi'_u}$$

Por lo cual

$$c_0 = [\Psi_d \cdot c_d] \cdot \pi'_d + [\Psi_u \cdot c_u] \cdot \pi'_u \cdot e^{-r \cdot T}$$

Que es igual a

$$c_0 = E_{\pi'}(\Psi_t \cdot c_t) \cdot e^{-r \cdot T}$$

CALCULO DE $\overline{\Psi_T}$ CON PROBABILIDADES DE CAMINO EN RADON-NIKODYM

PROBABILIDADES DE CAMINO

Camino $\overline{Z_0 Z_u}$

$$\pi_u^{RN}$$

Camino $\overline{Z_0 Z_d}$

$$\pi_d^{RN}$$

Camino $\overline{Z_0 Z_u Z_{uu}}$

$$\pi_u^{RN} \cdot \pi_{uu}^{RN}$$

Camino $\overline{Z_0 Z_u Z_{ud}}$

$$\pi_u^{RN} \cdot \pi_{ud}^{RN}$$

Camino $\overline{Z_0 Z_d Z_{du}}$

$$\pi_d^{RN} \cdot \pi_{du}^{RN}$$

Camino $\overline{Z_0 Z_d Z_{dd}}$

$$\pi_d^{RN} \cdot \pi_{dd}^{RN}$$

PROPIEDAD

$$Z_0 = Pr_{\overline{Z_0 Z_u}} \cdot Z_u + Pr_{\overline{Z_0 Z_d}} \cdot Z_d$$

$$\frac{c_0}{p'_0} = \pi_u^{RN} \cdot \frac{c_u}{p'_u} + \pi_d^{RN} \cdot \frac{c_d}{p'_d}$$

Igual que antes

$$\overline{\Psi}_{0d} = \frac{\pi_d^{RN}}{\pi'_d} \quad y \quad \overline{\Psi}_{0u} = \frac{\pi_u^{RN}}{\pi'_u}$$

$$\frac{c_0}{p'_0} = \left[\left[\overline{\Psi}_{0d} \cdot \frac{c_d}{p'_d} \right] \cdot \pi'_d + \left[\overline{\Psi}_{0u} \cdot \frac{c_u}{p'_u} \right] \cdot \pi'_u \right]$$

$$\mathbf{Z_0} = Pr_{Z_0 Z_u Z_{uu}} \cdot Z_{uu} + Pr_{Z_0 Z_u Z_{ud}} \cdot Z_{ud} + Pr_{Z_0 Z_d Z_{du}} \cdot Z_{du} + Pr_{Z_0 Z_d Z_{dd}} \cdot Z_{dd}$$

$$\frac{c_0}{p'_0} = \pi_u^{RN} \cdot \pi_{uu}^{RN} \cdot \frac{c_{uu}}{p'_{uu}} + \pi_u^{RN} \cdot \pi_{ud}^{RN} \cdot \frac{c_{ud}}{p'_{ud}} + \pi_d^{RN} \cdot \pi_{du}^{RN} \cdot \frac{c_{du}}{p'_{du}} + \pi_d^{RN} \cdot \pi_{dd}^{RN} \cdot \frac{c_{dd}}{p'_{dd}}$$

$$\frac{c_0}{p'_0} = \left[\left[\overline{\Psi}_{0uu} \cdot \frac{c_{uu}}{p'_{uu}} \right] \cdot \pi'_u \cdot \pi'_{uu} + \left[\overline{\Psi}_{0ud} \cdot \frac{c_{ud}}{p'_{ud}} \right] \cdot \pi'_u \cdot \pi'_{ud} + \left[\overline{\Psi}_{0du} \cdot \frac{c_{du}}{p'_{du}} \right] \cdot \pi'_d \cdot \pi'_{du} + \left[\overline{\Psi}_{0dd} \cdot \frac{c_{dd}}{p'_{dd}} \right] \cdot \pi'_d \cdot \pi'_{dd} \right]$$

Donde

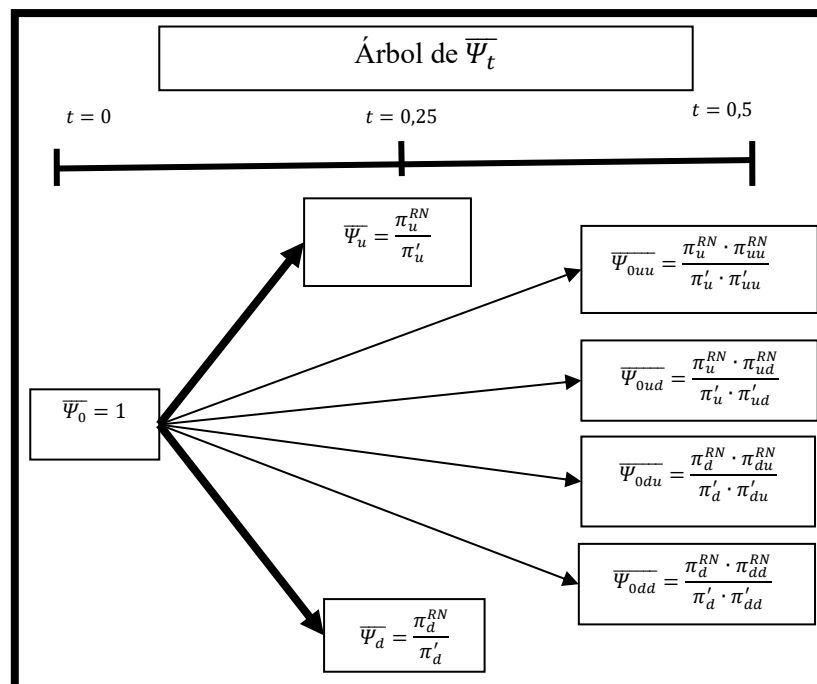
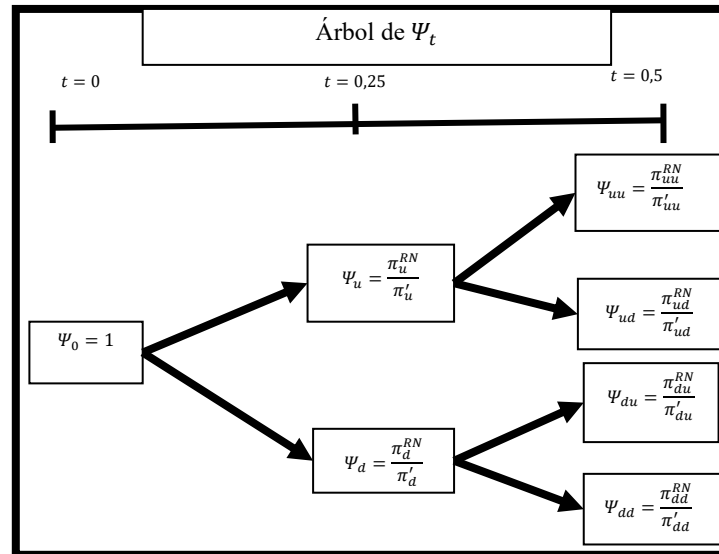
$$\overline{\Psi}_{0uu} = \frac{\pi_u^{RN} \cdot \pi_{uu}^{RN}}{\pi'_u \cdot \pi'_{uu}}$$

$$\overline{\Psi}_{0ud} = \frac{\pi_u^{RN} \cdot \pi_{ud}^{RN}}{\pi'_u \cdot \pi'_{ud}}$$

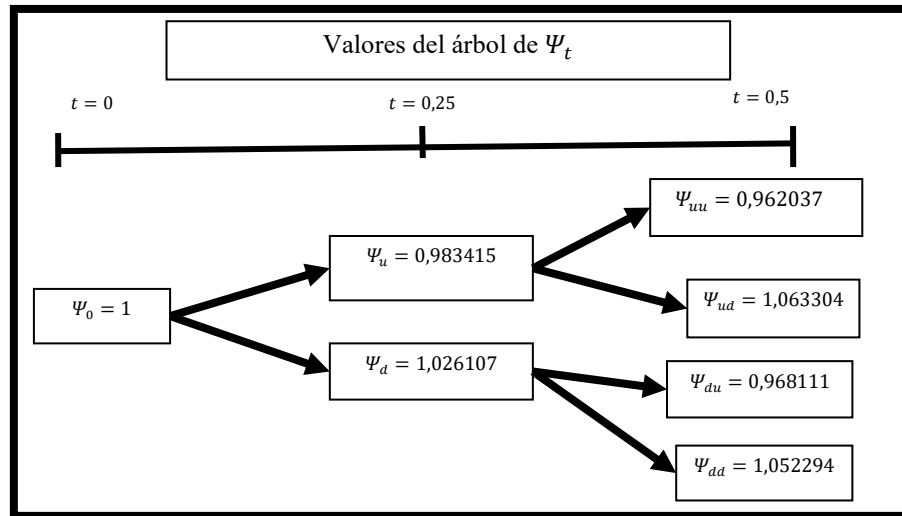
$$\overline{\Psi}_{0du} = \frac{\pi_d^{RN} \cdot \pi_{du}^{RN}}{\pi'_d \cdot \pi'_{du}}$$

$$\overline{\Psi}_{0dd} = \frac{\pi_d^{RN} \cdot \pi_{dd}^{RN}}{\pi'_d \cdot \pi'_{dd}}$$

Con todas estas formulas y con las probabilidades π^{RN} y π' que obtuvimos antes obtenemos los ajustes que nos piden.



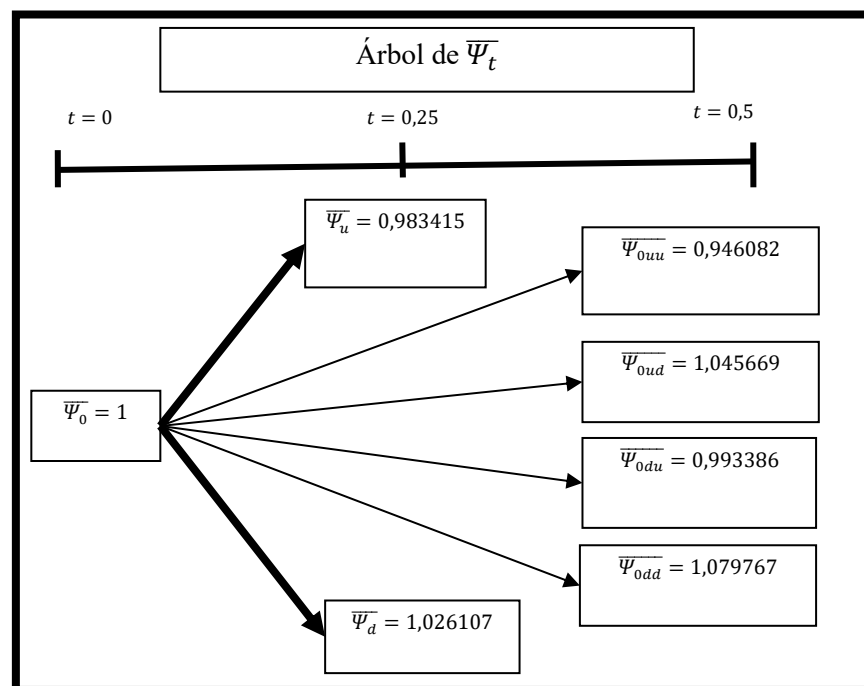
EN VALORES



CALCULO DEL PAY-OFF DEL CALL BASANDOSE EN PROBABILIDADES DE CAMINO EN RADON-NIKODYM

$$VALOR\ DEL\ CALL\ EN\ CADA\ NODO = E_{\pi'}(\Psi_t \cdot c_t) \cdot e^{-r \cdot T}$$

Primero obtenemos el pay-off del último nodo con el pay-off del call $\max(S_t - K; 0)$, de esta manera obtenemos c_{uu}, c_{ud}, c_{du} y c_{dd} y el resto de los nodos los obtenemos con el método de Radon-Nikodym. Las probabilidades π' ya las calculamos más arriba.



En el momento $t = 0,25$

Calculo de c_u

$$c_u = [\pi_{uu}' \cdot c_{uu} \cdot \Psi_{uu} + (1 - \pi_{uu}') \cdot c_{ud} \cdot \Psi_{ud}] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

$$c_u = [0,625117 \cdot 27,0259 \cdot 0,962037 + (0,374883) \cdot 4 \cdot 1,063304] \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25}$$

$$c_u = 17,4067$$

Calculo de c_d

$$c_d = [\pi_{dd}' \cdot c_{dd} \cdot \Psi_{dd} + (1 - \pi_{dd}') \cdot c_{du} \cdot \Psi_{du}] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

$$c_d = [(0,378805) \cdot 0 \cdot 1,052294 + 0,621195 \cdot 4 \cdot 0,968111] \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25}$$

$$c_d = 2,3461$$

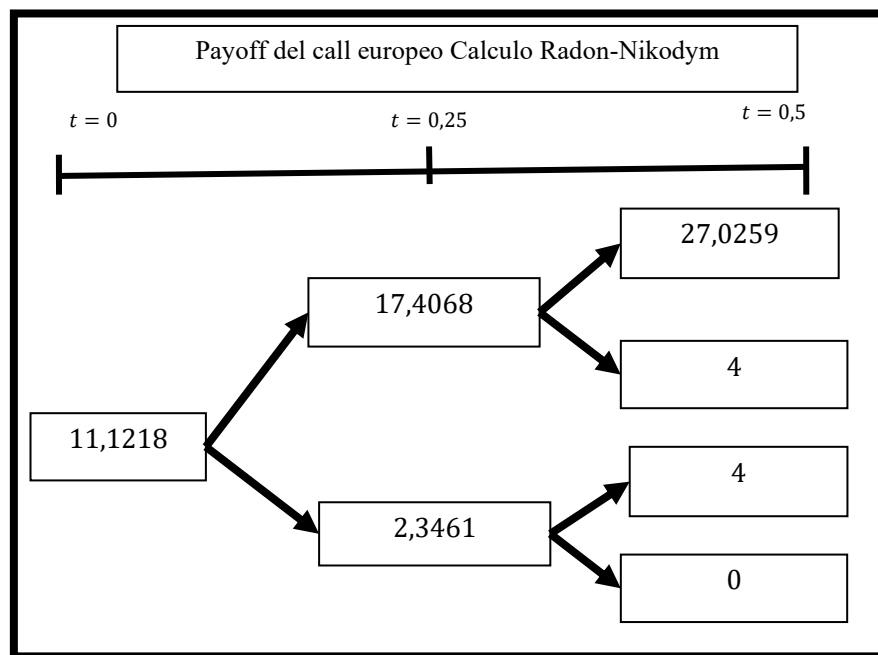
En el momento $t = 0$

Calculo de c_0

$$c_0 = [\pi_u' \cdot c_u \cdot \Psi_u + \pi_d' \cdot c_d \cdot \Psi_d] \cdot e^{-r \cdot \Delta t}$$

$$c_0 = [(0,611528) \cdot 17,4067 \cdot 0,983415 + (0,388472) \cdot 2,3461 \cdot 1,026107] \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25}$$

$$c_0 = 11,1218$$

**MÉTODO BASADO EN EL NUMERARIO P' Y EN EL PROCESO DE MARTINGALA**

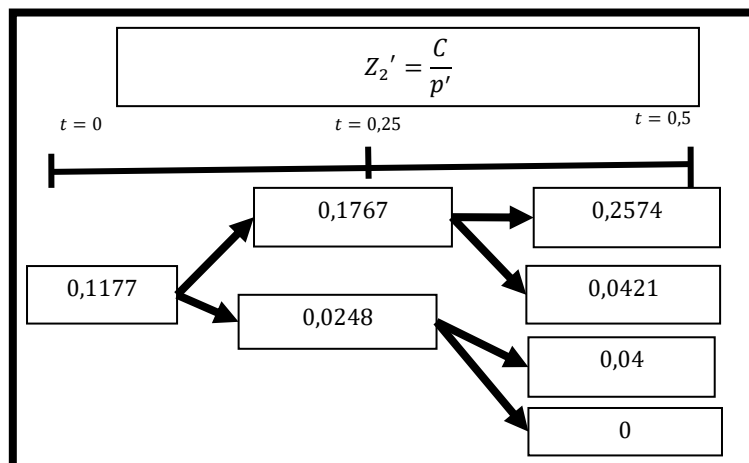
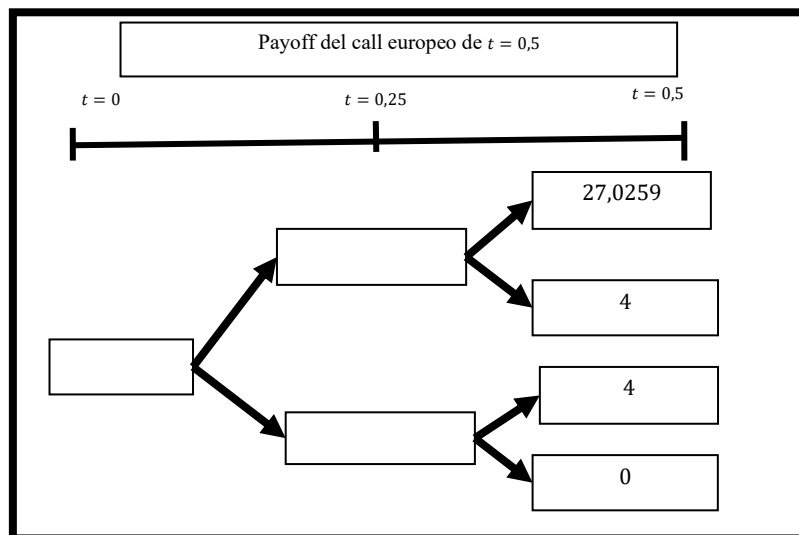
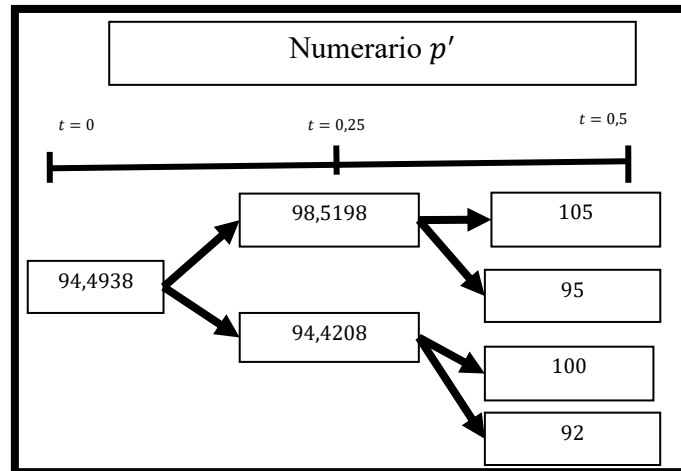
Para encontrar el valor de cada nodo hay que realizar el mismo procedimiento que hicimos con el subyacente, es decir, que hay que definir una variable $Z_2' = \frac{c}{P'}$ con el numerario p' .

Donde el proceso de martingala implica el siguiente concepto

$$E_{p'}^n(Z_t) = Z_0$$

Lo cual implica que el valor de cada nodo ya no es el valor actual de la esperanza, sino únicamente la esperanza. Con este propósito utilizamos la variable Z_2' , por lo cual, se hacen más sencillas las cuentas.

Primero obtenemos el pay-off del último nodo con el payoff del call max $(S_t - K; 0)$ y el resto de los nodos los obtenemos por el método. Con esto obtenemos c_{uu} , c_{ud} , c_{dd} , c_{du} . Las probabilidades ya las calculamos más arriba.



En el momento $t = 0,25$ calculamos c_u y c_d

De esta manera obtenemos la martingala

$$\frac{c_u}{P_u'} = \left[\pi_{uu}' \frac{c_{uu}}{P_{uu}'} + (1 - \pi_{uu}') \frac{c_{ud}}{P_{ud}'} \right]$$

$$\frac{c_u}{P_u'} = [0,625117 \cdot 0,2574 + (0,374883) \cdot 0,0421]$$

$$\frac{c_u}{P_u'} = 0,1767$$

De esta manera obtenemos la martingala

$$\frac{c_d}{P_d'} = \left[\pi_{dd}' \frac{c_{dd}}{P_{dd}'} + (1 - \pi_{du}') \frac{c_{ud}}{P_{du}'} \right]$$

$$\frac{c_d}{P_d'} = [0,621195 \cdot 0,04 + (0,378805) \cdot 0]$$

$$\frac{c_d}{P_d'} = 0,0248$$

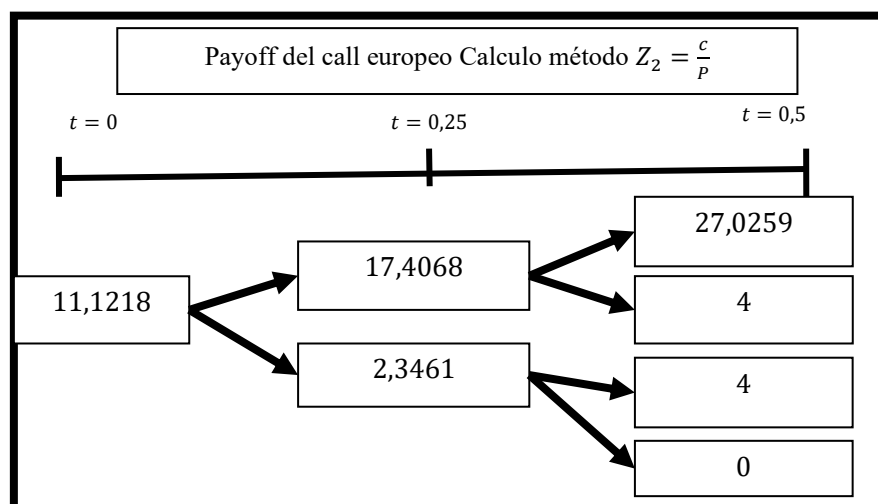
En el momento $t = 0$ calculamos c_0

$$\frac{c_0}{P_0'} = \left[\pi_u' \frac{c_u}{P_u'} + (1 - \pi_u') \frac{c_d}{P_d'} \right]$$

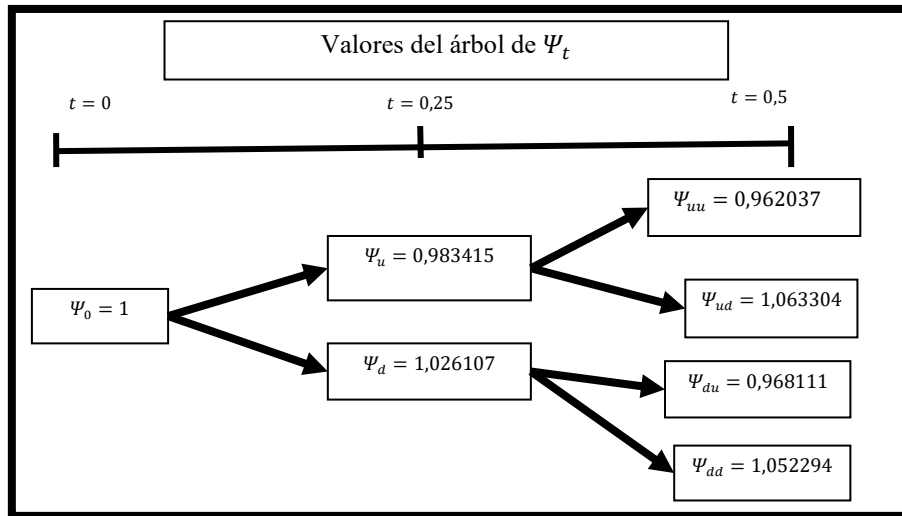
$$\frac{c_0}{P_0'} = [(0,611528) \cdot 0,1767 + (0,388472) \cdot 0,0248]$$

$$\frac{c_0}{P_0'} = 0,1177$$

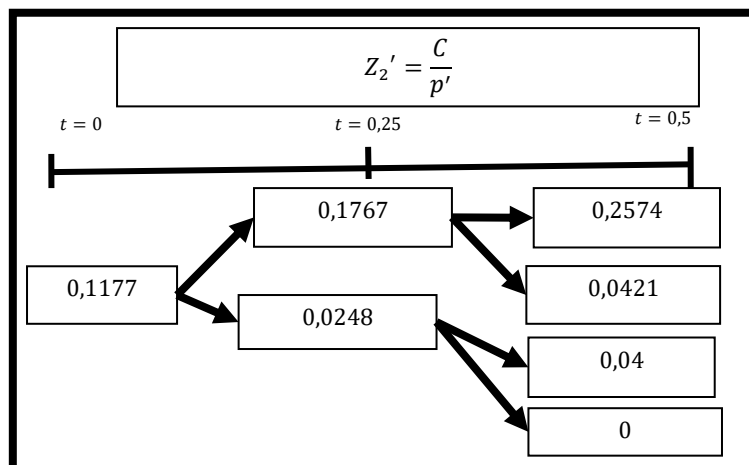
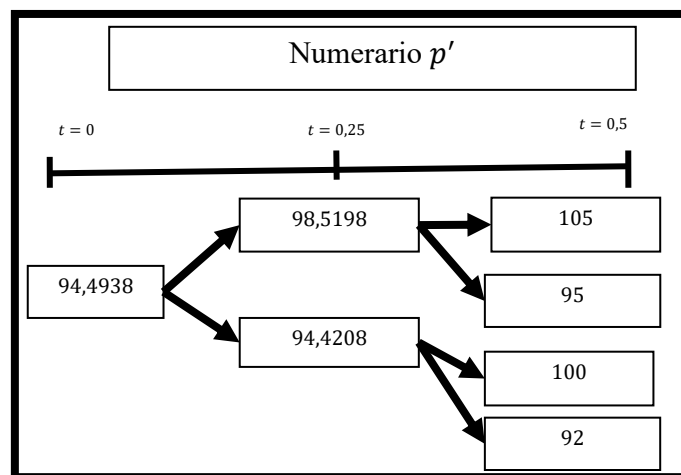
Si multiplicamos cada nodo por p' obtenemos los pay-off del call.



**MÉTODO BASADO EN EL NUMERARIO p' NO LIBRE DE RIESGO con RADON
NYKODYM**



Primero obtenemos el pay-off del último nodo con el payoff del call max $(S_t - K; 0)$ y el resto de los nodos los obtenemos por el método. Con esto obtenemos c_{uu} , c_{ud} , c_{dd} , c_{du} . Las probabilidades ya las calculamos más arriba.



En el momento $t = 0,25$ calculamos c_u y c_d

De esta manera obtenemos la martingala

$$\frac{c_u}{P_u'} = \left[\pi_{uu}' \cdot \Psi_{uu} \frac{c_{uu}}{P_{uu}'} + (1 - \pi_{uu}') \cdot \Psi_{ud} \frac{c_{ud}}{P_{ud}'} \right]$$

$$\frac{c_u}{P_u'} = [0,625117 \cdot 0,962037 \cdot 0,2574 + (0,374883) \cdot 1,063304 \cdot 0,0421]$$

$$\frac{c_u}{P_u'} = 0,1767$$

De esta manera obtenemos la martingala

$$\frac{c_d}{P_d'} = \left[\pi_{dd}' \Psi_{dd} \frac{c_{dd}}{P_{dd}'} + (1 - \pi_{du}') \cdot \Psi_{du} \cdot \frac{c_{ud}}{P_{du}'} \right]$$

$$\frac{c_d}{P_d'} = [0,621195 \cdot 1,052294 \cdot 0,04 + (0,378805) \cdot 0,968111 \cdot 0]$$

$$\frac{c_d}{P_d'} = 0,0248$$

En el momento $t = 0$ calculamos c_0

$$\frac{c_0}{P_0'} = \left[\pi_u' \cdot \Psi_u \cdot \frac{c_u}{P_u'} + (1 - \pi_u') \cdot \Psi_d \cdot \frac{c_d}{P_d'} \right]$$

$$\frac{c_0}{P_0'} = [(0,611528) \cdot 0,983415 \cdot 0,1767 + (0,388472) \cdot 1,026107 \cdot 0,0248]$$

$$\frac{c_0}{P_0'} = 0,1177$$

Si multiplicamos cada nodo por p' obtenemos los pay-off del call.

ESTRATEGIA DE REPLICA DEL CALL

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

Estrategia		
Cartera		Pay-off del call
$S_u = 114,9378$	$P_u' = 98,4938$	$c_u = 17,4068$
$S_d = 94,1031$	$P_d' = 94,4208$	$c_d = 2,3461$

Escenario Up

$$c_u = \alpha S_u + \beta p_u'$$

Escenario Down

$$c_d = \alpha S_d + \beta p_d'$$

Lo que falta es determinar la cantidad de α y β que son las cantidades que se debe tener de cada activo en la cartera para replicar el comportamiento del derivado. Para que no haya oportunidades de arbitraje se debe

cumplir que las igualdades se mantengan o de lo contrario la cartera o el derivado podrían estar subvaluado o sobrevaluado y por lo tanto se podría obtener una ganancia libre de riesgo sin colocar capital. Esto para cada nodo

Tenemos la siguiente tabla

Estrategia				
Cartera			Pay-off del call	
Subyacente	α	p'	β	Call
$S_u = 114,9378$	0,8931	$P_u' = 98,5198$	-0,8652	$c_u = 17,4068$
$S_d = 94,1031$		$P_d' = 94,4208$		$c_d = 2,3461$

Para encontrar los valores debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} S_u & p_u' \\ S_d & p_d' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_u \\ c_d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 114,9378 & 98,5198 \\ 94,1031 & 94,4208 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,4068 \\ 2,3461 \end{bmatrix}$$

Se resuelve por Cramer

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} S_u & p_u' \\ S_d & p_d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 114,9378 & 98,5198 \\ 94,1031 & 94,4208 \end{vmatrix}$$

$$= (114,9378 \cdot 94,4208) - (94,1031 \cdot 98,5198) = 1581,500435$$

El cual es distinto de cero por lo cual

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} S_u & c_u \\ S_d & c_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & p_u' \\ S_d & p_d' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 114,9378 & 17,4068 \\ 94,1031 & 2,3461 \end{vmatrix}}{1581,500435} = \frac{-1368,3783}{1581,500435} = -0,8652$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} c_u & p_u' \\ c_d & p_d' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & p_u' \\ S_d & p_d' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 17,4068 & 98,5198 \\ 2,3461 & 94,4208 \end{vmatrix}}{1581,500435} = \frac{1412,426679}{1581,500435} = 0,8931$$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

Escenario Up

$$c_{uu} = \alpha S_{uu} + \beta p_{uu}'$$

$$c_{ud} = \alpha S_{ud} + \beta p_{ud}'$$

Estrategia		
Cartera		Pay-off del call
$S_{uu} = 127,0259$	$P_{uu}' = 105$	$c_{uu} = 27,0259$
$S_{ud} = 104$	$P_{ud}' = 95$	$c_{ud} = 4$
Estrategia		
Cartera		Pay-off del call
$S_{du} = 104$	$P_{du}' = 100$	$c_{du} = 4$
$S_{dd} = 85,1480$	$P_{dd}' = 92$	$c_{dd} = 0$

Para encontrar los valores debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} S_{uu} & p_{uu}' \\ S_{ud} & p_{ud}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{uu} \\ c_{ud} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 127,0259 & 105 \\ 104 & 95 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27,0259 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se resuelve por Cramer

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} S_{uu} & p_{uu}' \\ S_{ud} & p_{ud}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 127,0259 & 105 \\ 104 & 95 \end{vmatrix}$$

$$= (127,0259 \cdot 95) - (104 \cdot 105) = 1147,4605$$

El cual es distinto de cero por lo cual

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} S_{uu} & c_{uu} \\ S_{ud} & c_{ud} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{uu} & p_{uu}' \\ S_{ud} & p_{ud}' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 127,0259 & 27,0259 \\ 104 & 4 \end{vmatrix}}{1147,4605} = \frac{-2302,59}{1147,4605} = -2,0067$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} c_{uu} & p_{uu}' \\ c_{ud} & p_{ud}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{uu} & p_{uu}' \\ S_{ud} & p_{ud}' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 27,0259 & 105 \\ 4 & 95 \end{vmatrix}}{1147,4605} = \frac{2147,4605}{1147,4605} = 1,8715$$

Escenario down

$$c_{du} = \alpha S_{du} + \beta p_{du}'$$

$$c_{dd} = \alpha S_{dd} + \beta p_{dd}'$$

Para encontrar los valores debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} S_{du} & p_{du}' \\ S_{dd} & p_{dd}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{du} \\ c_{dd} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 104 & 100 \\ 85,1480 & 92 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se resuelve por Cramer

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} S_{du} & p_{du}' \\ S_{dd} & p_{dd}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 104 & 100 \\ 85,1480 & 92 \end{vmatrix}$$

$$= (104 \cdot 92) - (85,1480 \cdot 100) = 1053,2$$

El cual es distinto de cero por lo cual

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} S_{du} & c_{du} \\ S_{dd} & c_{dd} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{du} & p_{du}' \\ S_{dd} & p_{dd}' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 104 & 4 \\ 85,1480 & 0 \end{vmatrix}}{1053,2} = \frac{-340,592}{1053,2} = -0,3234$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} c_{du} & p_{du}' \\ c_{dd} & p_{dd}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{du} & p_{du}' \\ S_{dd} & p_{dd}' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 100 \\ 0 & 92 \end{vmatrix}}{1053,2} = \frac{368}{1053,2} = 0,3494$$

Estrategia				
Cartera				Pay-off del call
Subyacente	α	P'	β	Call
$S_{uu} = 127,0259$	1,8715	$P_{uu}' = 105$	-2,0067	$c_{uu} = 27,0259$
$S_{ud} = 104$		$P_{ud}' = 95$		$c_{ud} = 4$
Cartera				Pay-off del call
Subyacente	α	P	β	Call
$S_{du} = 104$	0,3494	$P_{du}' = 100$	-0,3234	$c_{du} = 4$
$S_{dd} = 85,1480$		$P_{dd}' = 92$		$c_{dd} = 0$

ESTRATEGIA DE REPLICA DINAMICA DE p'

EN EL MOMENTO $t = 0,25$

Estrategia		
Cartera		p'
$S_u = 114,9378$	$P_u = 97,5310$	$p'_u = 98,5198$
$S_d = 94,1031$	$P_d = 97,5310$	$p'_d = 94,4208$

Escenario Up

$$p'_u = \alpha S_u + \beta p_u$$

Escenario Down

$$p'_d = \alpha S_d + \beta p_d$$

Lo que falta es determinar la cantidad de α y β que son las cantidades que se debe tener de cada activo en la cartera para replicar el comportamiento del activo. Para que no haya oportunidades de arbitraje se debe cumplir que las igualdades se mantengan o de lo contrario la cartera o el activo podrían estar subvaluado o sobrevaluado y por lo tanto se podría obtener una ganancia libre de riesgo sin colocar capital. Esto para cada nodo

Para encontrar los valores debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} S_u & p_u \\ S_d & p_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_u \\ p'_d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 114,9378 & 97,5310 \\ 94,1031 & 97,5310 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98,5198 \\ 94,4208 \end{bmatrix}$$

Se resuelve por Cramer

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} S_u & p_u \\ S_d & p_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 114,9378 & 97,5310 \\ 94,1031 & 97,5310 \end{vmatrix}$$

$$= (114,9378 \cdot 97,5310) - (94,1031 \cdot 97,5310) = 2032,0291$$

El cual es distinto de cero por lo cual

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} S_u & p'_u \\ S_d & p'_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & p_u \\ S_d & p_d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 114,9378 & 98,5198 \\ 94,1031 & 94,4208 \end{vmatrix}}{2032,0291} = \frac{1581,500435}{2032,0291} = 0,778286312$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} p'_u & p_u \\ p'_d & p_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & p_u \\ S_d & p_d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 98,5198 & 97,5310 \\ 94,4208 & 97,5310 \end{vmatrix}}{2032,0291} = \frac{399,779569}{2032,0291} = 0,196739096$$

Estrategia				
Cartera				
Subyacente	α	P	β	p'
$S_u = 114,9378$	0,1964	$P_u = 97,5310$	0,7783	$p'_u = 98,5198$
$S_d = 94,1031$		$P_d = 97,5310$		$p'_d = 94,4208$

EN EL MOMENTO $t = 0,5$

Escenario Up

$$p'_{uu} = \alpha S_{uu} + \beta p_{uu}$$

$$p'_{ud} = \alpha S_{ud} + \beta p_{ud}$$

Estrategia		
Cartera		p'
$S_{uu} = 127,0259$	$P_{uu} = 100$	$p'_{uu} = 105$
$S_{ud} = 104$	$P_{ud} = 100$	$p'_{ud} = 95$
Estrategia		
Cartera		p'
$S_{du} = 104$	$P_{du} = 100$	$p'_{uu} = 100$
$S_{dd} = 85,1480$	$P_{dd} = 100$	$p'_{uu} = 92$

Para encontrar los valores debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} S_{uu} & p_{uu} \\ S_{ud} & p_{ud} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_{uu} \\ p'_{ud} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 127,0259 & \mathbf{100} \\ 104 & \mathbf{100} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{105} \\ \mathbf{95} \end{bmatrix}$$

Se resuelve por Cramer

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} S_{uu} & p_{uu} \\ S_{ud} & p_{ud} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 127,0259 & \mathbf{100} \\ 104 & \mathbf{100} \end{vmatrix}$$

$$= (127,0259 \cdot \mathbf{100}) - (\mathbf{104} \cdot \mathbf{100}) = 2302,59$$

El cual es distinto de cero por lo cual

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} S_{uu} & p'_{uu} \\ S_{ud} & p'_{ud} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{uu} & p_{uu} \\ S_{ud} & p_{ud} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 127,0259 & \mathbf{105} \\ 104 & \mathbf{95} \end{vmatrix}}{2302,59} = \frac{1147,4605}{2302,59} = 0,498334701$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} p'_{uu} & p_{uu} \\ p'_{ud} & p_{ud} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{uu} & p_{uu} \\ S_{ud} & p_{ud} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{105} & \mathbf{100} \\ \mathbf{95} & \mathbf{100} \end{vmatrix}}{2302,59} = \frac{1000}{2302,59} = 0,434293556$$

Escenario down

$$p'_{du} = \alpha S_{du} + \beta p_{du}$$

$$p'_{dd} = \alpha S_{dd} + \beta p_{dd}$$

Para encontrar los valores debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} S_{du} & p_{du} \\ S_{dd} & p_{dd} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_{du} \\ p'_{dd} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 104 & \mathbf{100} \\ 85,1480 & \mathbf{100} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{100} \\ \mathbf{92} \end{bmatrix}$$

Se resuelve por Cramer

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} S_{du} & p_{du} \\ S_{dd} & p_{dd} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 104 & \mathbf{100} \\ 85,1480 & \mathbf{100} \end{vmatrix}$$

$$= (104 \cdot \mathbf{100}) - (85,1480 \cdot \mathbf{100}) = 1885,2$$

El cual es distinto de cero por lo cual

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} S_{du} & p'_{du} \\ S_{dd} & p'_{dd} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{du} & p_{du} \\ S_{dd} & p_{dd} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 104 & \mathbf{100} \\ 85,1480 & \mathbf{92} \end{vmatrix}}{1885,2} = \frac{1053,2}{1885,2} = 0,558667515$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} p'_{du} & p_{du} \\ p'_{dd} & p_{dd} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{ud} & p_{du} \\ S_{dd} & p_{dd} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 100 \\ 92 & 100 \end{vmatrix}}{1885,2} = \frac{800}{1885,2} = 0,424358158$$

Estrategia				
Cartera				
Subyacente	α	P	β	p'
$S_{uu} = 127,0259$	0,4343	$P_{uu} = 100$	0,4983	$p'_{uu} = 105$
$S_{ud} = 104$		$P_{ud} = 100$		$p'_{ud} = 95$
Cartera				
Subyacente	α	P	β	p'
$S_{du} = 104$	0,4243	$P_{du} = 100$	0,5587	$p'_{du} = 100$
$S_{dd} = 85,1480$		$P_{dd} = 100$		$p'_{dd} = 92$

ILUSTRACIÓN DEL TEOREMA DE GIRSANOV

EJERCICIO EN TIEMPO CONTINUO

DATOS

SECURITY

$$S_0 = 100\$ \quad \mu_s = 10\% \quad \sigma_s = 20\%$$

NUMERARIO P

$$p_0 = 90,111 \quad \mu_p = 12\% \quad \sigma_p = 16\%$$

NUMERARIO P'

$$p'_0 = 80,808 \quad \mu_{p'} = 13\% \quad \sigma_{p'} = 18\%$$

PROBABILIDADES REALES

$$p = \frac{1}{2} \text{ y } (1-p) = \frac{1}{2}$$

FORMULAS A UTILIZAR

$$R_d = \mu \cdot \Delta t - \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{p}{1-p}}$$

$$R_u = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{p}{1-p}}$$

Donde

$$\sqrt{\frac{p}{1-p}} = \sqrt{\frac{0,5}{1-0,5}} = 1$$

Siempre por que las probabilidades reales son iguales a 0,5

$$R = \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} - 1$$

$$E(R) = R_u \cdot p + R_d \cdot (1-p) = \mu \cdot \Delta t$$

$$\sigma^2(R) = (R_u - R_d)^2 \cdot p \cdot (1-p) = \sigma^2 \cdot \Delta t$$

RESOLUCIÓN

Con $\Delta t = 0,25$

Calculo del payoff del security

$$S_0 \cdot (1 + R_u) = S_u$$

$$S_0 \cdot (1 + R_d) = S_d$$

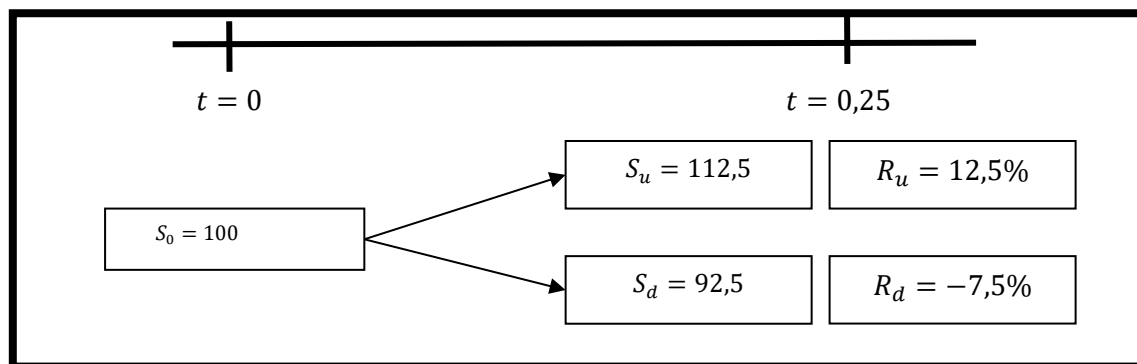
$$R_u = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{p}{1-p}} = 0,1 \cdot 0,25 + 0,2 \cdot \sqrt{0,25} = 0,125$$

$$R_d = \mu \cdot \Delta t - \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{p}{1-p}} = 0,1 \cdot 0,25 - 0,2 \cdot \sqrt{0,25} = -0,075$$

Por lo cual

$$S_u = 100 \cdot 1,125 = 112,5$$

$$S_d = 100 \cdot 0,925 = 92,5$$



En la tabla esta expresado de la siguiente manera y puede generar confusión

$$E(R) = \frac{R_u \cdot p + R_d \cdot (1-p)}{\Delta t} = \mu$$

$$\sigma^2(R) = \frac{(R_u - R_d)^2 \cdot p \cdot (1-p)}{\Delta t} = \sigma^2$$

Si hacemos las cuentas

$$E(R) = \frac{0,125 \cdot 0,5 - 0,075 \cdot 0,5}{0,25} = 0,1 = \mu$$

$$\sigma^2(R) = \frac{(0,125 + 0,075)^2 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{0,25} = 0,04 = \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{0,04} = 0,02$$

CAMBIANDO LAS MEDIDAS DE PROBABILIDAD

Obtenemos el numerario p

Calculo del payoff del security

$$P_0 \cdot (1 + R_u^p) = P_u$$

$$P_0 \cdot (1 + R_d^p) = P_d$$

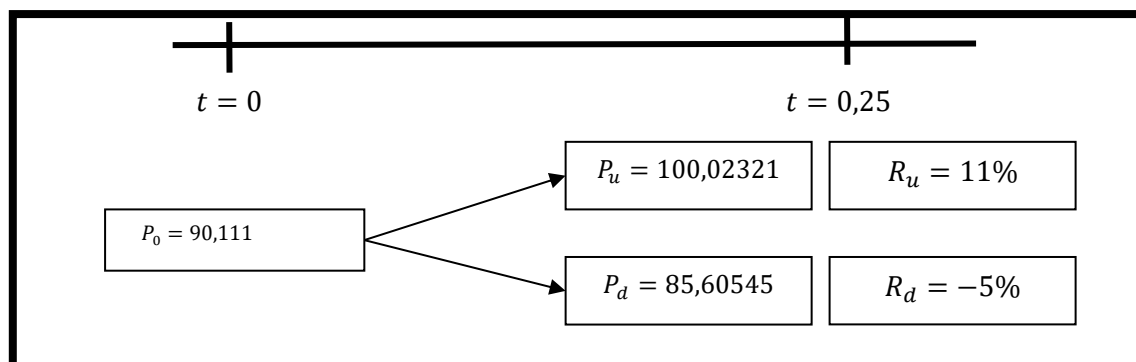
$$R_u^p = \mu_p \cdot \Delta t + \sigma_p \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{p}{1-p}} = 0,12 \cdot 0,25 + 0,16 \cdot \sqrt{0,25} = 0,11$$

$$R_d^p = \mu_p \cdot \Delta t - \sigma_p \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{p}{1-p}} = 0,12 \cdot 0,25 - 0,16 \cdot \sqrt{0,25} = -0,05$$

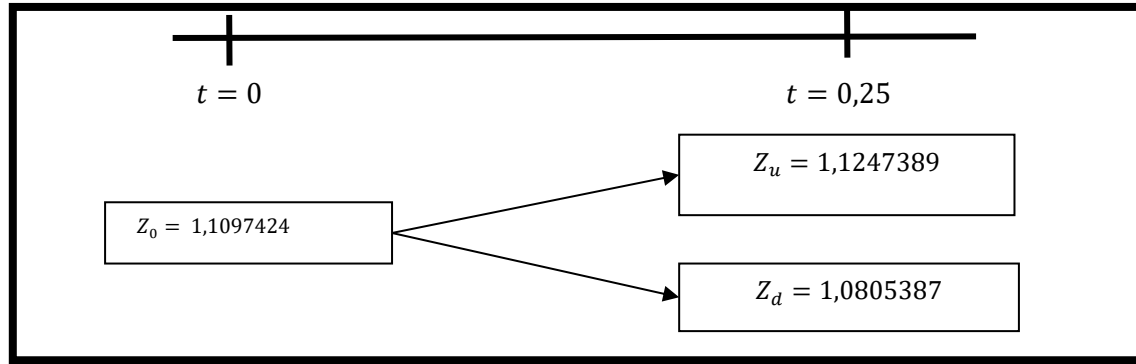
Por lo cual

$$P_u = 90,111 \cdot 1,11 = 100,02321$$

$$P_d = 90,111 \cdot 0,95 = 85,60545$$



Encontramos el payoff normalizado o la variable $Z = \frac{S}{P}$



Todo esto lo hicimos para llegar a una martingala y de esta manera sea más fácil la manera de encontrar las probabilidades o nuevas medidas de probabilidades

$$Z_0 = \pi_u \cdot Z_u + (1 - \pi_u) \cdot Z_d$$

$$Z_0 = \pi_u \cdot Z_u + Z_d - \pi_u \cdot Z_d$$

$$Z_0 - Z_d = \pi_u \cdot (Z_u - Z_d)$$

$$\pi_u = \frac{Z_0 - Z_d}{(Z_u - Z_d)}$$

$$\pi_u = \frac{1,1097424 - 1,0805387}{(1,1247389 - 1,0805387)} = 0,6607143$$

$$\pi_u = 0,6607143 \text{ y } \pi_d = 0,3392857$$

Con estas probabilidades calculamos los retornos esperados y volatilidades esperadas del Security

En la tabla esta expresado de la siguiente manera y puede generar confusión

$$E(R) = \frac{R_u \cdot p + R_d \cdot (1 - p)}{\Delta t} = \mu$$

$$\sigma^2(R) = \frac{(R_u - R_d)^2 \cdot p \cdot (1 - p)}{\Delta t} = \sigma^2$$

Si hacemos las cuentas con las nuevas probabilidades

$$E(R) = \frac{0,125 \cdot 0,6607143 - 0,075 \cdot 0,3392857}{0,25} = 0,22857144 = \mu$$

$$\sigma^2(R) = \frac{(0,125 + 0,075)^2 \cdot 0,6607143 \cdot 0,3392857}{0,25} = 0,035867346$$

$$\sigma^2 = 0,035867346$$

$$\sigma = \sqrt{0,035867346} = 0,189386763$$

μ	σ
22,857144%	18,9386763%

CAMBIANDO LAS MEDIDAS DE PROBABILIDAD

Obtenemos el numerario p'

Calculo del payoff del security

$$P_0' \cdot (1 + R_u^{p'}) = P_u'$$

$$P_0' \cdot (1 + R_d^{p'}) = P_d'$$

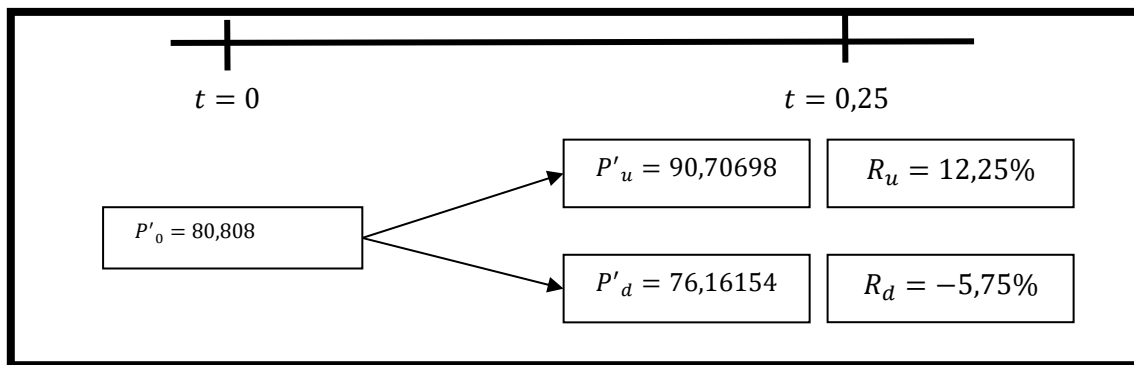
$$R_u^{p'} = \mu_{p'} \cdot \Delta t + \sigma_{p'} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{p}{1-p}} = 0,13 \cdot 0,25 + 0,18 \cdot \sqrt{0,25} = 0,1225$$

$$R_d^{p'} = \mu_{p'} \cdot \Delta t - \sigma_{p'} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{p}{1-p}} = 0,13 \cdot 0,25 - 0,18 \cdot \sqrt{0,25} = -0,0575$$

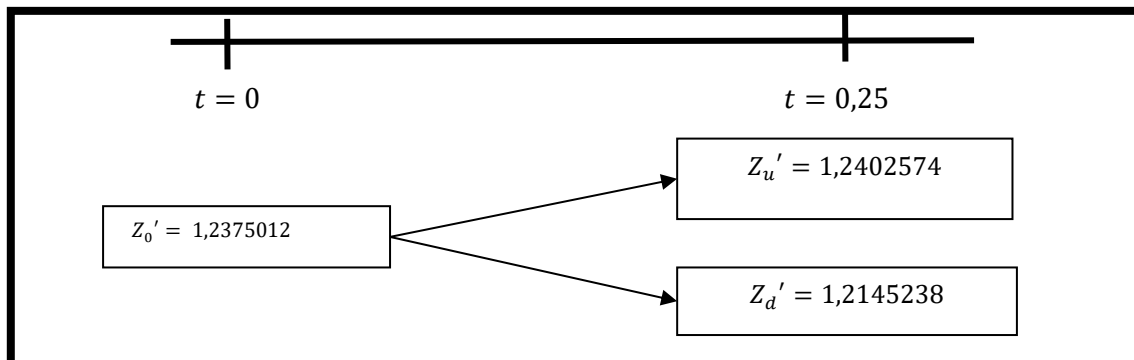
Por lo cual

$$P_u' = 80,808 \cdot 1,1225 = 90,70698$$

$$P_d' = 80,808 \cdot 0,9425 = 76,16154$$



Encontramos el payoff normalizado o la variable $Z' = \frac{S}{P'}$



Todo esto lo hicimos para llegar a una martingala y de esta manera sea más fácil la manera de encontrar las probabilidades o nuevas medidas de probabilidades

$$Z_0' = \pi_u' \cdot Z_u' + (1 - \pi_u') \cdot Z_d'$$

$$Z_0' = \pi_u' \cdot Z_u' + Z_d - \pi_u' \cdot Z_d'$$

$$Z_0' - Z_d' = \pi_u' \cdot (Z_u' - Z_d')$$

$$\pi_u' = \frac{Z_0' - Z_d'}{(Z_u' - Z_d')}$$

$$\pi_u' = \frac{1,2375012 - 1,2145238}{(1,2402574 - 1,2145238)} = 0,8928977$$

$$\pi_u' = 0,8928977 \text{ y } \pi_d' = 0,1071023$$

Con estas probabilidades calculamos los retornos esperados y volatilidades esperadas del Security

En la tabla esta expresado de la siguiente manera y puede generar confusión

$$E(R) = \frac{R_u \cdot p + R_d \cdot (1 - p)}{\Delta t} = \mu$$

$$\sigma^2(R) = \frac{(R_u - R_d)^2 \cdot p \cdot (1 - p)}{\Delta t} = \sigma^2$$

Si hacemos las cuentas con las nuevas probabilidades

$$E(R) = \frac{0,125 \cdot 0,8928977 - 0,075 \cdot 0,1071023}{0,25} = 0,41431816 = \mu$$

$$\sigma^2(R) = \frac{(0,125 + 0,075)^2 \cdot 0,8928977 \cdot 0,1071023}{0,25} = 0,0153001023$$

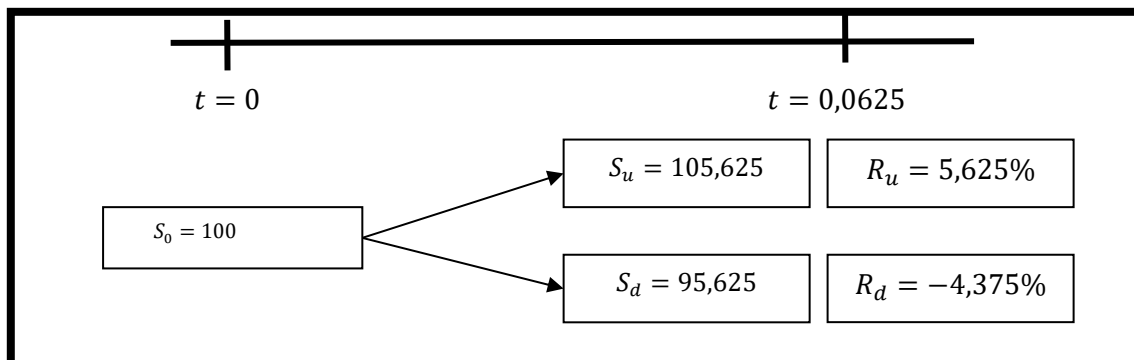
$$\sigma^2 = 0,0153001023$$

$$\sigma = \sqrt{0,0153001023} = 0,123697306$$

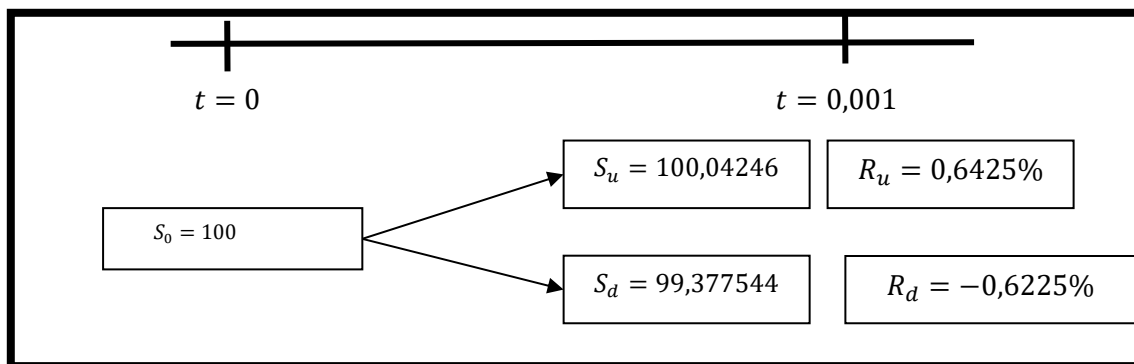
μ	σ
41,431816%	12,3697306%

SE HACE EL MISMO PROCEDIMIENTO, PERO CON Δt *cada vez más chicos*

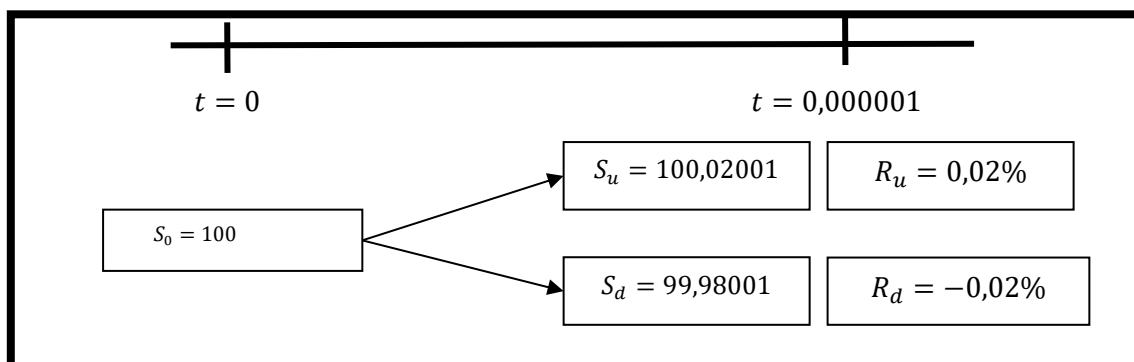
$$\text{EN } \Delta t = 0,0625$$



CON $\Delta t = 0,0625$			
	PROBABILIDAD REAL	PROBABILIDAD CON P	PROBABILIDAD CON P'
Probabilidad up	0,5	0,5819444	0,7063643
Probabilidad down	0,5	0,4180556	0,2936357
μ	10%	23,111%	43,0183%
σ	20%	19,7296%	18,2171%

EN $\Delta t = 0,001$ 

CON $\Delta t = 0,001$			
CONCEPTO	PROBABILIDAD REAL	PROBABILIDAD CON NUMERARIO P	PROBABILIDAD CON NUMERARIO P'
Probabilidad up	0,5	0,5104344	0,5265556
Probabilidad down	0,5	0,4895656	0,47344444
μ	10%	23,1986%	43,5905%
σ	20%	19,9956%	19,9718%

EN $\Delta t = 0,000001$ 

CON $\Delta t = 0,000001$			
	PROBABILIDAD REAL	PROBABILIDAD CON P	PROBABILIDAD CON P'
Probabilidad up	0,5	0,5819444	0,7063643
Probabilidad down	0,5	0,4180556	0,2936357
μ	10%	23,2%	43,6%
σ	20%	20%	20%

CONCLUSIÓN

A MEDIDA QUE CAMBIAMOS DE MEDIDA DE PROBABILIDAD CAMBIA EL DRIFT PERO NO LA VOLATILIDAD, LA CUAL ES LA MISMA QUE LA ORIGINAL Y ESTO OCURRE SOLO EN $\Delta t \rightarrow 0$. Es lo que dice Girsanov y se puede resumir en la siguiente ecuación

$$dv = (r + \lambda \cdot \sigma) \cdot dt + \sigma \cdot V \cdot dz$$

Si cambiamos la medida de probabilidad desde las reales p, a las que calculamos con el numerario P o el numerario p' ¿qué efecto tiene sobre los retornos esperados y la volatilidad esperada?

Cuando cambiamos nuestra medida de probabilidad y las obtenemos con el numerario p también tenemos un λ asociado. Este parámetro es el precio que un inversor exige que se le pague por unidad de riesgo de un activo riesgoso para invertir en este activo. Este parámetro está asociado con las preferencias del inversor hacia el riesgo. Donde

$\lambda \cdot \sigma$ Es lo que se paga por sobre la tasa libre de riesgo

Cuando cambiamos nuestra medida de probabilidad y dependiendo cuan adversos al riesgo seamos, cambiara la esperanza de los retornos y si por ejemplo cae la esperanza del retorno, luego, subirá el λ o el premio que exija el inversor para invertir en el activo riesgoso. Lo que dice Girsanov es que si cambiamos de medidas de probabilidad y tomamos un Δt muy chico la varianza no cambia, pero si el drift porque cambia el λ .

Capítulo 9: Risk Management aplicaciones de estrategias con contratos forward y futuros

Básicamente hay dos objetivos, en principio, que son las razones por las que se puede acudir a los mercados de futuros:

- Especulación
- Cobertura

Vamos a colocar el foco en la Cobertura de un Riesgo Base, y en particular, el riesgo del tipo de cambio. Como ejemplo vamos a suponer un productor de soja que va a colocar su producto en el mercado internacional que busca cubrirse del riesgo de tipo de cambio en un periodo futuro de un insumo clave de su producción. En definitiva, el productor tiene dos riesgos asociados: El riesgo asociado a la producción del insumo (sequias, etc.) y el riesgo asociado con la volatilidad del tipo de cambio (riesgo de precio). La idea es eliminar el riesgo de tipo de cambio, aunque la situación global es mucho más amplia porque la producción de este insumo está expuesta a los efectos climáticos, entre otros. El productor en una fecha futura T tiene acordada la venta de su producción y va a recibir un monto en USD igual a N_A . En definitiva, la ecuación de ingresos del productor es la siguiente

$$Y_T = N_A * S_T$$

$$N_A = \text{Cantidad USD a vender en } T, S_T = \text{Tipo de cambio en } T \text{ y } Y_T = \text{Ingresos en } T \text{ en ARG}$$

Donde S_T es una variable aleatoria.

Objetivo de la cobertura

El productor de soja quiere eliminar el riesgo de tipo de cambio y de esta manera busca eliminar la incertidumbre alrededor del tipo de cambio. Si llamamos a F_T al tipo de cambio del futuro en el momento $t=0$ vamos a analizar los posibles escenarios suponiendo una posición short en el futuro

- $F_T > S_T$ Existe una ganancia porque se vende a un tipo de cambio mayor al del mercado
- $F_T < S_T$ Existe una pérdida porque se vende a un tipo de cambio menor al del mercado

De ocurrir el caso a) el productor de soja tiene una ganancia igual a $F_T - S_T$, en el momento T , y viceversa en el caso contrario, a pesar de esto el productor ha maximizado sus resultados porque el solo busca eliminar la incertidumbre del tipo de cambio anclando a F_T . Si consideramos que el futuro es "Cash Settlement", el productor debe salir a vender sus dólares al mercado a tipo de cambio S_T , pero también tiene una pérdida o una ganancia por el futuro. En resumen, se tiene la siguiente situación en T

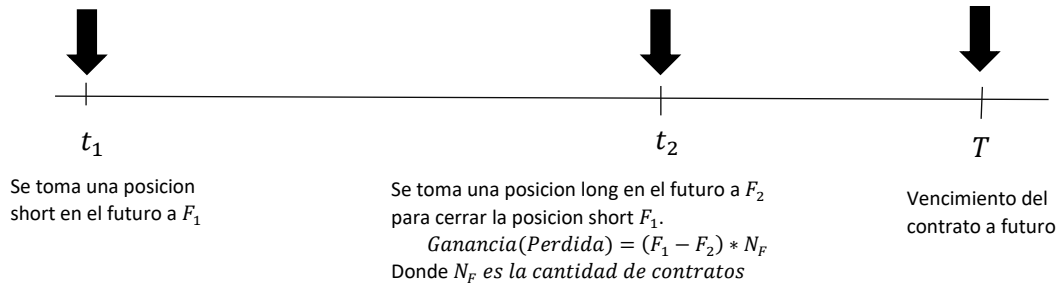
$$S_T + (F_T - S_T) = F_T$$

Sea cual fuere el escenario el tipo de cambio de venta de los dólares es igual a F_T , visto desde una perspectiva de especulación se ha perdido, pero desde una de cobertura se ha eliminado la incertidumbre y en $t=0$ ya se conoce a que tipo de cambio se va a obtener por los dólares producto de las colocaciones de sus productos por parte del productor. Se podría pensar como que el "core" del negocio del productor es la ganancia obtenida de su producción y no busca obtener ganancias en el mercado de futuros, simplemente obtener un equilibrio financiero a través de la certidumbre que le brinda el mercado de futuros. Esto no significa que ha eliminado todos los riesgos, en este caso solo el de precios de la divisa de interés.

Funcionamiento del mercado de futuros

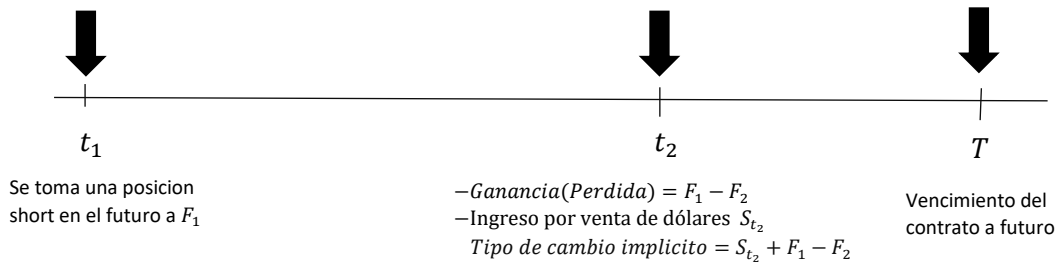
No es la idea realizar un completo detalle del funcionamiento de estos mercados solo resaltar varios temas, como el hecho de que a diferencias de los contratos Forward, estos contratos a diario analizan la ganancia y/o pérdidas

obtenidas por las diferencias en los strikes de los contratos, y suman o restan de una cuenta que previamente se ha realizado un depósito de garantía.



De la imagen se puede observar que en el momento t_2 se cierra posición tomando la posición contraria en el ejemplo para cerrar la posición se debe tomar una posición Long. La ganancia (perdida) se determina considerando que la posición short es la venta del subyacente por lo tanto ingresa F_1 , la posición Long brinda un egreso por el valor F_2 , luego simplemente se lo multiplica por la cantidad de contratos.

Si extendemos el análisis y consideramos la venta que se realiza en t_2 de las divisas obtenemos por la misma un ingreso igual a S_{t_2} , pero también hay que agregar el resultado obtenido por tomar una posición short en un futuro sobre divisa el cual es igual a $F_1 - F_2$, en definitiva el tipo de cambio implícito al cual se ha vendido las divisas es igual $S_{t_2} + F_1 - F_2$. El siguiente gráfico muestra la situación.



En el momento t_1 tanto S_{t_2} como F_2 son variables aleatorias donde

$$\lim_{t \rightarrow T} F_t = \lim_{t \rightarrow T} S_t \cdot e^{(r-r_f)(T-t)} = S_t$$

A partir de esta demostración podemos ver que el tipo de cambio implícito tiende a ser F_1 a medida que $t \rightarrow T$.

Minimizar la volatilidad de los Ingresos

Hasta ahora hemos el productor de soja posee una cartera con la siguiente estructura de ingresos

$$Y_2 = N_A * S_2 + N_F * (F_1 - F_2)$$

En definitiva, de una cartera conformada de la siguiente manera

Posición Long en N_A Subyacente + Posición Short en N_F contratos en el Futuro

El segundo objetivo más importante para el productor es minimizar la volatilidad de sus ingresos para lo cual hay que determinar cuáles son las variables de las cuales posee control para llevar a cabo la minimización. La cantidad de dólares N_A es conocido a priori y aunque se podría eventualmente controlar no es posible de alterar, el tipo de cambio en el momento 2 S_2 es una variable aleatoria la cual es la que se busca obtener cobertura, lo mismo ocurre

con F_2 . En cuanto a F_1 también es conocido a priori y no existe control sobre la misma, lo que resta es la cantidad de contratos N_F la cual es una variable sobre la cual el productor tiene control. En definitiva, plantemos la varianza del ingreso de la siguiente forma,

Sumamos y restamos $N_A * S_1$ a Y_2

$$Y_2 = N_A * S_2 - N_A * S_1 + N_A * S_1 + N_F * (F_1 - F_2)$$

$$Y_2 = N_A * \Delta S + N_A * S_1 - N_F * \Delta F$$

Sacamos factor común N_A

$$Y_2 = N_A * S_1 + N_A * \left(\Delta S - \frac{N_F}{N_A} * \Delta F \right)$$

Estimamos la varianza

$$VAR(Y_2) = VAR\left(N_A * S_1 + N_A * \left(\Delta S - \frac{N_F}{N_A} * \Delta F \right)\right)$$

Donde S_1 y N_A son constantes, mientras que ΔS y ΔF son variables aleatorias, y la variable de control y la cual debemos determinar su valor es N_F . Conocer esto nos va a ayudar a encontrar la varianza de los ingresos

$$VAR(Y_2) = N_A^2 * VAR\left(\Delta S - \frac{N_F}{N_A} * \Delta F\right)$$

$$VAR(Y_2) = N_A^2 * \left(VAR(\Delta S) + \left(\frac{N_F}{N_A}\right)^2 * [VAR(\Delta F)] - 2COV(\Delta S, \Delta F) * \frac{N_F}{N_A} \right)$$

Si tomamos la siguiente igualdad

$$H = \frac{N_F}{N_A}$$

Reemplazamos por H

$$VAR(Y_2) = N_A^2 * (VAR(\Delta S) + (H)^2 * [VAR(\Delta F)] - 2COV(\Delta S, \Delta F) * H)$$

$$VAR(Y_2) = N_A^2 * VAR(\Delta S) + N_A^2 * (H)^2 * [VAR(\Delta F)] - 2 * N_A^2 * COV(\Delta S, \Delta F) * H$$

Hacemos $\frac{dVAR(Y_2)}{dH}$

$$\frac{dVAR(Y_2)}{dH} = 2 * N_A^2 * H * [VAR(\Delta F)] - 2 * N_A^2 * COV(\Delta S, \Delta F)$$

Igualamos a cero

$$\frac{dVAR(Y_2)}{dH} = 0$$

$$2 * N_A^2 * H * [VAR(\Delta F)] - 2 * N_A^2 * COV(\Delta S, \Delta F) = 0$$

$$H * VAR(\Delta F) - COV(\Delta S, \Delta F) = 0$$

$$H = \frac{COV(\Delta S, \Delta F)}{VAR(\Delta F)}$$

También

$$H^* = \rho_{\Delta S, \Delta F} * \left(\frac{\sigma_{\Delta S} * \sigma_{\Delta F}}{\sigma_{\Delta F}^2} \right)$$

Por lo cual

$$H^* = \rho_{\Delta S, \Delta F} * \left(\frac{\sigma_{\Delta S}}{\sigma_{\Delta F}} \right)$$

Cuando ocurre lo siguiente

$$\sigma_{\Delta S} = \sigma_{\Delta F} \text{ entonces } \rho_{\Delta S, \Delta F} = 1$$

Entonces

$$H^* = \frac{N_F}{N_A} = \rho_{\Delta S, \Delta F} * \left(\frac{\sigma_{\Delta S}}{\sigma_{\Delta F}} \right)$$

En definitiva,

$$N_F = N_A * H^*$$

$$N_F = N_A * \rho_{\Delta S, \Delta F} * \left(\frac{\sigma_{\Delta S}}{\sigma_{\Delta F}} \right)$$

Donde

$$\rho_{\Delta S, \Delta F} = \frac{\sigma_{\Delta S, \Delta F}}{\sigma_{\Delta F} \sigma_{\Delta S}} \text{ donde } \sigma_{\Delta S, \Delta F} = COV(\Delta S, \Delta F)$$

Lo cual implica que la exposición a contratos futuros N_F depende de la exposición al subyacente N_A , y en particular, en la relación entre la volatilidad tanto del subyacente como la del futuro $\frac{\sigma_{\Delta S}}{\sigma_{\Delta F}}$, la cual define el coeficiente de correlación $\rho_{\Delta S, \Delta F}$.

También lo podemos expresar en términos de rendimientos $\frac{\Delta S}{S}$ y $\frac{\Delta F}{F}$ de la siguiente forma donde $S_1 = S$ y $F_1 = F$

$$VAR(Y_2) = N_A^2 * VAR\left(\left(\Delta S * \frac{S}{S} - \frac{N_F}{N_A} * \Delta F * \frac{F}{F}\right)\right)$$

Si renombramos las variables de la siguiente manera $r = \frac{\Delta S}{S}$ y $f = \frac{\Delta F}{F}$

$$VAR(Y_2) = N_A^2 * VAR\left(r * S - \frac{N_F}{N_A} * f * F\right)$$

Luego

$$VAR(Y_2) = N_A^2 * \left(S^2 * VAR(r) + \left(\frac{N_F}{N_A}\right)^2 * [F^2 * VAR(f)] - 2COV(r, f) * \frac{N_F}{N_A} * S * F \right)$$

Si tomamos la siguiente igualdad

$$H = \frac{N_F}{N_A}$$

Reemplazamos por H

$$VAR(Y_2) = N_A^2 * (S^2 * VAR(r) + (H)^2 * F^2 * [VAR(f)] - 2 * S * F * COV(r, f) * H)$$

$$VAR(Y_2) = N_A^2 * S^2 * VAR(r) + N_A^2 * (H)^2 * F^2 * [VAR(f)] - 2 * S * F * N_A^2 * COV(\Delta S, \Delta F) * H$$

Hacemos $\frac{dVAR(Y_2)}{dH}$

$$\frac{dVAR(Y_2)}{dH} = 2 * N_A^2 * H * F^2 * [VAR(f)] - 2 * S * F * N_A^2 * COV(r, f)$$

Igualamos a cero

$$\frac{dVAR(Y_2)}{dH} = 0$$

$$2 * N_A^2 * H * F^2 * VAR(f) - 2 * S * F * N_A^2 * COV(r, f) = 0$$

$$H * F * VAR(f) - S * COV(r, f) = 0$$

$$H = \frac{COV(r, f)}{VAR(f)} * \frac{S}{F}$$

También

$$H^* = \rho_{r,f} * \left(\frac{\sigma_r * \sigma_f}{\sigma_f^2} \right) * \frac{S}{F}$$

Por lo cual

$$H^* = \rho_{r,f} * \left(\frac{\sigma_r}{\sigma_f} \right) * \frac{S}{F}$$

Cuando ocurre lo siguiente

$$\sigma_r = \sigma_f \text{ entonces } \rho_{r,f} = 1$$

Entonces

$$H^* = \frac{N_F}{N_A} = \rho_{r,f} * \left(\frac{\sigma_r}{\sigma_f} \right) * \frac{S}{F}$$

En definitiva,

$$N_F = N_A * H^*$$

$$N_F = N_A * \rho_{r,f} * \left(\frac{\sigma_r}{\sigma_f} \right) * \frac{S}{F}$$

O también

$$N_F = N_A * \rho_{r,f} * \left(\frac{\sigma_r}{\sigma_f} \right) * \frac{S_1}{F_1}$$

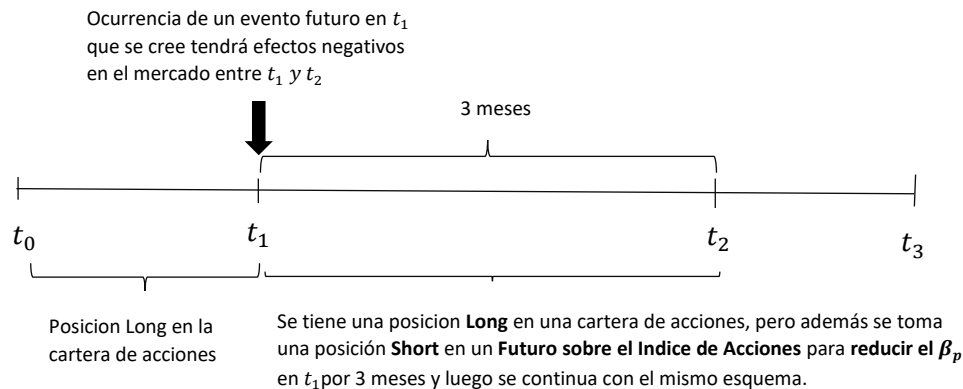
Reducción del Beta de una cartera a través del mercado de futuros por un periodo de tiempo

Supongamos otra situación en la cual se cuenta con una cartera de inversión constituida con n acciones, y la acción i tiene una ponderación dentro de la cartera de inversión como también un beta asociado. Con las ponderaciones X_i como los distintos β_i se puede obtener el beta de la cartera β_p el mide el riesgo sistémico de la

misma. En definitiva, contamos con el siguiente conjunto de activos $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$, la cual tienen asociada las siguientes ponderaciones asociadas $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ y con los siguientes betas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ para obtener el beta de la cartera se debe realizar lo siguiente

$$[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \dots \quad \beta_n] \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n X_i * \beta_i = \beta_p$$

Los retornos de la cartera tienen una sensibilidad (en promedio) con los retornos del mercado. Ante caídas de los retornos del mercado esto tiene un efecto sobre los retornos de la cartera, esto es lo que de alguna manera se está midiendo a través del beta. Ante esta situación lo que buscamos es reducir el riesgo y por lo tanto los efectos adversos que una brusca caída del mercado (medido a través de un índice de acciones) pueda generar sobre los retornos de la cartera, pero solo durante un periodo de tiempo, en nuestro ejemplo 3 meses, para luego continuar con las mismas posiciones. En definitiva, se trata de reducir los efectos adversos que se cree que determinado evento futuro (evento futuro que actúa como disparador) con consecuencias negativas sobre los mercados y por ende sobre el valor de nuestra cartera. Gráficamente podemos ver la situación de una manera más clara.



La idea es actuar sobre el mercado de futuros para modificar el beta de la cartera de β_p a un menor beta β^*

Rentabilidad de la cartera

Del modelo CAPM se tiene lo siguiente que la rentabilidad de la cartera es igual a

$$R_p = R_F + \beta_p * (R_m - R_F)$$

donde

R_p es la rentabilidad de la cartera

R_m es la rentabilidad del índice de acciones

R_F es la tasa libre de riesgo

Si se toma una posición en futuros sobre índices se tiene temporalmente lo siguiente

$$R_p = R_F + \beta^* * (R_m - R_F)$$

Básicamente hay dos estrategias posibles

- Incrementar el beta de la cartera temporalmente tomando de una posición Long en futuros sobre el Índice de acciones.
- Reducir el beta de la cartera temporalmente tomando de una posición Short en futuros sobre el Índice de acciones.

Los siguientes cuadros ilustran mejor la situación:

Reducir el beta de la cartera temporalmente

Activos	Posición tomada	Correlación con el mercado
Cartera	Long	Positiva medida a través del beta β_p
Futuro sobre el índice de mercado	Short	Negativa (Efecto compensación)

Incrementar el beta de la cartera temporalmente

Activos	Posición tomada	Correlación con el mercado
Cartera	Long	Positiva medida a través del beta β_p
Futuro sobre el índice de mercado	Long	Positiva (Efecto incremental)

Variación de la rentabilidad de la cartera

Como habíamos mencionado anteriormente tenemos lo siguiente en el momento t

$$R_{p_t} = R_{F_t} + \beta_p * (R_{m_t} - R_{F_t})$$

Luego para el momento t-1

$$R_{p_{t-1}} = R_{F_{t-1}} + \beta_p * (R_{m_{t-1}} - R_{F_{t-1}})$$

Con el supuesto de una ETTI flat en tiempo luego $R_{F_t} = R_{F_{t-1}}$

$$R_{p_t} - R_{p_{t-1}} = [R_{F_t} + \beta_p * (R_{m_t} - R_{F_t})] - [R_{F_{t-1}} + \beta_p * (R_{m_{t-1}} - R_{F_{t-1}})]$$

$$R_{p_t} - R_{p_{t-1}} = R_{F_t} + \beta_p * (R_{m_t} - R_{F_t}) - R_{F_{t-1}} - \beta_p * (R_{m_{t-1}} - R_{F_{t-1}})$$

$$R_{p_t} - R_{p_{t-1}} = R_{F_t} - R_{F_{t-1}} + \beta_p * R_{m_t} - \beta_p * R_{m_{t-1}} - \beta_p * R_{F_t} + \beta_p * R_{F_{t-1}}$$

$$\Delta R_p = \Delta R_F + \beta_p * \Delta R_m - \beta_p * \Delta R_F$$

Donde $\Delta R_F = 0$

$$\Delta R_p = \beta_p * \Delta R_m$$

Nuestro objetivo es tener un ΔR_p^* para lo cual que trabajar en el β_p llevándolo a un beta objetivo β^* para que ante cambios en ΔR_m una variable de la cual no se tiene control se obtenga el resultado deseado, para esto hay que tomar una posición en futuros sobre índices. Si $\beta^* = 0$ luego por la fórmula de CAPM

$$R_p = R_F$$

Formación de la nueva cartera

Es muy importante comprender que estamos formando una nueva cartera en donde tenemos una posición en la cartera original y en una posición en una cierta cantidad de futuros sobre el índice de mercado. Luego tenemos lo siguiente

$$\pi_1 = \pi_0 + N_F * F_0$$

Donde

$$\pi_1 = \text{Valor de la nueva cartera}$$

$$\pi_0 = \text{Valor de la cartera original}$$

$$N_F \text{ cantidad de contratos en futuros sobre índices}$$

$$F_0 \text{ es el valor del futuro}$$

Si diferenciamos la cartera nueva luego

$$\Delta\pi_1 = \pi_0 * \beta_p * \Delta R_m + N_F * F_0 * \Delta R_{fut}$$

Luego nuestro objetivo es que

$$\Delta\pi_1 = \pi_0 * \beta^* * \Delta R_m$$

Es decir,

$$\pi_0 * \beta_p * \Delta R_m + N_F * F_0 * \Delta R_{fut} = \pi_0 * \beta^* * \Delta R_m$$

La variación de la nueva cartera es la variación de la cartera original más el efecto de la variación en la posición en futuros.

$$\Delta\pi_1 = \Delta\pi_0 + \Delta F_{futuro}$$

$$\Delta\pi_1 = \text{Efecto de la posición en la cartera } \pi_0 + \text{Efecto de la posición en futuros}$$

Análisis de la tasa de rentabilidad del futuro

En esta sección vamos a analizar cómo se mueve ΔR_{fut} , indudablemente existe una correlación entre el índice al mercado I_t el futuro sobre el índice F_t , por lo tanto, existe una relación entre ΔR_{fut} y ΔR_m . También esta relación depende del nivel y grado de correlación entre ambas variables, si suponemos una relación perfecta y directa, es decir, que el coeficiente de correlación entre ambas variables $\rho_{\Delta M, \Delta F} = 1$, y por lo que se tiene la siguiente (esta relación es la que se supone Hull)

$$\Delta R_{fut} \cong \Delta R_m$$

Si consideramos una relación más realista en donde la correlación no es perfecta ni lineal por lo tanto se tiene la siguiente relación

$$\Delta R_{fut} = \beta_{fut} * \Delta R_m$$

En el caso donde $\rho_{\Delta M, \Delta F} = 1$ luego

$$\beta_{fut} = 1$$

Variable de control: Cantidad de Contratos a Futuros N_F

$$\pi_0 * \beta_p * \Delta R_m + N_F * F_0 * \Delta R_{fut} = \pi_0 * \beta^* * \Delta R_m$$

$$N_F * F_0 * \Delta R_{fut} = \pi_0 * \beta^* * \Delta R_m - \pi_0 * \beta_p * \Delta R_m$$

$$N_F * F_0 * \Delta R_{fut} = \pi_0 * (\beta^* - \beta_p) * \Delta R_m$$

$$N_F = \frac{\pi_0 * (\beta^* - \beta_p) * \Delta R_m}{F_0 * \Delta R_{fut}}$$

Tenemos que

$$\Delta R_{fut} = \beta_{fut} * \Delta R_m$$

Luego

$$N_F = \frac{\pi_0 * (\beta^* - \beta_p) * \Delta R_m}{F_0 * \beta_{fut} * \Delta R_m}$$

$$N_F = \frac{(\beta^* - \beta_p)}{\beta_{fut}} * \frac{\pi_0}{F_0}$$

Luego se tiene lo siguiente

Objetivo de β^*	Signo de N_F	Posicion en futuros sobre el índice de mercado
$\beta^* < \beta_p$	Negativo	Short
$\beta^* > \beta_p$	Positivo	Long

Entendiendo que posicion tomar en un futuro sobre índice bursátiles

En general un índice bursátil se considera como el precio de un activo de inversión que paga dividendos. El activo de inversión es la cartera de acciones subyacente al índice y los dividendos que paga el activo de inversión son los que recibiría el tenedor de esta cartera. Por lo general se asume que los dividendos proporcionan un rendimiento conocido en vez de un ingreso en efectivo conocido.

Si q es la tasa de rendimientos de dividendos, tenemos que el PRECIO LIBRE DE ARBITRAJE DEL CONTRATO A PLAZO O A FUTURO es igual a

$$F_0 = I_0 \times e^{(r-q) \times T}$$

En la práctica, el rendimiento de dividendos sobre la cartera subyacente a un índice varía cada semana a lo largo del año. El valor elegido de q debe representar el rendimiento de dividendos anualizado promedio durante la vida del contrato. Este tipo de contratos se paga tanta veces el valor del índice bursátil.

En el momento T	Payoff posicion Long en Futuros sobre Índices Bursátil	Payoff posicion Short en Futuros sobre Índices Bursátil
$I_T > F_0$	a) <i>Ganancia</i> = $F_0 - I_T$	c) <i>Perdida</i> = $I_T - F_0$
$I_T < F_0$	b) <i>Perdida</i> = $F_0 - I_T$	d) <i>Ganancia</i> = $I_T - F_0$

En a) estamos **comprando** el índice a un precio F_0 para después venderlo a un valor mayor I_T para obtener una ganancia igual a $F_0 - I_T$. Apuesta a una suba muy fuerte del valor del índice.

En b) estamos **comprando** el índice a un precio F_0 para después venderlo a un valor menor I_T para obtener una perdida igual a $F_0 - I_T$. Apuesta a una suba muy fuerte del valor del índice.

En c) estamos **vendiendo** el índice a un precio F_0 cuando se podría vender a un valor mayor en el mercado I_T de esta forma se incurre en una pérdida igual a $I_T - F_0$. Apuesta a una baja muy fuerte del valor del índice.

En d) estamos **vendiendo** el índice a un precio F_0 cuando se podría vender a un valor menor en el mercado I_T de esta forma se incurre en una ganancia igual a $I_T - F_0$. Apuesta a una baja muy fuerte del valor del índice.

Payoff posicion Long en Futuros sobre Índices Bursátil	Payoff posicion Short en Futuros sobre Índices Bursátil
Correlación positiva con el índice bursátil	Correlación negativa con el índice bursátil

En el momento T	Payoff posicion Long en Futuros sobre Índices Bursátil	Payoff posicion Short en Futuros sobre Índices Bursátil
Aumenta Índice bursátil	↑ (Relación positiva)	↓ (Relación negativa)
Disminuye Índice bursátil	↓ (Relación positiva)	↑ (Relación negativa)

Ejercitación

Ejercicio 1

Considera una firma estadounidense de Asset Management que busca colocar 50.000.000 € en el mercado francés de acciones. Esta cartera tiene una beta de 0,95. El tipo de cambio spot es \$0,8823 por euro (USD/Euro). La tasa de interés extranjera es 5,75% a un año, mientras que la tasa de interés domestica es 6,45% a un año. Un contrato forward sobre el euro a un año está valuado a \$0,8881(USD/Euro). Un contrato a futuro sobre índice bursátil, en este caso, el CAC 40 (el índice bursátil de la bolsa de Francia) está valuado en 46.390 €, con el multiplicador tomado en cuenta. El contrato de futuros sobre el índice tiene una beta igual a 1,05. Se pide lo siguiente

- ¿Qué posicion debe tomar el asset manager para realizar una cobertura del riesgo de mercado? Calcular el número de contratos que son necesarios.
- Suponga que la firma también desea tener una cobertura sobre el riesgo de tipo de cambio utilizando un contrato forward sobre el euro. ¿Cuál debería ser el notional principal del contrato forward?
- Asuma que al término de un año la bolsa francesa tuvo un retorno positivo del 8%. El tipo de cambio es de \$0,8765 por euro y el futuro sobre índice es de 47.550 €. Calcular el retorno dado cada uno de los siguientes escenarios:
 - La cartera no tiene ninguna cobertura
 - Únicamente la cobertura de mercado es llevada a cabo.
 - Ambos riesgos son cubiertos tanto el de mercado como el de tipo de cambio.

Respuesta

- A. Debe tomar una posicion short en el futuro sobre índice.

$$N_F = \frac{(\beta^* - \beta_p)}{\beta_{fut}} * \frac{\pi_0}{F_0}$$

Donde

$$\beta^* = 0 \quad \beta_{fut} = 1,05 \quad \beta_p = 0,95 \quad F_0 = 47.550 \text{ €} \quad \pi_0 = 50.000.000 \text{ €}$$

$$N_F = \frac{(0 - 0,95)}{1,05} * \frac{50.000.000 \text{ €}}{47.550 \text{ €}} = -975,17$$

Se deben tomar una posicion short en 975 contratos a futuros sobre índices

- B. Si $\beta^* = 0$ entonces por el modelo CAPM tenemos que la rentabilidad de la nueva cartera la cual tiene una posición Long en una cartera con activos correlacionada con el índice de mercado y una posición short en futuros sobre índice. Luego tenemos que

$$R_p = R_F + \beta^* \cdot (R_m - R_F)$$

Ósea

$$R_p = R_F$$

Como la cartera está formada en la bolsa de Francia, y el lugar de residencia de la firma es USA, luego la tasa de interés extranjera es una tasa en euros y es igual a 5,75% a un año. En definitiva, se tiene una cartera formada en un país extranjero y se desea convertir los euros generados por la cartera y convertirlos a dólares (vender euros) para enviarlos a la casa matriz en USA. Por esta causa se debe tomar una posición short en el contrato a futuro sobre divisa. El valor notional o principal es la cantidad de euros que se van a vender al final del periodo en este caso es un año. Con cobertura sobre riesgo de mercado como mencionamos anteriormente se tiene que la cartera en un año es igual a lo siguiente

$$\pi_1 \cdot (1 + R_F) = 50.000.000 \text{ €} \cdot (1 + 5,75\%) = 52.875.000 \text{ €}$$

C.

Parte I

Supongamos que estamos con una cartera que replica el índice por lo cual se tiene lo siguiente

Momento inicial

$$\pi_0 = 50.000.000 \text{ €}$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = 50.000.000 \text{ €} \cdot 0,8823 \frac{\text{USD}}{\text{€}} = 44.115.000 \text{ USD}$$

Luego de un año

$$\pi_0 \cdot (1 + R) = 50.000.000 \text{ €} \cdot (1 + 8\%) = 54.000.000 \text{ €}$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = 54.000.000 \text{ €} \cdot 0,8765 \frac{\text{USD}}{\text{€}} = 47.331.000 \text{ USD}$$

Ahora calculamos el retorno de la cartera en dólares

$$\left(\frac{47.331.000 \text{ USD}}{44.115.000 \text{ USD}} - 1 \right) \cdot 100 = 7,290037402\%$$

Parte II

Supongamos que estamos con una cartera que replica el índice por lo cual se tiene lo siguiente

Momento inicial

$$\pi_0 = 50.000.000 \text{ €}$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = 50.000.000 \text{ €} \cdot 0,8823 \frac{\text{USD}}{\text{€}} = 44.115.000 \text{ USD}$$

Luego de un año

$$\pi_0 \cdot (1 + R_F) = 50.000.000 \text{ €} \cdot (1 + 8\%) = 54.000.000 \text{ €}$$

Pero también se tiene una posición short en el futuro sobre índice

$$(47.550 \text{ €} - 46.390 \text{ €}) \cdot (-975) = -1.131.000 \text{ €}$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = 54.000.000 \text{ €} \cdot 0,8765 \frac{\text{USD}}{\text{€}} - 1.131.000 \text{ €} \cdot 0,8765 \frac{\text{USD}}{\text{€}} = 46.339.679 \text{ USD}$$

Ahora calculamos el retorno de la cartera en dólares

$$\left(\frac{46.339.679 \text{ USD}}{44.115.000 \text{ USD}} - 1 \right) * 100 = 5,042907174\%$$

Parte III

Supongamos que estamos con una cartera que replica el índice por lo cual se tiene lo siguiente

Momento inicial

$$\pi_0 = 50.000.000 \text{ €}$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = 50.000.000 \text{ €} \cdot 0,8823 \frac{\text{USD}}{\text{€}} = 44.115.000 \text{ USD}$$

Luego de un año

$$\pi_0 \cdot (1 + R_F) = 50.000.000 \text{ €} \cdot (1 + 8\%) = 54.000.000 \text{ €}$$

Pero también se tiene una posición short en el futuro sobre índice

$$(47.550 \text{ €} - 46.390 \text{ €}) * (-975) = -1.131.000 \text{ €}$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = 54.000.000 \text{ €} \cdot 0,8765 \frac{\text{USD}}{\text{€}} - 1.131.000 \text{ €} \cdot 0,8765 \frac{\text{USD}}{\text{€}} = 46.339.679 \text{ USD}$$

También tomamos una posición short en un futuro sobre divisas recordando que el notional ya lo hemos calculado

$$\left(0,8765 \frac{\text{USD}}{\text{€}} - 0,8881 \frac{\text{USD}}{\text{€}} \right) * (-52.875.000 \text{ €}) = 613.350 \text{ USD}$$

Sumando todo quedaría de la siguiente forma

$$46.339.679 \text{ USD} + 613.350 \text{ USD} = 46.953.029 \text{ USD}$$

Ahora calculamos el retorno de la cartera en dólares

$$\left(\frac{46.953.029 \text{ USD}}{44.115.000 \text{ USD}} - 1 \right) * 100 = 6,43\%$$

En definitiva, cuando ambas estrategias son llevadas adelante, luego, la tasa de rentabilidad es aproximadamente la tasa de interés doméstica es 6,45% a un año.

Ejercicio 2

Considera una firma estadounidense de Asset Management que busca colocar £150.000.000 en la bolsa de acciones británico. Esta cartera tiene una beta de 1,15. El tipo de cambio spot es \$1,4194 por libra (USD/Libra). La tasa de interés extranjera (tasa de interés británica) es 6,75% a un año, mientras que la tasa de interés doméstica (tasa de interés de USA) es 5,25% a un año. Ambas tasas están expresadas de la misma manera que lo hace la tasa Libor, es decir, $Tasa \times \frac{Dias}{360}$. Un contrato forward sobre la libra a un año está valuado a \$1,4142 (USD/Libra). Un contrato a futuro sobre índice bursátil, en este caso, el FTSE 100 (el índice bursátil de la bolsa de Inglaterra) está valuado en £52.665, con el multiplicador tomado en cuenta. El contrato de futuros sobre el índice tiene una beta igual a 0,90. Se pide lo siguiente

- A. ¿Qué posición debe tomar el asset manager para realizar una cobertura del riesgo de mercado? Calcular el número de contratos que son necesarios.
- B. Suponga que la firma también desea tener una cobertura sobre el riesgo de tipo de cambio utilizando un contrato forward sobre la libra. ¿Cuál debería ser el notional principal del contrato forward?
- C. Asuma que al término de 3 meses la bolsa de Inglaterra tuvo un retorno negativo del 3,25%. El tipo de cambio es de \$1,4396 por libra y el futuro sobre índice es de £50.630. Calcular el retorno dado cada uno de los siguientes escenarios:
- La cartera no tiene ninguna cobertura
 - Únicamente la cobertura de mercado es llevada a cabo.
 - Ambos riesgos son cubiertos tanto el de mercado como el de tipo de cambio.

Respuesta

- A. Debe tomar una posición short en el futuro sobre índice para realizar una cobertura ante una caída del mercado accionario británico

$$N_F = \frac{(\beta^* - \beta_p)}{\beta_{fut}} * \frac{\pi_0}{F_0}$$

Donde

$$\beta^* = 0 \quad \beta_{fut} = 0,90 \quad \beta_p = 1,15 \quad F_0 = £52.665 \quad \pi_0 = £150.000.000$$

$$N_F = \frac{(0 - 1,15)}{0,90} * \frac{£150.000.000}{£52.665} = -3.639,355676$$

Se deben tomar una posición short en 3.639 contratos a futuros sobre índices

- B. Si $\beta^* = 0$ entonces por el modelo CAPM tenemos que la rentabilidad de la nueva cartera la cual tiene una posición Long en una cartera con activos correlacionada con el índice de mercado y una posición short en futuros sobre índice. Luego tenemos que

$$R_p = R_F + \beta^* * (R_m - R_F)$$

Ósea

$$R_p = R_F$$

Como la cartera está formada en la bolsa de Inglaterra, y el lugar de residencia de la firma es USA, luego la tasa de interés extranjera es una tasa en libras y es igual a 6,75% a un año. En definitiva, se tiene una cartera formada en un país extranjero y se desea convertir las libras generados por la cartera y convertirlos a dólares (vender libras) para enviarlos a la casa matriz en USA. Por esta causa se debe tomar una posición short en el contrato a futuro sobre divisa. El valor notional o principal es la cantidad de libras que se van a vender al final del periodo en este caso son tres meses. Con cobertura sobre riesgo de mercado como mencionamos anteriormente se tiene que la cartera en un año es igual a lo siguiente

$$\pi_1 \cdot (1 + R_F) = £150.000.000 \cdot \left(1 + 6,75\% \cdot \frac{90}{360}\right) = £152.531.250$$

C.

Parte I

Supongamos que estamos con una cartera que replica el índice por lo cual se tiene lo siguiente

Momento inicial

$$\pi_0 = £150.000.000$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = £150.000.000 \cdot 1,4194 \frac{USD}{£} = 212.910.000 \text{ USD}$$

Luego de 3 meses

$$\pi_0 \cdot (1 + R) = £150.000.000 \cdot (1 - 3,25\%) = £145.125.000$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = £145.125.000 \cdot 1,4396 \frac{USD}{£} = 208.921.950 \text{ USD}$$

Ahora calculamos el retorno de la cartera en dólares

$$\left(\frac{208.921.950 \text{ USD}}{212.910.000 \text{ USD}} - 1 \right) * 100 = -1,8733115401\%$$

Parte II

Supongamos que estamos con una cartera que replica el índice por lo cual se tiene lo siguiente

Momento inicial

$$\pi_0 = £150.000.000$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = £150.000.000 \cdot 1,4194 \frac{USD}{£} = 212.910.000 \text{ USD}$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = £145.125.000 \cdot 1,4396 \frac{USD}{£} = 208.921.950 \text{ USD}$$

Pero también se tiene una posición short en el futuro sobre índice

$$(\$50.630 - \$52.665) * (-3.639) = \$7.405.365$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = £145.125.000 \cdot 1,4396 \frac{USD}{£} + \$7.405.365 \cdot 1,4396 \frac{USD}{£} = 219.582.713 \text{ USD}$$

Ahora calculamos el retorno de la cartera en dólares

$$\left(\frac{219.582.713 \text{ USD}}{212.910.000 \text{ USD}} - 1 \right) * 100 = 3,134053356\%$$

Parte III

Supongamos que estamos con una cartera que replica el índice por lo cual se tiene lo siguiente

Momento inicial

$$\pi_0 = £150.000.000$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = £150.000.000 \cdot 1,4194 \frac{USD}{£} = 212.910.000 \text{ USD}$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = £145.125.000 \cdot 1,4396 \frac{USD}{£} = 208.921.950 \text{ USD}$$

Pero también se tiene una posición short en el futuro sobre índice

$$(\$50.630 - \$52.665) * (-3.639) = \$7.405.365$$

Lo pasamos a dólares

$$\pi_0 = £145.125.000 \cdot 1,4396 \frac{USD}{£} + £7.405.365 \cdot 1,4396 \frac{USD}{£} = 219.582.713 \text{ USD}$$

También tomamos una posición short en un futuro sobre divisas recordando que el notional ya lo hemos calculado

$$\left(1,4396 \frac{USD}{£} - 1,4142 \frac{USD}{£}\right) * (-£152.531.250) = -3.874.294 \text{ USD}$$

Sumando todo quedaría de la siguiente forma

$$219.582.713 \text{ USD} - 3.874.294 \text{ USD} = 215.708.419 \text{ USD}$$

Ahora calculamos el retorno de la cartera en dólares

$$\left(\frac{215.708.419 \text{ USD}}{212.910.000 \text{ USD}} - 1\right) * 100 = 1,314367103\%$$

Si anualizamos la tasa $1,314367103\% \cdot \frac{360}{90} = 5,2575\%$

En definitiva, cuando ambas estrategias son llevadas adelante, luego, la tasa de rentabilidad es aproximadamente la tasa de interés libre de riesgo doméstica es 5,25% a un año.

Ejercicio 3

- A. Considerar una firma norteamericana “GateCorp” que exporta sus productos a Inglaterra. La firma ha, recientemente, cerrado una venta por un valor de £200.000.000 a cobrar dentro de dos meses. Porque el pago se realizará en libras la firma está expuesta al riesgo de tipo de cambio porque debe cambiar el producto de la venta a dólares para hacerla efectiva a moneda local. Con el propósito de realizar una cobertura sobre el riesgo de tipo de cambio GateCorp tiene la intención de utilizar y realizar un contrato forward el cual está valuado a \$1,4272 por libra $\frac{USD}{£}$. Indicar como la firma va a llevar a cabo la cobertura y como la va a implementar. Explique qué ocurre dentro de dos meses cuando vence el contrato forward.
- B. ABCorp es una firma norteamericana que frecuentemente realiza importaciones de materias primas desde Australia. Recientemente la firma ha pactado una compra de materia primas por valor de A\$175.000.000 a ser pagado dentro de un mes. ABCorp tiene el temor de que el dólar australiano se fortalezca frente al dólar, y de esta forma se encarezca el costo en dólares de las mercancías importadas. Un contrato forward es posible de realizarse y tiene un valor de \$0,5249 por dólar australiano. Indicar como la firma va a llevar a cabo la cobertura y como la va a implementar. Explique qué ocurre dentro de dos meses cuando vence el contrato forward.

Respuesta

Parte A

Estudiemos el riesgo de tipo de cambio que tiene la firma en el caso de exportar sus productos a un país extranjero y en particular en este caso, para lo cual se ha creado el siguiente cuadro.

Escenarios	Escenario tipo de cambio	Tipo de cambio $\frac{USD}{£}$	Monto en libras a cobrar por la venta en dos meses	Monto en dólares a cobrar por la venta en dos meses
Fortalecimiento del tipo de cambio	Aumenta el tipo de cambio en \$0,50	\$1,5 por libra	£200.000.000	300.000.000 USD
Paridad uno a uno	Punto de partida	\$1 por libra	£200.000.000	200.000.000 USD
Debilitamiento del tipo de cambio	Disminuye el tipo de cambio en 0,50	0,5 por libra	£200.000.000	100.000.000 USD

Como puede observarse del cuadro cuando la libra se fortalece frente al dólar, es decir, con una libra se pueden comprar más dólares, lo que ocurre es que el productor se ve beneficiado ya que el desembolso de su venta le brinda más dólares que antes y viceversa en el caso contrario en el caso de un debilitamiento de la libra frente al

dólar. En este último caso como puede verse del mismo cuadro tiene una pérdida de 200.000.000 USD, suponiendo que en el momento de la venta el tipo de cambio hubiera sido de \$1,5 por libra, para que dos meses después el mismo sea de 0,5 por libra. De esta forma es posible observar claramente el riesgo al cual esta expuesto el exportador que reside en USA. Para tomar una cobertura frente al riesgo debe tomar una posición short en un futuro sobre divisas. El exportador dentro de dos meses va a hacer efectivo el cobro producto de la venta por un valor de £200.000.000, luego, se le hace necesario hacer la conversión de libras a dólares, es decir, debe vender sus posiciones en libras y pasarse a dólares. Como debe vender las mismas y desea eliminar el riesgo de tipo de cambio es que se asegura un precio de venta de las libras, en este caso, el futuro cotiza a \$1,4272 por libra para dentro de dos meses.

Una vez cumplidos los dos meses el exportador venderá las libras al tipo de cambio \$1,4272 por libra de acuerdo con lo convenido en el contrato forward. El mismo recibirá lo siguiente

$$£200.000.000 \cdot 1,4272 \frac{USD}{£} = 285.440.000 USD$$

Parte B

Estudiamos el riesgo de tipo de cambio que tiene la firma en el caso de importación de materias primas a un país extranjero, para lo cual se ha creado el siguiente cuadro.

Escenarios	Escenario tipo de cambio	Tipo de cambio $\frac{USD}{A\$}$	Monto en dólar australiano a pagar por la compra en un mes	Monto en dólares a pagar por la compra en un mes
Fortalecimiento del tipo de cambio	Aumenta el tipo de cambio en \$0,50	\$1,5 por dólar australiano	A\$175.000.000	350.000.000 USD
Paridad uno a uno	Punto de partida	\$1 por dólar australiano	A\$175.000.000	175.000.000 USD
Debilitamiento del tipo de cambio	Disminuye el tipo de cambio en 0,50	0,5 por dólar australiano	A\$175.000.000	87.500.000 USD

Como puede observarse del cuadro cuando el dólar australiano se fortalece frente al dólar, es decir, con un dólar australiano se pueden comprar más dólares, lo que ocurre es que el importador se ve perjudicado ya que el desembolso por la compra de las materias primas se ha incrementado, es decir, ha aumentado su costo en dólares y viceversa en el caso contrario de un debilitamiento de la libra frente al dólar. En este último caso como puede verse del mismo cuadro tiene un aumento del costo por 175.000.000 USD, suponiendo que en el momento de la pactada la compra el tipo de cambio hubiera sido de \$1 por dólar australiano, para que un mes después el mismo sea de 1,5 por dólar australiano. De esta forma es posible observar claramente el riesgo al cual está expuesto el importador de materias primas que reside en USA. Para tomar una cobertura frente al riesgo debe tomar una posición long en un futuro sobre divisas. El importador dentro de un mes va a hacer efectivo el pago por un valor de A\$175.000.000, luego, se le hace necesario hacer la conversión de dólares a dólares australianos, es decir, debe vender sus posiciones en dólares y pasarse a dólares australianos. Como debe comprar las mismas y desea eliminar el riesgo de tipo de cambio es que se asegura un precio de compra de los dólares australianos, en este caso, el futuro cotiza a \$0,5249 por dólar australiano para dentro de un mes.

Una vez cumplidos el mes el importador comprará los dólares australianos al tipo de cambio \$0,5249 por dólar australiano de acuerdo con lo convenido en el contrato forward. El mismo pagará lo siguiente para la compra de las materias primas

$$A\$175.000.000 \cdot 0,5249 \frac{USD}{A\$} = 91.857.500 USD$$

Ejercicio 4

Una firma de Investment Management desea incrementar el beta para uno de sus portafolios bajo administración de 0,95 a 1,20 por un periodo de tres meses. El portafolio tiene un market value de 175.000.000 USD. La firma de inversión planea utilizar un contrato a futuros sobre índice bursátiles, el cual cotiza a 105.790 USD, con el propósito de ajustar el beta del portafolio. El contrato a futuro tiene un beta de 0,98.

- A. Calcular el número de contratos a futuros que debería ser comprado o vendido para conseguir un incremento en el beta del portafolio
- B. Al final de los tres meses, el mercado de acciones ha tenido un rendimiento positivo de 5,5%. El portafolio de acciones bajo administración también ha tenido un rendimiento positivo de 5,1%. El contrato a futuros sobre el índice está cotizado en USD 111.500. Calcular el valor total de la posición y el beta efectivo del portafolio.

Respuestas

Parte A

Debe tomar una posición long en el futuro sobre índice para realizar un incremento del efecto sobre los rendimientos del portafolio ante una suba del mercado accionario medido a través del índice bursátil.

$$N_F = \frac{(\beta^* - \beta_p)}{\beta_{fut}} * \frac{\pi_0}{F_0}$$

Donde

$$\beta^* = 1,2 \quad \beta_{fut} = 0,98 \quad \beta_p = 0,95 \quad F_0 = 105.790 \text{ USD} \quad \pi_0 = 175.000.000 \text{ USD}$$

$$N_F = \frac{(1,20 - 0,95)}{0,98} * \frac{175.000.000 \text{ USD}}{105.790 \text{ USD}} = 422$$

Se deben tomar una posición Long en 422 contratos a futuros sobre índices

Parte B

Luego de 3 meses

$$\pi_0 \cdot (1 + R) = 175.000.000 \text{ USD} \cdot (1 + 5,10\%) = 183.925.000 \text{ USD}$$

Pero también se tiene una posición Long en el futuro sobre índice

$$(\text{USD } 111.500 - 105.790 \text{ USD}) * 422 = 2.409.620 \text{ USD}$$

$$\pi_1 = 183.925.000 \text{ USD} + 2.409.620 \text{ USD} = 186.334.620 \text{ USD}$$

Ahora calculamos el retorno de la cartera

$$\left(\frac{186.334.620 \text{ USD}}{175.000.000 \text{ USD}} - 1 \right) * 100 = 6,476925714\%$$

Recordando que

$$R_p = \beta^* \cdot R_m$$

Donde

$$\beta^* = \frac{R_p}{R_m} = \frac{6,476925714\%}{5,50\%} = 1,177622857$$

El valor del beta es muy próximo al que se buscaba con la estrategia realizada.

Ejercicio 5

Un administrador de un fondo de pensión desea reducir el beta para uno de sus portafolios bajo administración de 0,90 a 0,80 por un periodo de seis meses. El portafolio tiene un market value de 485.000.000 USD. El administrador del

fondo de pensión planea utilizar un contrato a futuros sobre índice bursátiles, el cual cotiza a 249.000 USD, con el propósito de ajustar el beta del portfolio. El contrato a futuro tiene una beta de 0,93.

- A. Calcular el número de contratos a futuros que debería ser comprado o vendido para conseguir una disminución en el beta del portfolio
- B. Al final de los seis meses, el mercado de acciones ha tenido un rendimiento negativo de 8,65%. El portfolio de acciones bajo administración también ha tenido un rendimiento negativo de 7,75%. El contrato a futuros sobre el índice tuvo un rendimiento negativo de 8,05% y esta cotizado en 228.956 USD. Calcular el valor total de la posición y el beta efectivo del portfolio.

Respuestas

Parte A

Debe tomar una posición short en el futuro sobre índice para realizar una disminución del efecto sobre los rendimientos del portfolio ante una caída del mercado accionario medido a través del índice bursátil.

$$N_F = \frac{(\beta^* - \beta_p)}{\beta_{fut}} * \frac{\pi_0}{F_0}$$

Donde

$$\beta^* = 0,80 \quad \beta_{fut} = 0,93 \quad \beta_p = 0,90 \quad F_0 = 249.000 \text{ USD} \quad \pi_0 = 485.000.000 \text{ USD}$$

$$N_F = \frac{(0,80 - 0,90)}{0,93} * \frac{485.000.000 \text{ USD}}{249.000 \text{ USD}} = -209,44$$

Se deben tomar una posición short en 209 contratos a futuros sobre índices

Parte B

Luego de 6 meses

$$\pi_0 \cdot (1 + R) = 485.000.000 \text{ USD} \cdot (1 - 7,75\%) = 447.412.500 \text{ USD}$$

Pero también se tiene una posición short en el futuro sobre índice

$$(228.956 \text{ USD} - 249.000 \text{ USD}) * (-209) = 4.189.196 \text{ USD}$$

$$\pi_1 = 447.412.500 \text{ USD} + 4.189.196 \text{ USD} = 451.601.696 \text{ USD}$$

Ahora calculamos el retorno de la cartera

$$\left(\frac{451.601.696 \text{ USD}}{485.000.000 \text{ USD}} - 1 \right) * 100 = -6,886248247\%$$

Recordando que

$$R_p = \beta^* \cdot R_m$$

Donde

$$\beta^* = \frac{R_p}{R_m} = \frac{-6,886248247\%}{-8,65\%} = 0,796098063$$

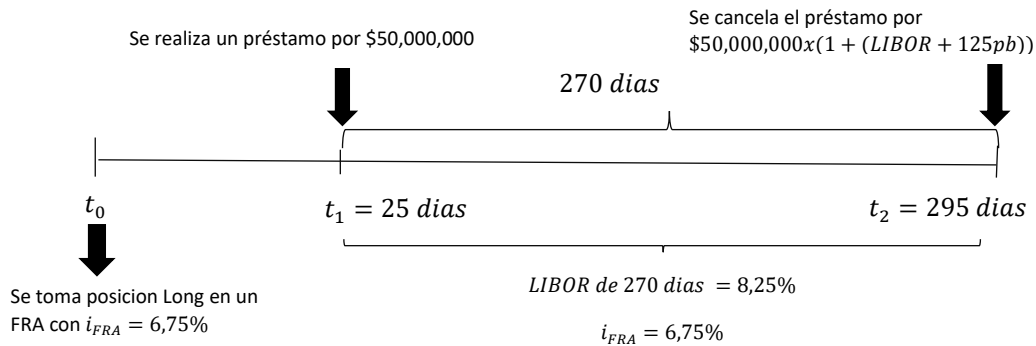
El valor del beta es muy próximo al que se buscaba con la estrategia realizada.

Ejercicio 6

EaseCorp planea tomar un préstamo de \$50,000,000 dentro de 25 días. El préstamo tendrá una vida de 270 días y devengará intereses a una tasa variable igual a la LIBOR más 125 bp. La firma está expuesta a riesgo de tasas, ya que las mismas podrían subir significativamente elevando el costo financiero del préstamo a través de una suba en los intereses devengados. EaseCorp busca realizar una cobertura que elimine el riesgo de tasa, tal que, se fije la tasa

a pagar por el préstamo, por lo cual, ha decidido tomar una posición Long en un FRA con una tasa asociada de 6,75%. Demostrar que el costo efectivo del préstamo es aproximadamente 8% si dentro de 25 días la tasa LIBOR de 270 días es 8,25%.

Respuesta



En el momento $t_1 = 25 \text{ días}$ se toma el préstamo de \$50,000,000, también en este momento se conoce la tasa LIBOR la cual es igual al 8,25%

En el momento $t_2 = 295 \text{ días}$ se cancela el préstamo por el valor

$$-\$50,000,000 \cdot (1 + 8,25\% + 1,25\%) = -\$50,000,000 \cdot (1 + 9,50\%) = -\$54.750.000$$

Pero se ha tomado una posición Long en un FRA con $i_{FRA} = 6,75\%$ por lo cual se tiene lo siguiente

$$(i_{270} - i_{FRA}) \cdot VN = (8,25\% - 6,75\%) \cdot \$50,000,000 = \$750.000$$

Se tiene el siguiente flujo de pagos

$$= -\$54.750.000 + \$750.000 = -\$54.000.000$$

Calculamos el costo financiero incurrido

$$\left(\frac{54.000.000}{50.000.000} - 1 \right) \cdot 100 = 8\%$$

Como puede observarse ha quedado demostrado que la tasa final pagada es del 8%, también se lo puede mucho más fácil determinado que la tasa variable que paga el prestamos es igual a

$$LIBOR + 125 \text{ bp}$$

Como se ha tomado una posición Long en un FRA con una $i_{FRA} = 6,75\%$ se ha fijado la tasa variable por lo cual se tiene que

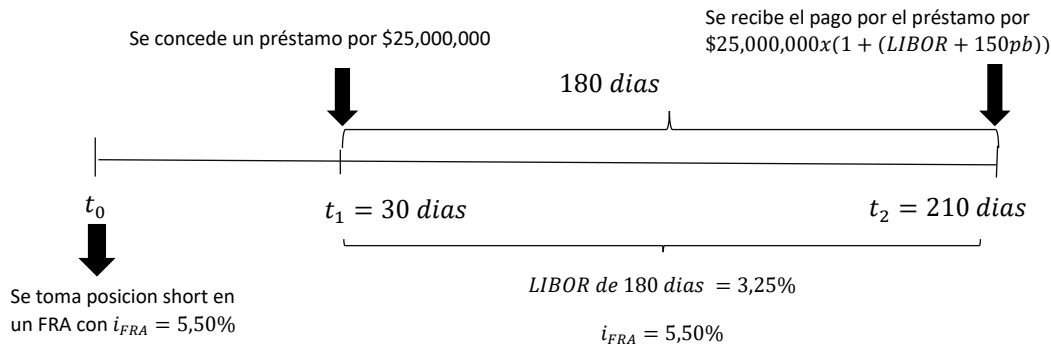
$$6,75\% + 1,25\% = 8\%$$

Ejercicio 7

Una entidad bancaria ha acordado brindar un préstamo por \$25.000.000 a una entidad corporativa dentro de 30 días. El préstamo tendrá una vida de 270 días y devengará intereses a una tasa variable igual a la LIBOR más 150 bp. La entidad bancaria está expuesta a riesgo de tasas, ya que las mismas podrían bajar significativamente bajando el ingreso financiero del préstamo. La entidad bancaria busca realizar una cobertura que elimine el riesgo de tasa, tal

que, se fije la tasa a pagar por el préstamo, por lo cual, ha decidido tomar una posición short en un FRA con una tasa asociada de 5.50%. Determinar la tasa efectiva del préstamo si dentro de 30 días la tasa LIBOR a 180 días es 3,25%.

Respuesta



En el momento $t_1 = 30 \text{ días}$ se concede un préstamo de \$25,000,000, también en este momento se conoce la tasa LIBOR la cual es igual al 3,25%

En el momento $t_2 = 210 \text{ días}$ se recibe el pago por el préstamo

$$\$25,000,000 \cdot (1 + 3,25\% + 1,50\%) = \$25,000,000 \cdot (1 + 4,75\%) = \$26.187.500$$

Pero se ha tomado una posición Long en un FRA con $i_{FRA} = 5,50\%$ por lo cual se tiene lo siguiente

$$(i_{FRA} - i_{180}) \cdot VN = (5,50\% - 3,25\%) \cdot \$25,000,000 = \$562.500$$

Se tiene el siguiente flujo de pagos

$$= \$26.187.500 + \$562.500 = \$26.750.000$$

Calculamos el costo financiero incurrido

$$\left(\frac{\$26.750.000}{\$25.000.000} - 1 \right) \cdot 100 = 7\%$$

Como puede observarse la tasa final es del 7%, también se lo puede mucho más fácil determinado que la tasa variable que paga el prestamos es igual a

$$LIBOR + 150 \text{ bp}$$

Como se ha tomado una posición short en un FRA con una $i_{FRA} = 5,50\%$ se ha fijado la tasa variable por lo cual se tiene que

$$5,50\% + 1,50\% = 7\%$$

Ejercicio 8

- a) Bajo el modelo CAPM se cuenta con los siguientes datos. Complete la tabla. Las tasas son TNA, capitalización trimestral.

Activo	Retorno	Beta
A		1
B	8%	0

C	13%	
D	17%	0,75

- b) Usando los datos de la tabla, calcule el valor del contrato que se describe a continuación. Contratos de futuro con vencimiento a tres meses sobre el activo A (índice de mercado). El valor del índice hoy es de 120 y cada contrato paga 250 veces el valor del índice. Calcule el valor de cada contrato.
- c) Suponga que tiene una cartera, de valor \$100,000, compuesta en partes iguales por los activos C y D. Si quisiera eliminar el riesgo de mercado para los próximos dos meses utilizando los contratos planteados en el punto anterior, ¿en cuántos contratos debería operar?
- d) Explique cómo funciona la cobertura si el valor del índice de mercado luego de dos meses es 100. (Nota: en ningún caso hay pago por dividendos). El valor del contrato de futuro es igual a su valor teórico y no hubo modificaciones en la tasa libre de riesgo.

Respuesta

Parte A

El modelo CAPM se resume en la siguiente ecuación

$$R_i = R_F + \beta_i * (R_m - R_F)$$

En primer lugar, es necesario determinar la tasa libre de riesgo R_F por lo que si observamos el activo B simplemente reemplazamos

$$R_B = R_F + \beta_B * (R_m - R_F)$$

Donde $R_B = 8\%$ y $\beta_B = 0$ luego

$$8\% = R_F + 0 * (R_m - R_F) \rightarrow R_F = 8\%$$

En segundo lugar, hay que determinar el retorno del índice de mercado R_m para lo cual utilizamos el activo D

$$R_D = R_F + \beta_D * (R_m - R_F)$$

Donde $R_D = 17\%$, $R_F = 8\%$ y $\beta_D = 0,75$ luego

$$17\% = 8\% + 0,75 * (R_m - 8\%)$$

$$R_m = \frac{17\% - 8\%}{0,75} + 8\% \rightarrow R_m = 20\%$$

En tercer lugar, es necesario completar los espacios en blanco de la tabla. En el activo A ocurre lo siguiente

$$R_A = R_F + \beta_A * (R_m - R_F)$$

Donde $\beta_A = 1$ luego

$$R_A = R_F + 1 * (R_m - R_F)$$

$$R_A = R_F + R_m - R_F \rightarrow R_A = R_m$$

Luego se trata del índice de mercado

$$R_A = 20\%$$

Luego para el activo C

$$R_C = R_F + \beta_C * (R_m - R_F)$$

Donde $R_C = 13\%$, $R_F = 8\%$ y $R_m = 20\%$ luego

$$13\% = 8\% + \beta_C \cdot (20\% - 8\%)$$

$$\beta_C = \frac{13\% - 8\%}{20\% - 8\%} \rightarrow \beta_C = 0,41666666\%$$

La tabla finalmente quedaría de la siguiente manera

Activo	Retorno	Beta	Tipo de activo
A	20%	1	Índice de mercado
B	8%	0	Tasa libre de riesgo
C	13%	0,42	Activo
D	17%	0,75	Activo

Parte B

Si tienen los siguientes datos

$$I_0 = 120 \text{ Multiplicador} = 250 \text{ veces el valor del índice y supuesto } q = 0$$

Luego

$$F_0 = I_0 \cdot \left(1 + R_F \cdot \frac{90}{360}\right)$$

$$F_0 = 120 \cdot \left(1 + 8\% \cdot \frac{90}{360}\right) = 122,4$$

Si se considera el multiplicador

$$F_0 = 250 \cdot 122,4 = \$30.600$$

Parte C

Debe tomar una posición short en el futuro sobre índice para realizar una disminución del efecto sobre los rendimientos del portafolio ante una caída del mercado accionario medido a través del índice bursátil.

$$N_F = \frac{(\beta^* - \beta_p)}{\beta_{fut}} \cdot \frac{\pi_0}{F_0}$$

Donde $\beta^* = 0$, $\pi_0 = \$100.000$ y $F_0 = \$30.600$. Por lo cual debemos obtener los valores de β_{fut} y β_p

$$\beta_p = \beta_C \cdot X_C + \beta_D \cdot X_D \text{ donde } X_C + X_D = 1 \text{ y } X_C = X_D = 0,50$$

Reemplazando los valores

$$\beta_p = 0,42 \cdot 0,5 + 0,75 \cdot 0,5 \rightarrow \beta_p = 0,585$$

Suponemos que el futuro sobre el índice se comporta de la siguiente manera

$$\Delta R_{fut} \cong \Delta R_m$$

Si consideramos una relación más realista en donde la correlación no es perfecta ni lineal por lo tanto se tiene la siguiente relación

$$\Delta R_{fut} = \beta_{fut} \cdot \Delta R_m$$

En el caso supuesto donde $\rho_{\Delta M, \Delta F} = 1$ luego

$$\beta_{fut} = 1$$

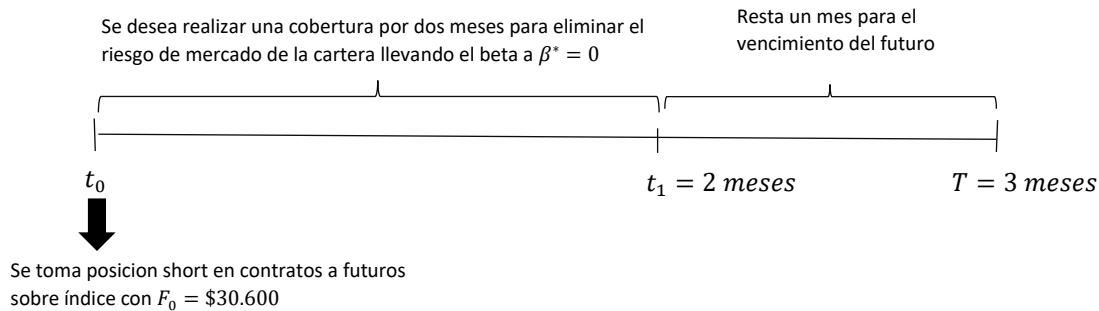
Donde

$$\beta^* = 0 \quad \beta_{fut} = 1 \quad \beta_p = 0,585 \quad F_0 = \$30.600 \quad \pi_0 = \$100.000$$

$$N_F = \frac{(0 - 0,585)}{1} * \frac{\$100.000}{\$30.600} = -1,91176$$

Se deben tomar una posición short en 1,91176 contratos a futuros sobre índices.

Parte D



Valor del contrato futuro en dos meses

$$F_1 = I_1 \cdot \left(1 + R_F \cdot \frac{90}{360}\right)$$

$$F_1 = 100 \cdot \left(1 + 8\% \cdot \frac{90}{360}\right)^{\frac{30}{90}} = 100,66$$

$$F_1 = 250 \cdot 100,66 = \$25.165,57$$

Cerrando posición en el futuro tomando la posición contraria.

$$(F_1 - F_0) \cdot (-1,91176)$$

$$(\$25.165,57 - \$30.600) \cdot (-1,91176) = \$10.389,3259$$

Ahora vamos a intentar estimar la variación de la cartera en el periodo

$$R_p = R_F + \beta_p \cdot (R_m - R_F)$$

Debemos obtener las tasas para dos meses, luego

$$R_m = \left(\frac{100}{120} - 1\right) \cdot 100 = -16,67\%$$

$$R_F = \left(\left(1 + 8\% \cdot \frac{90}{360}\right)^{\frac{60}{90}} - 1\right) = 1,33\%$$

$$R_p = 1,33\% + 0,585 \cdot (-16,67\% - 1,33\%) \rightarrow R_p = -9,20$$

Por lo cual se tiene lo siguiente

$$\pi_0 \cdot (1 + R_p) = \$100.000 \cdot (1 - 9,20) = \$90.800$$

La cartera con posición long en activos y short en futuros tiene el siguiente valor

$$\pi_1 = \$90.800 + \$10.389,33 = \$101.189,33$$

Obtenemos la rentabilidad del periodo

$$\left(\frac{\$101.189,33}{\$100.000} - 1 \right) \cdot 100 = 1,18933\%$$

La caída del valor de la cartera fue más que contrarrestado por el futuro.

Ejercicio 9

Usted tiene portafolio compuesto con los activos de la tabla.

Activo	Cantidad	Precio unitario	Beta
A	50	\$150	2
B	30	\$130	1,5
C	20	\$120	0,8125

a) Calcule el valor de la cartera y su beta.

b) Dada la inestabilidad económica que afecta al país, se desea reducir el riesgo por los próximos 3 meses. El valor del índice de mercado hoy es 150, y en el mercado se operan contratos de futuro sobre el índice con vencimiento en 4 meses (cada contrato paga 10 veces el índice). El precio forward es 154 y la tasa libre de riesgo efectiva anual es 8%. ¿Qué posición debe tomar en futuros si desea eliminar el riesgo de su cartera? (Indique cantidad de contratos, y especifique si debe comprar o vender. Suponga que se pueden operar cantidades fraccionarias de contrato).

c) ¿Qué posición debe tomar en futuros si desea que el riesgo de su cartera sea similar al riesgo del índice de mercado? (Indique cantidad de contratos, y especifique si debe comprar o vender. Suponga que se pueden operar cantidades fraccionarias de contrato).

d) Usando la cobertura establecida en b), muestre que si el valor del índice se reduce a la mitad la cobertura permite mantener el valor de la cartera. El precio forward de los contratos con vencimiento en un mes es un 0.64% mayores que el valor del índice.

Respuestas

Parte A

En primer lugar, se debe calcular el valor de la cartera π_0

$$\pi_0 = S_A \cdot x_A + S_B \cdot x_B + S_C \cdot x_C$$

Luego

$$\pi_0 = 150 \cdot 50 + 130 \cdot 30 + 120 \cdot 20 = \$13.800$$

En segundo lugar, se debe calcular el beta de la cartera

$$\beta_p = \beta_A \cdot X_A + \beta_B \cdot X_B + \beta_C \cdot X_C \quad \text{donde } X_A + X_B + X_C = 1 \text{ y } X_A = 0,50; X_B = 0,30 \text{ y } X_C = 0,20$$

$$\beta_p = 2 \cdot 0,50 + 1,5 \cdot 0,30 + 0,8125 \cdot 0,20 \rightarrow \beta_p = 1,6125$$

Parte B

Debe tomar una posición short en el futuro sobre índice para realizar una disminución del efecto sobre los rendimientos del portafolio ante una caída del mercado accionario medido a través del índice bursátil.

$$N_F = \frac{(\beta^* - \beta_p)}{\beta_{fut}} * \frac{\pi_0}{F_0}$$

Donde $\beta^* = 0$, $\pi_0 = \$13.800$ y $F_0 = \$1.540$ $\beta_p = 1,6125$. Por lo cual debemos obtener los valores de β_{fut}

Suponemos que el futuro sobre el índice se comporta de la siguiente manera

$$\Delta R_{fut} \cong \Delta R_m$$

Si consideramos una relación más realista en donde la correlación no es perfecta ni lineal por lo tanto se tiene la siguiente relación

$$\Delta R_{fut} = \beta_{fut} * \Delta R_m$$

En el caso supuesto donde $\rho_{\Delta M, \Delta F} = 1$ luego

$$\beta_{fut} = 1$$

Donde

$$\beta^* = 0 \quad \beta_{fut} = 1 \quad \beta_p = 1,6125 \quad F_0 = \$1.540 \quad \pi_0 = \$13.800$$

$$N_F = \frac{(0 - 1,6125)}{1} * \frac{\$13.800}{\$1.540} = -14,44967532$$

Se deben tomar una posición short en 14,44967532 contratos a futuros sobre índices.

Parte C

Debe tomar una posición short en el futuro sobre índice para realizar una disminución del efecto sobre los rendimientos del portafolio ante una caída del mercado accionario medido a través del índice bursátil y tener un riesgo similar al de mercado.

$$N_F = \frac{(\beta^* - \beta_p)}{\beta_{fut}} * \frac{\pi_0}{F_0}$$

Donde $\beta^* = 1$, $\pi_0 = \$13.800$ y $F_0 = \$1.540$ $\beta_p = 1,6125$. Por lo cual debemos obtener los valores de β_{fut}

Suponemos que el futuro sobre el índice se comporta de la siguiente manera

$$\Delta R_{fut} \cong \Delta R_m$$

Si consideramos una relación más realista en donde la correlación no es perfecta ni lineal por lo tanto se tiene la siguiente relación

$$\Delta R_{fut} = \beta_{fut} * \Delta R_m$$

En el caso supuesto donde $\rho_{\Delta M, \Delta F} = 1$ luego

$$\beta_{fut} = 1$$

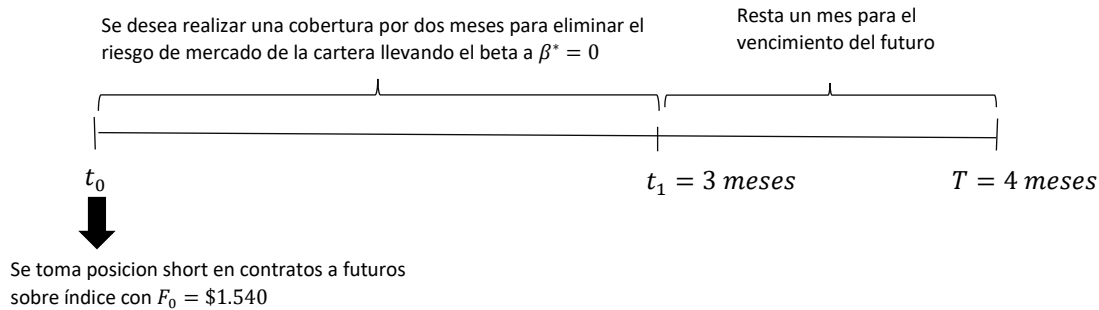
Donde

$$\beta^* = 1 \quad \beta_{fut} = 1 \quad \beta_p = 1,6125 \quad F_0 = \$1.540 \quad \pi_0 = \$13.800$$

$$N_F = \frac{(1 - 1,6125)}{1} * \frac{\$13.800}{\$1.540} = -5,488636364$$

Se deben tomar una posición short en 5,488636364 contratos a futuros sobre índices.

Parte D



Valor del contrato futuro en tres meses

$$F_1 = I_1 \cdot (1 + 0,64\%)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot (1 + 0,64\%)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot (1 + 0,64\%) = \$75,48$$

Luego el valor del índice es igual a

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{1}{2} \cdot 150 = 75$$

Cerrando posición en el futuro tomando la posición contraria.

$$(F_1 - F_0) \cdot (-14,44967532)$$

$$(\$754,8 - \$1.540) \cdot (-14,44967532) = \$11.345,88506$$

Ahora vamos a intentar estimar la variación de la cartera en el periodo

$$R_p = R_F + \beta_p \cdot (R_m - R_F)$$

Debemos obtener las tasas para dos meses, luego

$$R_m = \left(\frac{75}{150} - 1 \right) \cdot 100 = -50\%$$

$$R_F = \left((1 + 8\%)^{\frac{90}{360}} - 1 \right) = 1,943\%$$

$$R_p = 1,943\% + 1,6125 \cdot (-50\% - 1,943\%) \rightarrow R_p = -81,815$$

Por lo cual se tiene lo siguiente

$$\pi_0 \cdot (1 + R_p) = \$13.800 \cdot (1 - 81,815) = \$2.509,52$$

La cartera con posición long en activos y short en futuros tiene el siguiente valor

$$\pi_1 = \$2.509,52 + \$11.345,88506 = \$13.855,4$$

Obtenemos la rentabilidad del periodo

$$\left(\frac{13.855,4}{\$13.800} - 1 \right) * 100 = 0,4015\%$$

La caída del valor de la cartera fue más que contrarrestado por el futuro conservando el valor con una buena aproximación.

Ejercicio 10

Una administradora de un fondo tiene una portfolio con un valor de \$50.000.000 con un beta de 0,87. El administrador esta preocupado acerca de la performance del mercado en los próximos dos meses y planea utilizar un contrato de futuros sobre el S&P 500 con vencimiento en 3 meses para realizar una estrategia de cobertura del riesgo de mercado. El nivel actual del índice es \$1.250, el contrato paga 250 veces el valor del índice, la tasa libre de riesgo es 6% anual y el dividend yield sobre el índice es 3% anual. El actual precio del futuro es de 1.259.

- ¿Qué posición debe tomar la administradora del fondo para los próximos dos meses para eliminar toda la exposición al riesgo de mercado?
- Calcular el efecto de la estrategia sobre los retornos del portfolio del fondo si el nivel del índice del mercado en dos meses es 1.000, 1.100, 1.200, 1.300 y 1.400. Asumir para los cálculos que el precio del futuro para un mes es un 0,25% mayor que el índice para este periodo.

Respuestas

Parte A

Debe tomar una posición short en el futuro sobre índice para realizar una disminución del efecto sobre los rendimientos del portfolio ante una caída del mercado accionario medido a través del índice bursátil y tener un riesgo similar al de mercado.

$$N_F = \frac{(\beta^* - \beta_p)}{\beta_{fut}} * \frac{\pi_0}{F_0}$$

Por lo cual debemos obtener los valores de β_{fut} y F_0

Suponemos que el futuro sobre el índice se comporta de la siguiente manera

$$\Delta R_{fut} \cong \Delta R_m$$

Si consideramos una relación más realista en donde la correlación no es perfecta ni lineal por lo tanto se tiene la siguiente relación

$$\Delta R_{fut} = \beta_{fut} * \Delta R_m$$

En el caso supuesto donde $\rho_{\Delta M, \Delta F} = 1$ luego

$$\beta_{fut} = 1$$

Ahora debemos estimar el valor del futuro

$$F_0 = 250 * 1.259 = 314.750$$

Donde

$$\beta^* = 0 \quad \beta_{fut} = 1 \quad \beta_p = 0,87 \quad F_0 = \$314.750 \quad \pi_0 = \$50.000.000$$

$$N_F = \frac{(0 - 0,87)}{1} * \frac{\$50.000.000}{\$314.750} = -138,20$$

Se deben tomar una posición short en 138,20 contratos a futuros sobre índices.

Parte B

I_0	I_1	R_{cap}	$R_{div.}$	$R_m = R_{cap.} + R_{div.}$	$F_1 = I_0 * (1 + 0,25\%)$
\$1.250	\$1.000	$\left(\frac{\$1.000}{\$1.250} - 1\right) * 100 = -20\%$	$\frac{3\%}{12} * 2 = 0,5\%$	-19,5%	\$1.002,5
\$1.250	\$1.100	$\left(\frac{\$1.100}{\$1.250} - 1\right) * 100 = -12\%$	$\frac{3\%}{12} * 2 = 0,5\%$	-11,5%	\$1.102,75
\$1.250	\$1.200	$\left(\frac{\$1.200}{\$1.250} - 1\right) * 100 = -4\%$	$\frac{3\%}{12} * 2 = 0,5\%$	-3,5%	\$1.203
\$1.250	\$1.300	$\left(\frac{\$1.300}{\$1.250} - 1\right) * 100 = 4\%$	$\frac{3\%}{12} * 2 = 0,5\%$	4,5%	\$1.303,25
\$1.250	\$1.400	$\left(\frac{\$1.400}{\$1.250} - 1\right) * 100 = 12\%$	$\frac{3\%}{12} * 2 = 0,5\%$	12,5%	\$1.403,5

$R_p = R_F + \beta_p(R_m - R_F)$	R_m	R_F	β_p
-16,835%	-19,5%	$\frac{6\%}{12} * 2 = 1\%$	0,87
-9,875%	-11,5%	$\frac{6\%}{12} * 2 = 1\%$	0,87
-2,915%	-3,5%	$\frac{6\%}{12} * 2 = 1\%$	0,87
4,045%	4,5%	$\frac{6\%}{12} * 2 = 1\%$	0,87
11,005%	12,5%	$\frac{6\%}{12} * 2 = 1\%$	0,87

π_0	R_p	$\pi_0 * (1 + R_p)$
\$50.000.000	-16,835%	\$41.582.500
\$50.000.000	-9,875%	\$45.062.500
\$50.000.000	-2,915%	\$48.542.500
\$50.000.000	4,045%	\$52.022.500
\$50.000.000	11,005%	\$55.502.500

F_1	$F_1 * 250$	F_0	$(F_1 - F_0) * N_F$	Payoff
\$1.002,5	\$250.625	\$314.750	$(\$250.625 - \$314.750) * (-138,20)$	\$8.862.075
\$1.102,75	\$275.687,5	\$314.750	$(\$275.687,5 - \$314.750) * (-138,20)$	\$5.398.437,5
\$1.203	\$300.750	\$314.750	$(\$300.750 - \$314.750) * (-138,20)$	\$1.934.800
\$1.303,25	\$325.812,5	\$314.750	$(\$325.812,5 - \$314.750) * (-138,20)$	-\$1.528.837,5
\$1.403,5	\$350.875	\$314.750	$(\$350.875 - \$314.750) * (-138,20)$	-\$4.992.475

$\pi_0 * (1 + R_p)$	Payoff futuro	π_1	π_0	R_{π_1}	R_F
\$41.582.500	\$8.862.075	\$50.444.575	\$50.000.000	$\left(\frac{\$50.444.575}{\$50.000.000} - 1\right) * 100 = 0,88915\%$	1%
\$45.062.500	\$5.398.437,5	\$50.460.937,5	\$50.000.000	$\left(\frac{\$50.460.937,5}{\$50.000.000} - 1\right) * 100 = 0,921875\%$	1%
\$48.542.500	\$1.934.800	\$50.477.300	\$50.000.000	$\left(\frac{\$50.477.300}{\$50.000.000} - 1\right) * 100 = 0,9546\%$	1%
\$52.022.500	-\$1.528.837,5	\$50.493.662,5	\$50.000.000	$\left(\frac{\$50.493.662,5}{\$50.000.000} - 1\right) * 100 = 0,987325\%$	1%
\$55.502.500	-\$4.992.475	\$50.510.025	\$50.000.000	$\left(\frac{\$50.510.025}{\$50.000.000} - 1\right) * 100 = 1,02005\%$	1%

Como puede observarse del ultimo cuadro la cartera con posicion long y posicion short tiene una rentabilidad cercana a la tasa libre de riesgo. Esto se debe a los siguiente

$$R_p = R_F + \beta^* \cdot (R_m - R_F)$$

A través de la estrategia de cobertura se logra que $\beta^* = 0$ luego

$$R_p = R_F$$

Ejercicio 11

Siendo 16 de julio una firma tiene un portfolio de acciones de un valor de \$100.000.000 con un beta de 1,2. La firma está interesada en utilizar un contrato a futuro sobre el S&P 500 con vencimiento en diciembre para cambiar el beta del portfolio a 0,50 durante el periodo que va desde el 16 de julio al 16 de noviembre. El índice tiene un nivel actualmente de 1.000 y el contrato paga 250 veces el índice.

- ¿Qué posición debería tomar la firma?
- Suponga que la firma ha cambiado de idea y decide que debe incrementar el beta de 1,2 a 1,5. ¿Qué posición debería tomar la firma?

Respuestas

Parte A

Debe tomar una posición short en el futuro sobre índice para realizar una disminución del efecto sobre los rendimientos del portfolio ante una caída del mercado accionario medido a través del índice bursátil

$$N_F = \frac{(\beta^* - \beta_p)}{\beta_{fut}} * \frac{\pi_0}{F_0}$$

Por lo cual debemos obtener los valores de β_{fut} y F_0

Suponemos que el futuro sobre el índice se comporta de la siguiente manera

$$\Delta R_{fut} \cong \Delta R_m$$

Si consideramos una relación más realista en donde la correlación no es perfecta ni lineal por lo tanto se tiene la siguiente relación

$$\Delta R_{fut} = \beta_{fut} * \Delta R_m$$

En el caso supuesto donde $\rho_{\Delta M, \Delta F} = 1$ luego

$$\beta_{fut} = 1$$

Ahora debemos estimar el valor del futuro

$$F_0 = 250 * 1.000 = \$250.000$$

Donde

$$\beta^* = 0,50 \quad \beta_{fut} = 1 \quad \beta_p = 1,20 \quad F_0 = \$250.000 \quad \pi_0 = \$100.000.000$$

$$N_F = \frac{(0,50 - 1,20)}{1} * \frac{\$100.000.000}{\$250.000} = -280$$

Se deben tomar una posición short en 280 contratos a futuros sobre índices.

Parte B

$$\beta^* = 1,50 \quad \beta_{fut} = 1 \quad \beta_p = 1,20 \quad F_0 = \$250.000 \quad \pi_0 = \$100.000.000$$

$$N_F = \frac{(1,50 - 1,20)}{1} * \frac{\$100.000.000}{\$250.000} = 120$$

Se deben tomar una posición long en 120 contratos a futuros sobre índices.

Ejercicio 12

Siendo 1 de julio un inversor tiene un portfolio compuesta por 50.000 de cierta acción con un precio de mercado de \$30. El inversor está interesado en realizar una estrategia de cobertura contra movimientos del mercado para el próximo mes y decide utilizar un contrato de futuro sobre el S&P 500 con vencimiento en septiembre. El índice tiene un nivel actualmente de 1.500 y el contrato paga 50 veces el índice. El beta de la acción es 1,3. ¿Qué estrategia debería seguir el inversor?

Respuesta

$$\beta^* = 0 \quad \beta_{fut} = 1 \quad \beta_p = 1,30 \quad F_0 = \$75.000 \quad \pi_0 = \$1.500.000$$

$$N_F = \frac{(0 - 1,30)}{1} * \frac{\$1.500.000}{\$75.000} = -26$$

El inversor debe tomar una posición short en 26 contratos para realizar la cobertura del riesgo.

Ejercicio 13

Suponga que el desvío standard de cambios trimestrales en los precios de un commodity es \$0,65, el desvío standard de cambios trimestrales en los precios del futuro sobre el commodity es \$0,81 y el coeficiente de correlación entre los dos cambios es 0,80. ¿Cuál es el ratio óptimo de cobertura para un contrato de tres meses? ¿Qué significado e implicancias tiene esto?

Respuesta

$$H^* = \frac{N_F}{N_A} = \rho_{\Delta S, \Delta F} * \left(\frac{\sigma_{\Delta S}}{\sigma_{\Delta F}} \right)$$

$$H^* = 0,80 * \left(\frac{\$0,65}{\$0,81} \right) = \frac{52}{81}$$

Si se realiza una cobertura en donde se cumple la relación óptima $\frac{N_F}{N_A}$ luego se ha logrado reducir la varianza del ingreso.

Ejercicio 14

Una firma tiene un portfolio con una valor de \$20.000.000 con un beta de 1.2. La firma estaría interesada en utilizar futuros sobre el S&P 500 para realizar una estrategia de cobertura del riesgo de mercado. El valor actual del índice es de 1.080 y cada contrato paga 250 veces el índice. ¿Cuál es la estrategia de cobertura que minimiza el riesgo de mercado? ¿Qué debería hacer la firma si busca reducir el beta del portfolio a 0,60?

Respuesta

$$\beta^* = 0 \quad \beta_{fut} = 1 \quad \beta_p = 1,20 \quad F_0 = \$270.000 \quad \pi_0 = \$20.000.000$$

$$N_F = \frac{(0 - 1,20)}{1} * \frac{\$20.000.000}{\$270.000} = -88,89$$

Se deben tomar una posición short en 88,89 contratos a futuros sobre índices.

$$\beta^* = 0,60 \quad \beta_{fut} = 1 \quad \beta_p = 1,20 \quad F_0 = \$270.000 \quad \pi_0 = \$20.000.000$$

$$N_F = \frac{(0,60 - 1,20)}{1} * \frac{\$20.000.000}{\$270.000} = -44,44$$

Se deben tomar una posición short en 44,44 contratos a futuros sobre índices.

Ejercicio 15

El desvío standard de cambios mensuales en el precio spot de ganado vacuno (céntimo por libra) es 1,2. El desvío standard de cambios mensuales del precio de futuros sobre ganado vacuno del contrato más cercano es 1,4. La correlación entre los cambios del precio del futuro y los cambios del precio spot es 0,7. El 15 de octubre un productor de carne se ha comprometido a comprar 200.000 libras de ganado vacuno para el 15 de noviembre. El productor tiene interés en realizar una estrategia de cobertura utilizando un contrato de futuros sobre ganado con vencimiento en diciembre. Cada contrato tiene un delivery de 40.000 libras de ganado. ¿Qué estrategia debería seguir el productor de carne para realizar la cobertura?

Respuesta

$$H^* = \frac{N_F}{N_A} = \rho_{\Delta S, \Delta F} * \left(\frac{\sigma_{\Delta S}}{\sigma_{\Delta F}} \right)$$

$$H^* = 0,70 * \left(\frac{1,2}{1,4} \right) = \frac{3}{5}$$

$$N_F = \frac{3}{5} * N_A$$

$$N_F = \frac{3}{5} * \frac{200.000}{40.000} = 3$$

El productor de carne debe tomar una posición long en 3 contratos de futuros con vencimiento en diciembre y cerrando su posición el 15 de noviembre.

Parte II: Práctica

Práctica: Ejercitación - Enunciados

Ejercicio 1

- a) Explique la operatoria de un Total Return Swap y grafique.
- b) ¿Qué utilidad tiene la Duration(modificada) en la gestión de carteras de instrumentos de renta fija?
- c) ¿Cómo se ve afectada la Duration de un bono que paga tasa fija si aumenta el nivel de tasas de interés?
- d) Explique las principales diferencias que hay entre un contrato OTC y uno negociado en un mercado institucionalizado. Las "Operaciones Compensadas a Término" negociadas en el MAE (Mercado Abierto Electrónico), ¿en qué categoría entrarían y por qué?
- e) Enuncie la Paridad Call-Put para opciones europeas, y explique detalladamente cómo podría realizarse un arbitraje en caso de que la paridad no se mantuviera.
- f) Explique conceptualmente, y demuestre matemáticamente, la relación que existe entre el precio de los bonos y las tasas de interés de mercado.
- g) ¿Por qué los inversores exigen una tasa de interés mayor en bonos con calificación baja?
- h) Explique qué diferencias hay entre la tasa de cupón, la rentabilidad actual y la rentabilidad al vencimiento de un bono.
- i) ¿Cuál es la TIR (expresada como TNA con capitalización semestral) de un bono que paga semestralmente una tasa del 10% anual, cotiza a la par y le restan 5 años para el vencimiento?
- j) ¿Cuál es la duration de un bono cupón cero que vence en 10 años?
- k) Explique la operatoria de un CDS la asociada a un Cat bond. Grafique ambos casos.
- l) ¿Cuál es la diferencia entre el precio forward y el valor de un contrato forward?
- m) Defina el "riesgo de prepago" en los bonos callable. La cláusula "call", ¿beneficia al tenedor del bono? ¿Por qué?
- n) Muestre que, si el precio futuro de un commodity es mayor que el precio spot durante el periodo de entrega, entonces hay una oportunidad de arbitraje. ¿Existe tal posibilidad si el precio futuro fuera menor que el spot? Explique.
- o) ¿Qué es un convertible bond?
- p) Demuestre que la paridad Call-Put para opciones sobre acciones que no pagan dividendos es una relación que debe mantenerse para eliminar las oportunidades de arbitraje.
- q) ¿Por qué la pérdida esperada de un swap de tasa de interés es menor que la de un préstamo con el mismo valor nominal?
- r) Los bancos en general toman depósitos a corto plazo y prestan a largo plazo. ¿Cómo podría utilizarse un swap para cubrir el riesgo de tasa de interés? (explique claramente qué posición tomaría el banco y diagrame los flujos de efectivo originales y con cobertura)

Ejercicio 2

- a) Sea c es el precio de un Call Europeo sobre Futuro con strike K y vencimiento en T . Sea p el precio de un Put Europeo sobre Futuro con igual strike y vencimiento. Siendo F_0 , el precio futuro, demuestre que, en ausencia de oportunidades de arbitraje, la siguiente relación debe mantenerse: $p + F_0 e^{-rT} = c + K e^{-rT}$
- b) Sea c es el precio de un Call Europeo con strike K y vencimiento en T . Sea p el precio de un Put Europeo con igual strike y vencimiento. Siendo S_0 , el precio del subyacente demuestre que, en ausencia de oportunidades de arbitraje, la siguiente relación debe mantenerse: $p + S_0 = c + K e^{-rT}$

Ejercicio 3

a) Considere un bono con valor nominal \$15.000 que paga cupones de \$600 semestrales. El último cupón fue pagado hace 2 meses y el vencimiento del bono es en 22 meses. La estructura de tasas spot (anuales compuestas semestralmente) está dada por el siguiente cuadro.

t (meses)	2	8	14	20
r (t)	7%	7,50%	8%	8,50%

Observación: tasas de composición continua.

1. Calcule la tasa de cupón y determine el precio del bono.
2. Calcule la duración y con la misma estime el precio del bono si la curva spot se desplaza hacia abajo 30 puntos básicos.
3. ¿Cuál es el precio forward del bono a 10 meses si la tasa spot libre de riesgo para dicho plazo es 7.7% (compuesta de manera continua)?

b) Mediante un IRS, la compañía X acordó recibir la LIBOR a seis meses a cambio de una tasa del 5% anual sobre un notional de 5 millones, realizándose los pagos cada 6 meses. Al swap le queda una vida de 20 meses y actualmente la curva LIBOR spot es constante en 5.5% anual para todos los vencimientos. Además, dos meses atrás la tasa LIBOR a seis meses fue de 6.5% anual. Determine el valor del Swap para la empresa X.

Ejercicio 4

Considere la siguiente curva LIBOR spot (las tasas son con composición continua):

Año	Libor Spot continua
1	10%
2	10,50%
3	11%
4	11,50%
5	12%

Observación: en caso de ser necesario, interpole linealmente para obtener las tasas spot que no están en la tabla.

a) Calcule el valor de un swap de tasa de interés para quien paga la tasa fija, cuyas condiciones son: tasa fija: 10% anual, pagos semestrales, notional: \$10.000.000, vencimiento: 2 años.

b) Dada la curva Spot, realice el pricing de un swap (determine la tasa fija o swap rate) con vencimiento en 4 años.

- c) Calcule el valor de un swap de tasa de interés para quien recibe la tasa fija, cuyas condiciones son: la tasa fija es del 8% anual, los pagos son anuales, el notional es \$1.000.000 y el vencimiento opera en 5 años.
- d) Dada la curva Spot, realice el pricing de un swap (determine la tasa fija o swap rate) con vencimiento en 5 años.

Ejercicio 5

Considere un call europeo con un vencimiento a 10 meses sobre un bono que tiene un valor nominal de \$100 y que tiene una vida de 9 años y 9 meses. El precio cash del bono hoy es \$95, la tasa libre de riesgo a 10 meses es 9% anual (compuesta continua), la volatilidad del precio forward del bono en 10 meses es 8% anual. El bono paga cupones de \$4 en tres meses y en nueve meses. La tasa de tres meses es 8% y la tasa de 9 meses es 8.75% anual (compuesta continua).

- a) ¿Cuál es el valor presente de los pagos de cupón?
- b) ¿Cuál es el precio forward del bono?
- c) ¿Cuál es el precio del call europeo con strike \$100?

Ejercicio 6

- a) Calcule el valor en ausencia de arbitraje de un Call con strike "K", vencimiento en "T1" y pagadero en "T2" para un momento genérico " $t < T1$ " y luego para un momento genérico " $t > T1$ ".
- b) Calcule la estrategia que replica su payoff para un momento genérico " $t < T1$ " y luego para un momento genérico " $t > T1$ ".

Ejercicio 7

Un bono a cinco años con una yield to maturity de 11% (compuesta de manera continua) paga un cupón de 8% al final de cada año.

- a) ¿Cuál es el precio del Bono?
- b) ¿Cuál es la duration del Bono?
- c) Utilice la duration para calcular el efecto en el precio del bono de un descenso del 0,2% en su yield.

Recalcule el precio del bono utilizando una yield de 10,8% y verifique que el resultado es acorde a lo calculado en el punto c).

Ejercicio 8

Considere un bono con valor nominal \$1000 que paga cupones de \$40 semestrales. El último cupón fue pagado hace 2 meses y al bono le queda una vida de 22 meses. La estructura de tasas spot (anuales compuestas semestralmente) está dada por el siguiente cuadro.

t (meses)	Libor Spot continua
4	8%
10	8,50%
16	9%
22	9,50%

- a) ¿Cuál es el precio del bono?
- b) Calcule la duración y con la misma estime el precio del bono si la curva spot se desplaza hacia arriba 50 puntos básicos.
- c) Si la tasa libre de riesgo a 11 meses es 8.4% (continua) ¿Cuál es el precio de un forward sobre el bono que vence en 11 meses?

Ejercicio 9

Describa el valor final del siguiente portafolio: una posición larga en un contrato forward sobre un activo y una posición larga en un put europeo sobre el mismo activo, con igual vencimiento que el forward y con un strike igual al valor forward del activo al momento de armar el portafolio. Muestre que el put europeo tiene el mismo valor que un call europeo con igual strike y vencimiento.

Ejercicio 10

Dada la siguiente estructura de tasas:

Plazo (meses)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tasa	4%	4%	4%	4,10%	4,10%	4,10%	4,20%	4,20%	4,20%	4,30%	4,40%	4,50%

- a) Calcule el valor de un swap con frecuencia bimestral, con vencimiento en un año, con tasa pactada igual al 4,5% y con valor nominal de \$100.
- b) Calcule la tasa swap para operaciones con frecuencia bimestral y con vencimiento en 10 meses.
- c) Calcule la tasa forward para operaciones a realizar desde el mes 3 por un plazo de 4 meses.
- d) Calcule el valor de un forward para operaciones a realizar desde el mes 3 por un plazo de 4 meses con tasa pactada del 4.1%.

Ejercicio 11

En febrero de 2002 la institución en la que trabaja recibió por un canje de deuda del Gobierno Nacional 100 MM de valor nominal (en USD) del Bono Boden 2012 (ver especificaciones en tabla adjunta). Para el cierre del balance trimestral que debe presentar su entidad se le solicita que realice la valuación del título, en dólares, al 31/03/2011, teniendo en cuenta que el precio de cierre de la Bolsa de Comercio de Buenos Aires fue 407 y que el dólar comunicado por el BCRA fue 4,052.

Símbolo: RG12**Denominación:** Bonos del Gobierno Nacional en Dólares
Estadounidenses Libor 2012- 1ra. Serie**Emisor:** Gobierno Nacional**Fecha de emisión:** 03/02/2002**Fecha de vencimiento:** 03/08/2012**Monto nominal vigente en la moneda original de emisión:**
16.343.224.500,00**Moneda de emisión:** Dólares

Interés: Tasa Libor a 6 meses de plazo pagaderos por semestre vencido. La tasa será determinada a las 11:00 hs. En Londres del segundo día hábil inmediatamente anterior al inicio de c/período de interés y ajustada a un año calendario de 365 o 366 días, s/corresponda. Para el cálculo de intereses se considerará desde e incluyendo el 1er. Día de devengamiento de intereses, hasta y excluyendo el último día del período. P/determinar intereses se consideran días efecmte. Transcurridos. 1er. Vto.: 05/08/2002.

Fecha - Devengan intereses: 03/02/2002**Ejercicio 12**

a) Tres años atrás una compañía entró en un swap de tasa de interés a cinco años con el compromiso semestral de pagar una tasa fija del 7% a cambio de la tasa LIBOR. Si su contraparte entra en quiebra hoy cuando la tasa de un swap a dos años es de 6.5%, ¿estaría teniendo una pérdida económica con esta quiebra? Explicar.

b) Considere dos compañías que pueden tomar préstamos a distintas tasas en dólares y libras esterlinas. La compañía A puede endeudarse en dólares a una tasa del 8% anual y a 14% anual en libras esterlinas. La compañía B, por su parte, puede endeudarse a una tasa del 6% en dólares y del 9% en libras. El tipo de cambio vigente hoy es de 1.62. Plantee un caso en donde sea beneficioso para ambas compañías establecer un swap de moneda. Explique cómo se instrumentaría y los riesgos de la operación.

c) Considere el siguiente swap de moneda: la compañía A realizó un swap sobre 25 millones de dólares a una tasa del 3% por una tasa del 7.5% sobre 20 millones de libras esterlinas. El intercambio de fondos es semestral. Quedan 18 meses para el vencimiento del swap y el tipo de cambio es 1.3. La estructura de tasas a la fecha es flat tanto en dólares como en libras y es de 3.3% y 7.75% respectivamente (tasas continuas). Calcular el valor del swap para la compañía A.

d) Un banco o compañía financiera puede actuar como "market maker" y proponer un swap a una compañía de acuerdo con sus necesidades sin contar con un acuerdo de contraparte. ¿Cuál es el riesgo que estaría tomando esta compañía financiera? ¿Cómo podría reducirlo y/o administrarlo?

Ejercicio 13

a) La tasa de rendimiento por cupones en el próximo año de un bono es del 9%. El rendimiento al vencimiento del mismo bono es del 10%. ¿El bono está cotizando bajo o sobre la par? Explique.

b) Para el caso anterior, ¿la tasa de cupón es menor o mayor al 9%?

Ejercicio 14

Calcule el valor en ausencia de arbitraje al momento inicial de un Chooser Call que permite al tenedor conseguir al momento "T" (sin costo alguno en dicho momento "T") un Call o un Put (según X prefiera) ambos con strike "K" y vencimiento "T2" ($T < T_2$ y $K > 0$).

Ayuda: Para la resolución de este ejercicio es posible descomponer el payoff de este instrumento en una cartera de opciones y luego valorar dichas opciones separadamente.

Ejercicio 15

Calcule el valor de un "Cliquet Put" cuyo payoff viene representado por la siguiente fórmula:

$$X = \text{Max} (K - S_T, K - S_t, 0)$$

Ejercicio 16

a) Suponga que se lanza en el mercado un Lookback Call con vencimiento en "2" sobre el activo subyacente "S". Calcule el valor en ausencia de arbitraje de dicho instrumento al momento "0" y al momento "1",

b) Suponga que se lanza en el mercado un Lookback Put con vencimiento en "2" sobre el activo subyacente "S". Calcule el valor en ausencia de arbitraje de dicho instrumento al momento "0" y al momento "1".

Ejercicio 17

Dada la siguiente estructura de tasas de interés nominales anuales:

Días	30	60	90	120	150	180
Tasa	10%	11%	12%	13%	14%	15%

Calcule:

- a) Tasa Forward para colaciones desde el día 60 hasta el día 120.
- b) Tasa Forward para colaciones desde el día 50 hasta el día 130, suponiendo que el resto de la estructura temporal de tasas nominales puede calcularse a través de interpolación lineal.
- c) Valor de un Swap en ausencia de arbitraje con flujos mensuales durante los próximos 6 meses (empezando el día 30), con nominal de \$100,000 y tasa pactada del 14% nominal anual con capitalización mensual.
- d) Tasa Swap asociada al mismo instrumento.

Ejercicio 18

Calcule el valor en ausencia de arbitraje al momento inicial de un Forward Start Put, cuyo payoff es:

$$\max (S_{T_0} - S_T ; 0) \text{ siendo } T > T_0$$

Ejercicio 19

- a) La compañía X acordó pagar 10% anual y recibir la LIBOR a tres meses a cambio, sobre un nominal de 4 millones, realizándose los pagos cada 3 meses. Al swap le queda una vida de 14 meses y actualmente la tasa cambiada por LIBOR es 11% para todos los vencimientos.

Además, un mes atrás la tasa LIBOR a tres meses fue de 11.8% anual. Determine el valor del Swap. Observación: todas las tasas son compuestas trimestralmente.

- b) Las empresas A y B tienen las siguientes opciones para realizar una inversión de 5 millones de pesos:

Empresa	Tasa flotante	Tasa fija
A	Libor	8%
B	Libor	8,80%

Dadas las políticas de inversiones actuales de las compañías, A debe invertir a tasa fija, mientras que B a tasa flotante. Diseñe un swap que sea igualmente atractivo para A y para B, y que otorgue una ganancia neta al intermediario de 0.2% anual.

Ejercicio 20

- a) Mediante un IRS, la compañía X acordó recibir la LIBOR a seis meses a cambio de una tasa del 8% anual sobre un nominal de 4 millones, realizándose los pagos cada 6 meses. Al swap le queda una vida de 16 meses y actualmente la tasa cambiada por LIBOR es 10% para todos los vencimientos. Además, dos meses atrás la tasa LIBOR a seis meses fue de 10.5% anual. Determine el valor del Swap para la empresa X. Observación: todas las tasas son compuestas semestralmente.

b) Las empresas A y B requieren tomar un préstamo 10 millones de pesos, y las tasas que pueden conseguir en el mercado son las siguientes:

Empresa	Tasa flotante	Tasa fija
A	Libor + 0,3%	8%
B	Libor+0,5%	7%

Dadas las políticas de inversiones actuales de las compañías, A debe financiarse a tasa flotante, mientras que B a tasa fija. Diseñe un swap que sea igualmente atractivo para A y para B, y que otorgue una ganancia neta al intermediario de 0.4% anual.

Ejercicio 21

Considere un bono con valor nominal \$12.000 que paga cupones de \$600 semestrales. El último cupón fue pagado hace 4 meses y el vencimiento del bono es en 20 meses. La estructura de tasas spot (anuales compuestas semestralmente) está dada por el siguiente cuadro.

t (meses)	2	8	14	20
r (t)	7%	7,50%	8%	8,50%

- Calcule la tasa de cupón y determine el precio del bono.
- Calcule la duración y con la misma estime el precio del bono si la curva spot se desplaza hacia abajo 20 puntos básicos.
- ¿Cuál es el precio forward del bono a 10 meses si la tasa spot libre de riesgo para dicho plazo es 8.7% (compuesta de manera continua)?

Ejercicio 22

Suponga que el precio de un Futuros sobre bonos de tesoro de US es 101-12. ¿Cuál de los siguientes bonos es el cheapest-to-deliver?

Bond	Price	Conversion factor
X	125-05	12.131
Y	142-15	13.792
W	115-31	11.149
Z	144-02	14.026

Ejercicio 23

Hoy, 6 de octubre, usted considera un Futuro de noviembre de este año sobre Bonos del Tesoro de US, donde el cheapest-to-deliver es un bono con cupón de 13% y con un Factor de Conversión de 1,35. Se espera que la entrega en el contrato futuro se realice el último día del mes del contrato (es decir, el 30 de noviembre): Los cupones del cheapest-to-deliver se pagan el 19 de mayo y el 1° de noviembre de cada año. La curva spot es constante, siendo la tasa 12% anual con composición semestral. El precio cotizado actual del bono entregable es \$110. Determine el precio a cotizar para el contrato futuro.

Observación: los intereses devengados se computan usando la convención actual/actual. Para calcular los días entre las fechas mencionadas en el enunciado, utilice la siguiente tabla:

Fecha	Número de días desde el 1/11/07
01/05/2008	182
08/10/2008	340
01/11/2008	366
30/11/2008	395
01/05/2009	547
01/11/2009	731

Ejercicio 24

Un bono de \$100 que vence el 10 de Julio de 2009 y paga cupones semianuales al 11%. Tiene un precio hoy (5 Marzo 2008) de \$95,50 (Quoted). El pasado 10 de Enero de 2008 pagó el último cupón.

a) Explique la diferencia entre precio "Quoted" y precio "cash". y calcule el precio cash hoy (5 Marzo 2008). Calcule el precio "forward" del bono.

b) Calcule el valor hoy (5 Marzo 2008) de una opción europea de compra sobre este bono que vence el 10 de Enero de 2009 con un strike de \$100. Asuma una volatilidad del precio forward de 10%, una tasa libre de riesgo anual del 5% para el periodo de hoy al vencimiento de la opción.

Ejercicio 25

El precio de un activo actualmente es \$70, y su volatilidad es del 40%, La tasa de interés libre de riesgo es 8% (con composición continua).

a) Calcule el precio forward del activo dentro de 5 meses.

b) Determine el valor del contrato forward para el comprador, iniciado con el precio calculado en a), cuando faltan dos meses para su vencimiento, el precio del subyacente bajó a \$60 y la tasa se mantuvo en el 8%.

Ejercicio 26

Hoy, 4 de diciembre, usted considera un Futuro de marzo 2009 sobre Bonos del Tesoro de US, donde el cheapest-to-deliver (CTD) es un bono con cupón de 10% y con un Factor de Conversión de 1,25. La entrega del subyacente del contrato futuro se estima que se realizará el último día del mes del contrato (es decir, el 31/03/09). Los cupones del cheapest-to-deliver se pagan el 19 de febrero y el 10 de agosto de cada año. La curva de tasas spot es flat, siendo la tasa 3% anual con +composición semestral.

a) Calcule el precio cash del bono CTD y su precio cotizado.

b) Calcule la duration del CTD y aproxime el precio (cash) si la curva spot se desplaza 50bps hacia arriba. Recalcule el precio cash y compare.

c) Determine el precio a cotizar para el contrato futuro.

Observación: los intereses devengados se computan usando la convención actual/actual.

Ejercicio 27

Un bono que vence el 10 de Enero de 2010 paga cupones semestrales (los 10 de Enero y los 10 de Julio de cada año) al 8% anual. La curva de tasas spot es flat en 9% (compuesta continuamente).

a) Calcule el precio cash hoy (4 Diciembre 2008), y calcule el precio "forward" del bono al 5 de junio de 2009 (ambos precios por cada \$100 de valor nominal).

b) Calcule el valor hoy (4 Diciembre 2008) de una opción europea de venta sobre este bono que vence el 5 de junio de 2009 con un strike de \$100, asumiendo que la volatilidad del precio forward es 8%.

Ejercicio 28

a) El 20 de marzo de 2009 usted analiza un Futuro sobre Notas del Tesoro de US con entrega en Diciembre de 2009. El cheapest-to-deliver (CTD) tiene cupón de 4% (paga los 19 de abril y 1o de octubre de cada año) y vence el 10 de octubre de 2014. Esto genera un Factor de Conversión de 0,9171. Considerando una curva spot constante en 4% (anual con composición semestral), determine el precio cotizado del CTD y el precio a cotizar para el contrato futuro. (Se

espera que la entrega se realice al finalizar el mes del contrato, el 31 de diciembre de 2009). Observación: los intereses devengados se computan usando la convención actual/actual.

b) Considere la siguiente curva LIBOR spot (las tasas son anuales con composición trimestral):

Trimestre	1	2	3	4
Tasa	2.8%	3%	3.5%	4%

Calcule el valor de un swap de tasa de interés para quien recibe tasa fija, cuyas condiciones son: tasa fija 10% anual, pagos trimestrales, notional 2.000.000, vencimiento 1 año.

Ejercicio 29

a) Suponga que un banco puede tomar o colocar dinero a la tasa LIBOR. La tasa a 90 días es 10% anual y la tasa a 180 días es 10.2% anual (con capitalización continua y convención actual/actual). El precio de un futuro de Eurodólar con vencimiento en 91 días es 89.5. ¿Qué oportunidad de arbitraje tiene el banco? Explique teóricamente y ejemplifique numéricamente.

b) Defina "tasa forward" conceptualmente y en términos de la fórmula que permite su cálculo a partir de las tasas spot. Dada la siguiente curva spot de tasas continuas, calcule la curva forward. Indique claramente la fecha de inicio y el plazo de cada tasa forward calculada.

T	0,25	0,5	0,75	1
r	5%	5.2%	5.5%	5.8%

Ejercicio 30

Un contrato forward de un año sobre una acción que no paga dividendos comienza cuando el precio de la acción es \$40 y la tasa libre de riesgo es 10% anual interés compuesto continuo.

a) ¿Cuál es el precio del forward y cuál es el valor inicial del contrato forward?

b) Luego de 6 meses el precio de la acción es de \$45 y la tasa libre de riesgo es 10%. ¿Cuál es el precio forward y cuál es el valor del contrato forward?

Ejercicio 31

a) Las compañías A y B reciben las siguientes ofertas de tasas anuales sobre un préstamo de \$20 millones a 5 años:

	Tasa fija	Tasa variable
Compañía A	12%	LIBOR +0.1%
Compañía B	13.4%	LIBOR +0.6%

La compañía A requiere un préstamo con tasa flotante y la B requiere un préstamo a tasa fija. Diseñe un SWAP tal que el intermediario reciba un 0.1% anual y sea igualmente atractivo para ambas compañías.

b) Un SWAP de moneda tiene una vida de 15 meses. Intercambia "interés al 14% sobre 20 millones de libras" por "interés al 10% sobre 30 millones de dólares". Las estructuras temporales de tasa de interés son horizontales (flat), y si el SWAP se negocia hoy el interés intercambiado sería del 8% en dólares y 11% en libras. El tipo de cambio es de 1,65 dólares por libra. ¿Cuál es el valor del SWAP para la parte que paga en libras? ¿Cuál es el valor del SWAP para la parte que paga en dólares? (tasas de interés compuestas anualmente).

Ejercicio 32

Considere la siguiente curva LIBOR spot (las tasas son anuales con composición trimestral):

Trimestre	1	2	3	4
Tasa	2%	3%	4%	5%

Calcule el valor de un swap de tasa de interés para quien paga tasa fija, cuyas condiciones son: tasa fija 8% anual, pagos trimestrales, notional \$3.000.000, vida remanente un año.

Ejercicio 33

Las tasas spot a 6 meses y 1 año son 3,5% y 3,7%, respectivamente. Un bono que expira en 18 meses paga 5% anual (con pagos semestrales) y tiene un rendimiento al vencimiento del 4%. Calcule el precio del bono. Calcule la tasa spot para inversiones a 18 meses.

Nota: todas las tasas son con composición semestral.

Ejercicio 34

Suponga que la tasa libre es 10% anual y que la "dividend yield" (tasa de dividendo) de un índice bursátil es 4% anual. El índice actualmente está en 400 y el precio forward para un contrato que vence en cuatro meses es 405. ¿Hay alguna oportunidad de arbitraje? En caso afirmativo, muestre la estrategia.

Ejercicio 35

Sean c_1 y p_1 , las primas de un average price call y put europeos, respectivamente, con precio de ejercicio K y vencimiento en T . Sean c_2 y p_2 las primas de un average strike call y put europeos, respectivamente, con vencimiento en T . Finalmente, sean c_3 , y p_3 , las primas de un call y put europeos estándar, respectivamente, con strike K y vencimiento en T . Demuestre que: $c_1 + c_2 - c_3 = p_1 + p_2 - p_3$

Ejercicio 36

Existe en el mercado un contrato futuro con vencimiento a 15 meses sobre una acción que no paga dividendos. El precio de esta acción hoy es de \$46.39. La tasa libre de riesgo es del 6% anual (composición continua). Se pide:

- Cotizar un call europeo sobre el mencionado futuro con vencimiento a seis meses. Se estima que el precio futuro puede subir o bajar un 10% en un periodo de tres meses. Strike = \$45.
- Estime el precio de un put sobre el mismo subyacente con igual precio de ejercicio y vencimiento.
- Explique la variación esperada por el inversor en el valor del futuro en un mundo neutral a riesgo.
- En el mercado el instrumento se negocia a \$5. El contrato put se negocia al precio calculado en b). Muestre cómo podría actuar para obtener una ganancia. Calcule el valor de esta ganancia.

Ejercicio 37

Considere la siguiente curva LIBOR (tasa continua).

Meses	3	6	9	15
Libor Spot	8%	8.50%	9%	10%

Una compañía posee ingresos variables de sus activos y, por decisión de la gerencia, requiere de rendimientos fijos semestrales durante el año que se inicia el próximo trimestre sobre un capital de \$100,000 (flujos de fondos en el mes 9 y 15).

- Usted, como consultor, plantea la posibilidad de ingresar en un swap. ¿Cuáles serían las condiciones de este contrato? Considere que se realiza sin intermediación de una institución financiera por lo que no hay exigencia de comisión
- Pasados diez meses, la estructura de tasa LIBOR es flat al 10% anual (composición continua). ¿El valor del contrato es positivo o negativo para la compañía? Justifique.

Ejercicio 38

- El precio cotizado de un bono el 10/12/2009 es de \$102. El bono paga cupones semestrales a una tasa del 15% anual (composición semestral). Los cupones se pagan el 06/07 y 06/01 de cada año. Calcule el precio cash. Intereses consideran la convención actual / actual

- b) Si la duration del bono anterior es igual a 5.24, ¿cuál sería el nuevo precio del bono ante un incremento de 0.01% en la tasa de interés?
- c) ¿Es precisa la respuesta del punto b)? Justificar.

Ejercicio 39

- a) En el mercado se negocia un put europeo con vencimiento a 9 meses sobre acciones que no pagan dividendos. Cada contrato es por 250 acciones. El inversor asume una volatilidad de 20%. La tasa libre de riesgo es del 5%. El instrumento da el derecho a vender una acción a \$45 siendo ese también el precio de la acción hoy. El lanzador de este contrato quiere eliminar el riesgo respecto a cambios en el precio de la acción. Decide operar en subyacentes para neutralizar el riesgo. ¿Qué posición debería tomar en las acciones?
- b) Si en lugar de operar en acciones lo hace en futuros sobre estas acciones (con vencimiento en 3 meses), ¿cuál es la posición que debe tomar para obtener la cobertura deseada? (Tener en cuenta que en cada contrato de futuro se negocian 50 acciones)

Ejercicio 40

Banco Uno entró en un swap a cinco años con Cía. Argentina SA para pagar BADLAR a cambio de una tasa fija del 8% sobre un principal de ARS 100 MM y con pagos anuales. Luego de dos años de firmado el contrato, la tasa de mercado para swaps BADLAR con plazo de tres años es 7%. En este momento, Cía. Argentina SA declara la bancarota e incumple con las obligaciones del swap.

- a) ¿Cuál es el pago de intereses neto involucrado en la operación?
- b) ¿Cuál es el valor de mercado de la pérdida que sufre Banco Uno?
- c) Explique una empresa puede utilizar un SWAP para transformar un préstamo pactado a tasa flotante en un préstamo a tasa fija.

Ejercicio 41

- a) La tasa de rendimiento por cupones en el próximo año de un bono es del 9% (current yield). El rendimiento al vencimiento del mismo bono es del 10%. ¿El bono está cotizando bajo o sobre la par? Explique.
- b) Para el caso anterior, ¿la tasa de cupón es menor o mayor al 9%?
- c) Calcular cual es el 'yield to maturity' de un bono que vence en tres años y paga una tasa semestral del 8% anual en concepto de cupones sabiendo que las tasas de bonos cupón cero son las siguientes:

Período	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Tasa continua	7%	7.50%	8%	8.5%	9%	9.50%

- d) Teniendo en cuenta la misma estructura de tasas del punto c), calcular bajo qué condiciones podría hoy emitirse un bono a tasa fija a dos años con pago semestral de cupones de manera que cotice a la par.

Ejercicio 42

La tasa libre de riesgo en pesos es 12,4224% (TNA con capitalización continua, para todos los plazos). En la siguiente tabla se observan cotizaciones de tipo de cambio peso-real spot y forward, y prima de opciones sobre forward.

Contrato	Settle
Spot	2,36
180 días	2,4002

Tipo	Plazo	K	Prima
Call	180 días	2,35	0,20719
Put	180 días	2,35	0,2

¿Hay oportunidades de arbitraje? En caso afirmativo, construya la estrategia y calcule la ganancia por arbitraje resultante. Pista: Call-Put parity para opciones sobre forward,

Ejercicio 43

Un forward con vencimiento en nueve meses tiene como subyacente una acción que cotiza a \$10. Determine el precio forward si la tasa de interés libre de riesgo, efectiva anual, es 10%. Calcule la ganancia por arbitraje que se obtendría si el precio forward es \$10,40 (explícite la estrategia realizada).

Ejercicio 44

Considere el siguiente swap de moneda: la compañía A realizó un swap sobre 100 millones de dólares a una tasa del 3% (pata "activa", acreedora) por una tasa del 10% sobre 400 millones de pesos (pata "pasiva", deudora). El intercambio de fondos es semestral. Quedan 18 meses para el vencimiento del swap y el tipo de cambio es 4,09. La estructura de tasas a la fecha es flat tanto en dólares como en pesos y es de 3,3% y 11% respectivamente (TNA con capitalización continua). Calcular el valor del swap para la compañía A.

Ejercicio 45

En el mercado se negocia un contrato de futuro con vencimiento a nueve meses sobre una acción que no paga dividendos. La tasa libre de riesgo es flat al 10%.

- Si el precio Futuro es 20, ¿es posible arbitrar si el precio hoy de la acción es de 19.5? Muestre la estrategia.
- Calcule el valor de un Call Europeo ATM con vencimiento en seis meses sobre este contrato Futuro basándose en un modelo binomial de dos pasos, sabiendo que la volatilidad anual (del precio futuro) es de 20%. Considere que el precio Futuro actual es el que elimina las oportunidades de arbitraje (no 20, como en el punto anterior).
- Si el precio de mercado del Call es inferior al precio teórico establecido en b), ¿qué operaciones debería realizar en el momento inicial para empezar la estrategia de arbitraje? ¿Es estática esta estrategia? Explique.

d) Determine el valor de un Put Europeo sobre el contrato Futuro con el mismo vencimiento y precio de ejercicio.

Ejercicio 46

El cuadro siguiente muestra la curva de tasas LIBOR spot para los próximos dos años (tasas continuas):

Meses	6	12	18	24
Tasa Libor	8%	8.50%	9%	9%

a) A sabiendas de su futura necesidad de financiamiento por \$100,000 dentro de seis meses, un agente decide fijar la tasa con un FRA. ¿Es conveniente entrar en este contrato si la tasa del FRA es de 9.3% (TNA, composición semestral)? En caso de que no lo sea explique por qué no.

b) Calcule la tasa swap a dos años con pagos semestrales.

c) Suponga que se acordó un swap a la tasa calculada en b) sobre un nocional de ARS\$ 100,000. Al finalizar el primer año, la estructura de tasas es la siguiente (tasas continuas):

Meses	6	12	18	24	30
Tasa Libor	9%	9.50%	9.80%	9.90%	10%

¿Cuál es la posición de quien paga tasa fija si inmediatamente después del segundo pago su contraparte declara la quiebra? Explique si se ve beneficiado, perjudicado o no lo afecta.

d) ¿Cuál es la posición de quién paga variable? Explique si se ve beneficiado, perjudicado o no lo afecta.

Ejercicio 47

El precio de una acción (que no paga dividendos) es \$28, y la tasa libre de riesgo 8%.

a) ¿Cuál es la prima mínima de un Call con 4 meses de plazo y precio de ejercicio \$25,00?

b) ¿Cuál es la prima mínima de un Put con precio de ejercicio \$29,00 y plazo 2 meses?

c) Suponga que la prima del Call del punto a) es \$3,20. Realice un arbitraje y calcule la ganancia que obtendría.

d) Suponga que la prima del Put del punto b) es \$1,00. ¿Cuánto debería valer un Call con precio de ejercicio \$29.00 y plazo dos meses para que no existan oportunidades de arbitraje?

Ejercicio 48

a) Determine si las siguientes afirmaciones son V o F. y JUSTIFIQUE:

1. "El valor de un Call americano sobre moneda es superior al de un europeo, ya que en algunas circunstancias es óptimo ejercerlo antes del vencimiento".
2. "Las opciones Call sobre monedas con altas tasa de interés y las opciones Put sobre monedas con bajas tasas de interés son las que más posibilidad de ejercicio anticipado tienen".

b) Considere dos opciones europeas sobre futuros, una Call y otra Put, con igual strike K , y suponga que ambas están "at the money" ($F=K$).

1. ¿Qué relación debería haber entre las primas de ambas opciones?
2. Suponga que por la intervención del gobierno el mercado percibe que la probabilidad de baja es superior a la probabilidad de alza. ¿Se vería afectada la relación hallada en 1?
3. Considere el supuesto del punto 2. (la distribución de probabilidad está sesgada hacia abajo) ¿Cómo sería la "smile" de volatilidades implícitas?

c) Deduzca la fórmula de Black y Scholes para la valuación de un Call a partir de probabilidades Q y R .

d) Enuncie la fórmula de Black y Scholes para la valuación de un Put.

e) Verifique que ambas fórmulas de Black y Scholes cumplen con la Call Put Parity.

f) Describir las Barrier. Mencionar el caso de un instrumento de este tipo cuya existencia no tendría sentido.

g) ¿Qué es la volatilidad implícita? ¿Cómo se calcula?

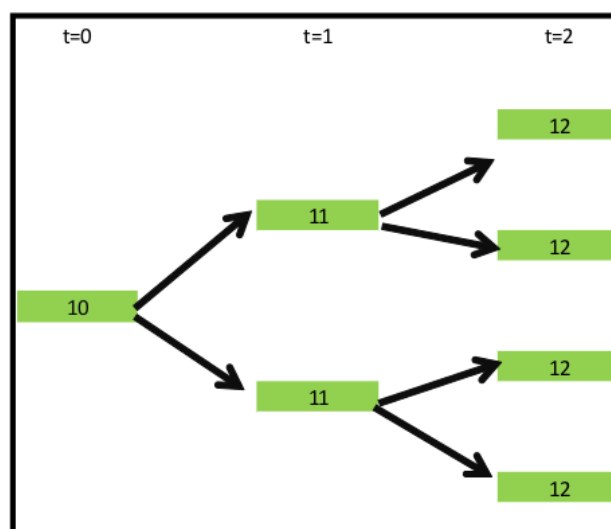
h) Defina y detalle el payoff de una "chooser option",

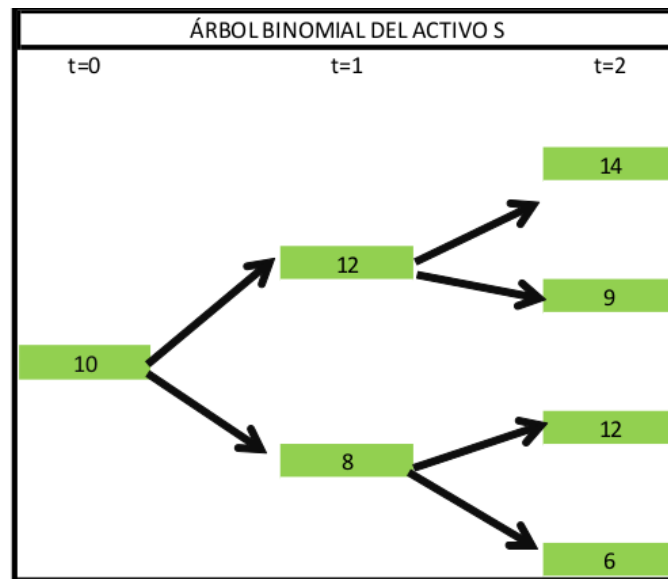
i) Demuestre que la paridad Call-Put para opciones sobre forward es una relación que debe mantenerse para eliminar las oportunidades de arbitraje.

Ejercicio 49

Dado un mercado formado por dos activos ("S" y "B") los cuales se comportan según lo indicado por el siguiente modelo binomial de dos periodos:

Arbol Binomial del activo B:





- Suponiendo que se lanza en dicho mercado un put americano con strike \$11 y vencimiento en "2" sobre el activo subyacente "S", calcule el valor en ausencia de arbitraje de dicho instrumento al momento "0" y al momento "1",
- Suponiendo que se lanza en dicho mercado un call americano con strike \$11 y vencimiento en "2" sobre el activo subyacente "S", calcule el valor en ausencia de arbitraje de dicho instrumento al momento "0" y al momento "1".
- Indique cuál de los dos instrumentos anteriores, en ausencia de arbitraje, tiene el mismo valor que su contraparte europea y demuestre porqué debe darse dicha equivalencia (independientemente del proceso estocástico que modele el comportamiento de los activos "S" y "B").

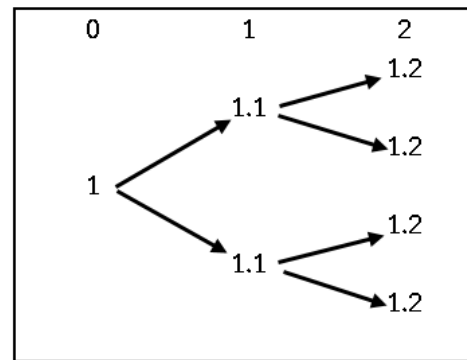
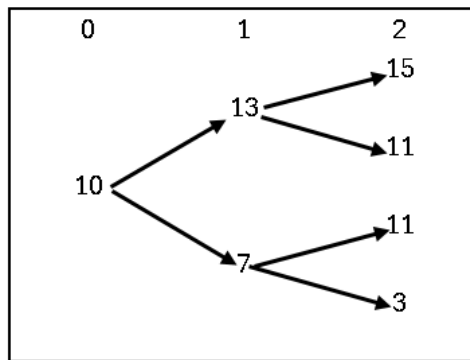
Ejercicio 50

El tipo de cambio actualmente es 3.04 pesos por dólar, y la volatilidad anualizada del mismo es 10%. Considere un contrato Put sobre dólar a cuatro meses con strike 3.10, que otorga el derecho de vender U\$S 10.000. La tasa de interés en dólares es 3% y la tasa en pesos es 14%, ambas anuales con capitalización continua.

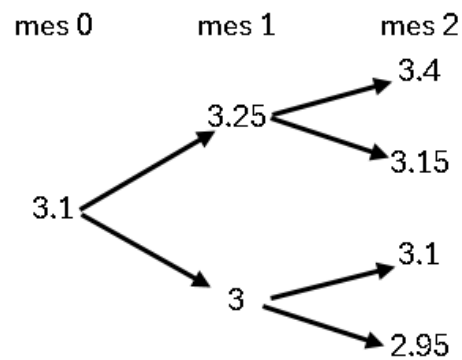
- Utilizando un modelo binomial con 2 pasos, calcule la prima del instrumento Americano.
- Calcule la prima del instrumento Europeo utilizando el modelo de Black-Scholes-Merton.

Ejercicio 51

Calcule el precio de un derivado cuyo payoff es igual a "100" y se paga en el primer momento en que el precio de la acción es menor o igual a los 11 pesos. De no suceder esto hasta el momento "2" el payoff es igual a 0.

**Ejercicio 52**

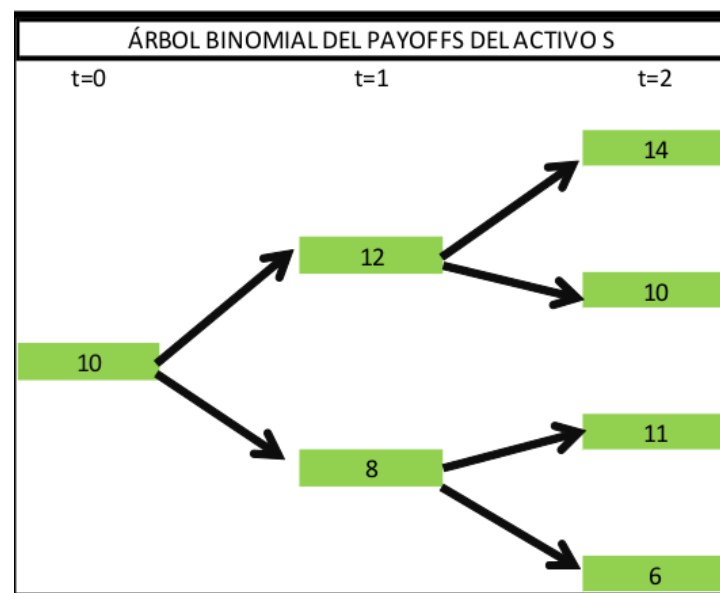
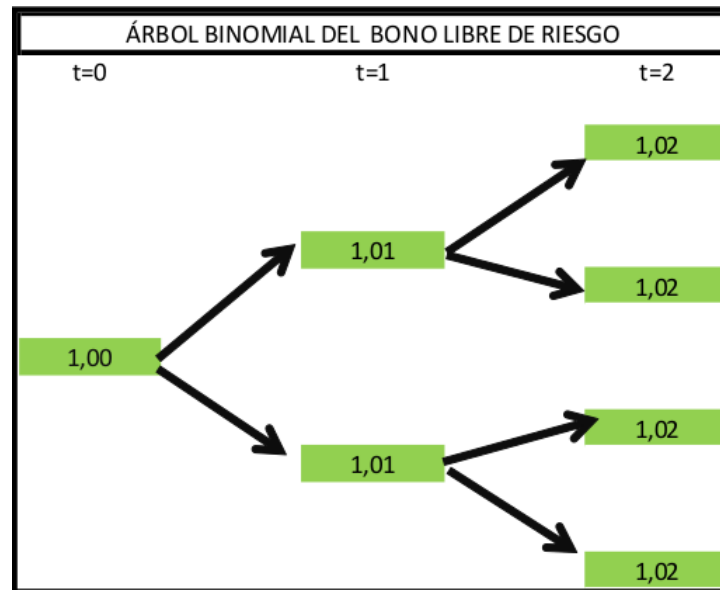
Suponiendo que la tasa de interés del Bono en moneda local es del 2% mensual y la tasa de interés del Bono en moneda extranjera es del 1% y utilizando el siguiente árbol binomial para modelar el comportamiento del tipo de cambio en los próximos 2 meses:



- Calcule el valor de un call sobre moneda extranjera con vencimiento en "2" y con un precio de ejercicio de \$3.12.
- Suponiendo que el precio de esta opción en el mercado se operase a un precio inferior que al que arribó en el punto anterior, explique como podría armarse un arbitraje utilizando los instrumentos mencionados.

Ejercicio 53

Dado el siguiente árbol binomial:



Calcule el valor de un Put Asiático con vencimiento en "2" y strike "12".

Ejercicio 54

El precio futuro de un activo es \$95, y la volatilidad anualizada del mismo es 30%. Considere un Call sobre futuros a dos meses con strike 90, y suponga que la tasa libre de riesgo del mercado es 8% (anual con capitalización continua).

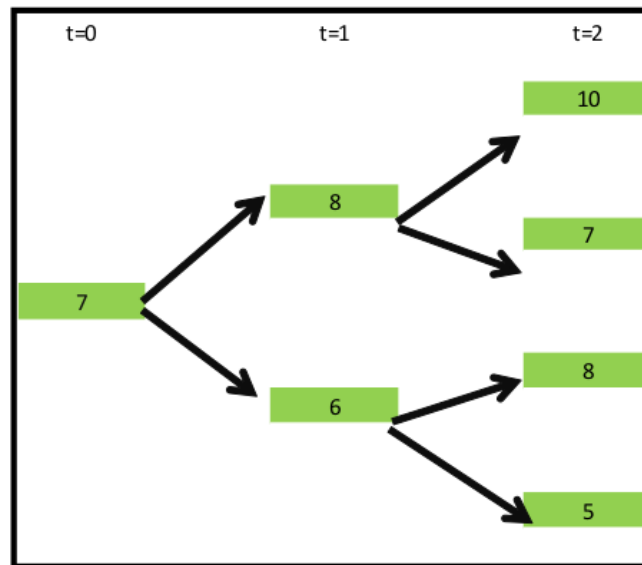
a) Utilizando un modelo binomial con 2 pasos, calcule la prima del instrumento Americano.

b) Utilizando el modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein, calcule u , d y p para valorar una opción sobre dólar. El tamaño de cada intervalo es un mes, la tasa de interés en pesos es 10% (TNA con capitalización continua), la tasa de interés en dólares es 2% (TNA con capitalización continua) y la volatilidad es 8%.

c) Calcule la prima del instrumento Europeo utilizando el modelo de Black.

Ejercicio 55

Dado un activo "S" que sigue el proceso ilustrado por el árbol binomial y un mercado de dinero con tasa libre de riesgo del 10% periódica continua.



- Calcule la medida de probabilidad neutral a riesgo ("Q") en cada nodo.
- Suponiendo que se lanza en dicho mercado un put europeo con strike \$6 y vencimiento en "2" sobre el activo subyacente "S", calcule el valor en ausencia de arbitraje de dicho instrumento al momento "0" y al momento "1".
- Realice lo mismo que en el punto a. pero considerando un call europeo con strike \$6.

Ejercicio 56

Considere un activo cuyo precio actual es \$95, y la volatilidad anualizada del mismo es 20%. Teniendo en cuenta que la tasa libre de riesgo del mercado es 10% (anual con capitalización continua), se pide:

- Utilizando un modelo binomial con 2 pasos, calcule la prima de un put americano con Strike 96.
- Utilizando un modelo binomial con 2 pasos, calcule la prima de un call americano con Strike 94.

Ejercicio 57

Una acción cotiza actualmente es 3.20 pesos, y la volatilidad anualizada del retorno es 15%. Considere un contrato Put Americano a cuatro meses con strike 3.10, que otorga el derecho de

vender 100 acciones. La tasa de interés es 11% anual con capitalización continua. Utilizando un modelo binomial con 2 pasos, calcule la prima total por el contrato.

Ejercicio 58

Considere una acción cuyo precio de mercado es \$50. En los próximos dos periodos de 3 meses cada uno, el precio puede subir un 6% o bajar un 5%. La tasa de interés libre de riesgo es 5% con composición continua. Considerando opciones con strike \$51 y vencimiento en 6 meses, determine:

- a) El valor de un Put Europeo.
- b) El valor de un Put Americano.
- c) El valor de un Call Europeo.
- d) El valor de un Call Americano

Ejercicio 59

Considere una acción cuyo precio de mercado es \$5, su rendimiento esperado es $\mu = 25\%$ y su volatilidad es $\sigma = 20\%$ (ambos anuales).

- a) Utilizando los supuestos de Cox, Ross y Rubinstein (1979), construya un árbol binomial con 6 meses de horizonte y 2 pasos (de 3 meses cada uno).
- b) Si la prima de mercado es \$1, establezca la estrategia que debe realizar en el momento inicial para realizar un arbitraje. Muestre el rebalanceo al momento 1 si el precio baja. Muestre que la liquidación final al momento 2 (en ambos escenarios, dado que bajó al momento 1) genera una ganancia por arbitraje que es independiente del escenario en este instante.

Ejercicio 60

- a) El precio de una acción es \$40. Dentro de 3 meses va a ser \$45 o \$35. La tasa libre de riesgo es 8% anual compuesta trimestral. Calcule el valor de un PUT europeo de 3 meses sobre la acción con precio de ejercicio \$40. Confirme que no-arbitraje y la valuación neutral al riesgo producen el mismo resultado.
- b) El valor de una acción es de \$50, se espera que en los próximos 3 meses suba el 6% o baje el 5%. La tasa libre de riesgo es 5% anual compuesto continuo. ¿Cuál es el valor de un CALL europeo de 6 meses que tiene precio STRIKE de \$51?

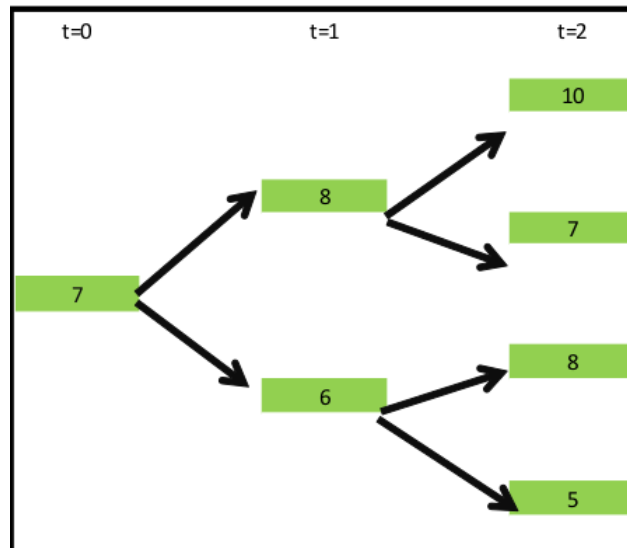
Ejercicio 61

Considere una acción cuyo precio de mercado es \$7, su rendimiento esperado es $\mu = 25\%$ y su volatilidad es $\sigma = 20\%$ (ambos anuales).

- a) Utilizando los supuestos de Cox, Ross y Rubinstein (1979), construya un árbol binomial con 4 meses de horizonte y 2 pasos (de 2 meses cada uno), y calcule el valor de un Put Europeo con Strike \$7,20 asumiendo que la tasa de interés libre de riesgo es 2% con composición continua.
- b) Si la prima de mercado es \$1, establezca la estrategia que debe realizar en el momento inicial para realizar un arbitraje. Muestre el rebalanceo al momento 1 si el precio baja. Muestre que la liquidación final al momento 2 (en ambos escenarios, dado que bajó al momento 1) genera una ganancia por arbitraje que es independiente del escenario en este instante.

Ejercicio 62

Dado un activo "S" que sigue el proceso ilustrado por el árbol binomial y un mercado de dinero con tasa libre de riesgo del 10% periódica continua. Midiendo con respecto a la medida Q , ¿cuál proceso es martingala? Verifique calculando las esperanzas respectivas que el proceso es martingala.

**Ejercicio 63**

El precio de una acción es $S_0 = 50$. El retorno esperado y la volatilidad son 12% y 30%, respectivamente. Si el precio sigue un proceso geométrico browniano, ¿Cuál es la probabilidad que el precio sea mayor a 80 en 2 años? (Ayuda: $S_T > 80$ cuando $\ln S_T > \ln 80$).

Ejercicio 64

Considere un activo cuyo precio actual es \$95, y la volatilidad anualizada del mismo es 20%. Teniendo en cuenta que la tasa libre de riesgo del mercado es 10% (anual con capitalización continua), Se pide:

- Calcule la prima de un put europeo con strike 96 utilizando el modelo de Black & Scholes.
- Determine si la siguiente afirmación es correcta: "Si la cantidad de pasos de un modelo binomial se incrementara indefinidamente, entonces la prima del put americano convergería a la prima de Black-Scholes".
- Calcule la prima de un call europeo con strike 94 utilizando el modelo de Black & Scholes.
- Determine si la siguiente afirmación es correcta: "Si la cantidad de pasos de un modelo binomial se incrementara indefinidamente, entonces la prima del call americano sería superior a la del call europeo".

Ejercicio 65

- a) Bajo los supuestos de Black-Scholes, determine el valor en el momento inicial de un contrato que le otorgará en el momento T_1 la opción de elegir entre un Call y un Put con strike K y vencimiento en el momento $T_1 (> T_1)$. Es decir, una Chooser Option.
- b) Calcule el valor de una Chooser, sabiendo que el precio del subyacente es \$50 y su volatilidad del 25%, el strike es \$52, la elección es en 3 meses y la expiración en 6 meses desde que se elige (el contrato es por 9 meses en total) y la tasa libre de riesgo es 2% (anual compuesta continuamente).

Ejercicio 66

Calcular el valor de un chooser con vencimiento en doce meses (siendo la elección del instrumento en 3 meses) dados los siguientes datos: Precio de ejercicio \$42, Precio Spot \$40, Tasa libre de riesgo 6%, tasa de dividendos 4%, volatilidad 20%

Ejercicio 67

Una empresa tiene un préstamo de \$100 que le obliga a pagar interés variable. Considere un contrato que pone un límite de 9% (anual compuesto trimestral) al interés. Asimismo, la estructura temporal de tasas de interés es constante 8% (anual compuesto trimestral), la volatilidad anual del interés variable original es 20% anual y la tasa libre de riesgo compuesta continuamente es 6,5%.

- a) Escriba la fórmula de Caplet detallando las variables. Calcule el costo de un "caplet" de tres meses.
- b) Explique el concepto de Cap por seis meses. Calcule su valor para el presente caso.

Ejercicio 68

Suponga que el precio de un activo se comporta como un movimiento geométrico browniano, es decir que el precio se comporta de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial estocástica (SDE): $dS = \mu S dt + \sigma S dz$; donde z es un proceso de Wiener, y μ y σ son constantes.

- a) Halle la SDE del precio forward $F = Se^{r(T-t)}$. (Pista: Lema de Ito)
- b) Asuma que el precio de un activo sigue la SDE del punto a), con $\mu = 0.15$ y $\sigma = 0.25$. Construya un intervalo para el precio del activo en 6 meses con un 95% de confianza.

Ejercicio 69

- a) Bajo los supuestos de Black-Scholes, halle el valor en el momento inicial de un contrato que le otorgará en el momento T_1 , un Call at-the-money con vencimiento en el momento $T_1 (> T_1)$ Es decir, un el valor de un Forward Start Call.
- b) Calcule el valor de un Forward Start Call, sabiendo que el precio del subyacente es \$5 (no paga dividendos durante la vida de la opción) y su volatilidad del 20%, el strike es \$6, el inicio del Call es en 6 meses y la expiración en 3 meses desde que inicia (el contrato es por 9 meses en total) y la tasa libre de riesgo es 2%.

Ejercicio 70

- a) Exprese la ecuación diferencial estocástica (SDE) que se utiliza para describir la evolución del precio de las acciones ordinarias, S .
- b) Usando el lema de Ito (y la expresión del punto anterior), halle la SDE de $f(S, t) = \ln(S)$
- c) ¿Qué distribución sigue el precio S ?
- d) ¿Qué distribución sigue el retorno $\ln(S_T / S_0)$? Indique media y varianza.
- e) Muestre que el precio forward de un activo que no paga dividendos satisface la ecuación de Black-Scholes-Merton.

Ejercicio 71

- a) Bajo los supuestos de Black-Scholes, halle el valor en el momento inicial de un derivado que le otorgará en el momento T un monto de dinero igual al precio del activo subyacente, S_T , siempre y cuando este valor sea mayor al strike del derivado, K . Es decir, el valor de un Asset or Nothing Call.
- b) Calcule el valor de un Asset or Nothing Call, sabiendo que el precio del subyacente hoy es \$5 (no paga dividendos durante la vida de la opción) y su volatilidad del 25%, el strike es \$6, el vencimiento es en 6 meses y la tasa libre de riesgo es 2% (compuesta continuamente).

Ejercicio 72

Sea r_t , es la tasa spot vigente al momento " t ", y $B_t = e^{-r_t(T-t)}$ es el precio de un bono cupón cero al momento " t " que paga \$1 al momento " T ". Si la tasa spot sigue el siguiente proceso: $dr = a \cdot (\bar{r} - r)dt + b \cdot r \cdot dz$, siendo $a, b, \bar{r}$ constantes (los parámetros del modelo) y dz un proceso de Wiener, ¿cuál es el proceso seguido por B ?

Ejercicio 73

- a) Calcule el valor de un Call europeo con precio de ejercicio \$50 y 2 meses para el vencimiento sobre una acción que cotiza a \$51 y tiene una volatilidad esperada durante la vida de la opción del 23% anualizada. Asuma una tasa de interés del 1% anual compuesto continuamente. La acción no pagará dividendos durante la vida de la opción.
- b) Calcule el valor de un Put Europeo con las mismas características del Call del punto anterior.

Ejercicio 74

Suponga que x es el "yield to maturity" de un bono cupón cero que paga \$1 al momento T .

$$dx = a(u - x)dt + s \cdot x \cdot dz$$

Donde a, u y s son constantes positivas y dz es un movimiento browniano.

- a) Defina martingala y analice qué valores deben tomar las constantes para que dx sea martingala.
- b) Calcule la media y la varianza del proceso.
- c) ¿Cuál es el proceso que sigue el bono asociado?

d) Calcule la media y la varianza del proceso del bono.

Ejercicio 75

Si el precio contado de una acción que no paga dividendos sigue un movimiento geométrico browniano, con drift μ y volatilidad σ , ¿Qué proceso sigue el Precio Forward? Demuestre.

b) Una función $f(S,t)$ debe satisfacer la ecuación de Black-Scholes para ser el precio de un derivado sin crear oportunidades de arbitraje. Demuestre que el valor de un contrato forward en el momento " t ", con vencimiento en " T ", es el valor de un derivado (es decir, satisface la ecuación).

Ejercicio 76

El precio futuro de un activo es \$90, y la volatilidad anualizada del mismo es 25%. Considere un Call sobre futuros a dos meses con strike \$89, y suponga que la tasa libre de riesgo del mercado es 7% (anual con capitalización continua). Se pide:

- a) Utilizando un modelo binomial con 2 pasos, calcule la prima del instrumento Americano.
- b) Calcule la prima del instrumento Europeo utilizando el modelo de Black.

Ejercicio 77

Suponga que f y g son los precios de dos activos que tienen una única fuente de incertidumbre. Asimismo se asume que el precio de mercado del riesgo (λ) es igual a la volatilidad de " g ".

- a) Escriba los dos procesos estocásticos.
- b) Utilizando el Lema de ITO, encuentre los procesos que siguen " $\ln f$ " y " $\ln g$ ".
- c) Escriba la expresión diferencial del proceso f/g .
- d) Este último ¿es martingala? Justifique.

Ejercicio 78

El precio de una acción sigue un movimiento geométrico browniano con un retorno esperado de 16% y una volatilidad del 35%. El precio de la acción hoy es \$38. ¿Cuál es la probabilidad de que sea ejercido un Call Europeo con vencimiento en 6 meses y precio de ejercicio \$40? ¿Cuál es la probabilidad de que un Put Europeo con el mismo strike y vencimiento sea ejercido? Una acción cotiza a \$40, y tiene un retorno esperado de $\mu=15\%$ y su volatilidad es 25%. ¿Cuál es la distribución de probabilidad de la tasa de retorno con composición continua (η) ganada sobre un período de dos años?

Ejercicio 79

Un Call Europeo con precio de ejercicio \$30, que vence en 3 meses, tiene una prima de \$3. El precio del activo subyacente es \$29 y un dividendo de \$0.50 se espera en 2 meses. La tasa libre es 10% (con composición continua) para todos los vencimientos.

Calcule la prima de un Put Europeo que expira en 3 meses y tiene un precio de ejercicio de \$30.

Ejercicio 80

Un Put Europeo sobre cierta acción tiene un precio de ejercicio de \$30, vencimiento en un año y una volatilidad implícita de 33%. Un Call Europeo con iguales características tiene una volatilidad implícita de 30%.

- ¿Cuál es la oportunidad de arbitraje que se le presenta a un trader?
- ¿El arbitraje es válido sólo cuando se utilizan los supuestos de Black-Scholes?

Ejercicio 81

Un Put Europeo sobre cierta acción tiene un precio de ejercicio de \$7, vencimiento en 3 meses y una volatilidad implícita de 25%. Un Call Europeo con iguales características tiene una volatilidad implícita de 30%. ¿Cuál es la oportunidad de arbitraje que se le presenta a un trader?

Ejercicio 82

Considere el caso de un put europeo a ocho meses sobre un bono del tesoro cuyo vencimiento es dentro de 14.25 años. El precio cash del bono es de \$910, el precio de ejercicio es \$900 y la volatilidad del precio del bono es de 10% anual. Un cupón de \$35 va a ser pagado por el bono dentro de 3 meses (el pago de cupones es semestral). La tasa libre de riesgo es del 1% para todos los vencimientos menores a un año. Determinar el precio de la opción de acuerdo al modelo de Black y tomando el precio de ejercicio dado como precio quoted.

Ejercicio 83

Si S_t sigue un movimiento geométrico browniano:

- ¿Qué proceso sigue $f(S_t; t) = \frac{e^{r(T-t)}}{S_t}$?
- Si el precio hoy es 50, $\mu=12\%$ y $\sigma=20\%$, ¿cuál es la probabilidad de que el precio sea menor a 40 en 6 meses?

Considere el comportamiento aleatorio de las tasas de interés:

- ¿Qué características debería capturar un "buen" modelo estocástico que describa el comportamiento de las tasas de interés?
- Si $dr_t = a(r_0 - r_t)dt + sr_t dz_t$, donde a , r_0 , y s son constantes. ¿Cuál es el proceso que sigue $P(t; T) = e^{-r_t(T-t)}$?

Ejercicio 84

La posición de efectivo de una compañía medida en millones de dólares sigue un proceso browniano con tendencia de 0,1 por mes y volatilidad de 0,16 mensual. Determinar cuál debería ser la posición de efectivo inicial de la compañía para que la probabilidad de no tener fondos suficientes al finalizar el sexto mes sea inferior al 1%.

- Utilizando la teoría de Black-Scholes-Merton, determinar la prima a pagar por un derivado que paga S_T^2 en el momento T . (Pista: utilizar características de la distribución de S al momento T)

c) Una acción cotiza a \$25, y se sabe que en dos meses puede subir a \$27 ó bajar a \$23. La tasa de interés libre de riesgo (TNA con composición continua) es 10%. Si S_T , es el precio de la acción en dos meses, ¿cuál es el valor de un derivado que paga S_T^2 ?

Ejercicio 85

El valor de una acción sigue el siguiente proceso: $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ Si la tasa libre de riesgo es del 6%, la volatilidad es del 15% y el valor esperado de la acción (que hoy se negocia a \$20.1674) para el mes siguiente es \$20.15056. ¿Cuál es el precio de riesgo del mercado?

Ejercicio 86

La posición de efectivo de una compañía medida en millones de dólares sigue un proceso browniano estándar con tendencia de 0,2 por mes y volatilidad de 0,3 mensual. Determinar cuál debería ser la posición de efectivo inicial de la compañía para que la probabilidad de no tener fondos suficientes al finalizar el sexto mes sea inferior al 5%.

Ejercicio 87

a) En el mercado se negocia un call europeo con vencimiento a 9 meses sobre acciones que no pagan dividendos. El inversor asume una volatilidad de 20%. La tasa libre de riesgo es del 5%. El instrumento da el derecho a comprar una acción a \$45 siendo ese también el precio de la acción hoy. Determinar el valor de la prima.

b) ¿Cuáles son los supuestos que están por detrás de esta valuación?

c) Si en el mercado se observa que la volatilidad implícita para distintos precios de ejercicio tiene la forma conocida como volatility skew, ¿qué implica esto respecto de los supuestos mencionados?

Ejercicio 88

a) Derivar una forma cerrada de valuación para un call europeo con vencimiento en doce meses cuyo precio de ejercicio quedará determinado dentro de cuatro (meses) igual al precio spot en ese momento por 1.05

b) Valuar el instrumento teniendo en cuenta los datos disponibles hoy: Precio de ejercicio \$20, volatilidad 18%, tasa libre de riesgo 2%.

Ejercicio 89

Modelo de Heath, Jarrow y Morton. Demuestre la fórmula de la tasa forward del modelo.

Ejercicio 90

Suponga que el precio de dos bonos cupón cero con vencimientos en 6 meses y 1 año son 98 y 96, respectivamente, y que la volatilidad de la tasa en 6 meses es 15%.

a) Utilizando el modelo de BDT, calcule la tasa inicial de un árbol binomial y plantee las ecuaciones que debería resolver para hallar las dos tasas del momento 1.

b) Utilizando el árbol construido en el punto anterior, calcule el precio de un bono con cupones, que paga semestralmente cupones al 12% anual.

Ejercicio 91

Modelo HJM, partiendo del siguiente proceso de precios para los bonos cupón cero:

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt + v(t, T, \Omega_1)P(t, T)dz(t)$$

- Por medio del lema de Ito obtenga $d\ln(P(t, T)) = ?$.
- Utilizando la relación entre la tasa forward y bono cero cupón, obtenga $df(t, T_1, T_2) = ?$.
- Defina precio de mercado del riesgo.
- Explique cuando un proceso estocástico es martingala.

Ejercicio 92

Suponga que el precio de dos bonos cupón cero con vencimientos en 3 meses y 6 meses son 97,0874 y 94,3396, respectivamente, y que la volatilidad de la tasa en 3 meses es 20%. Tenga en cuenta que las tasas utilizadas son TNA.

- Utilizando el modelo de BDT, calcule la tasa inicial de un árbol binomial.
- Plantee las ecuaciones que debería resolver para hallar las dos tasas del momento 1 (6 meses).
- Compruebe que $r_u = 12,8154\%$.
- Utilizando el árbol construido calcule el precio de un bono con cupones, que paga una tasa anual del 12% de manera trimestral.

Ejercicio 93

Si Ud. tiene una cartera compuesta por un put y una unidad del activo subyacente:

- ¿Cuántos calls necesita (con el mismo strike y vencimiento) para que la cartera sea delta neutral? Indique si hay que estar comprado o vendido en esta cantidad de calls. Justifique.
- ¿Necesita rebalancear la cantidad encontrada en el punto anterior a medida que el precio del subyacente y los demás parámetros de las fórmulas de Black y Scholes vayan cambiando para mantener la neutralidad? Explique por qué sí o por qué no.

Ejercicio 94

a) Suponga que usted posee una cartera delta neutral con opciones call at the money vendidas y acciones compradas. ¿Afronta algún tipo de riesgo por movimientos en el precio de las acciones?

- No, porque una cartera delta neutral no tiene riesgo de precio.
- Sí, porque la volatilidad del activo cambia constantemente.
- Sí, porque cuando cambia el precio cambia delta y se pierde la neutralidad.
- No, porque la estrategia delta neutral es una estrategia estática.

b) Suponga que usted compró 5 Puts con un delta de $-0,8$ cada uno. Si cada Put es sobre 100 acciones, ¿qué operación con acciones debería realizar para construir una cartera delta neutral?

1. Comprar 4 acciones.
2. Vender 400 acciones.
3. Comprar 400 acciones.
4. Comprar 80 acciones.

c) Suponga que posee una cartera con opciones y acciones que es delta neutral y posee un gamma de -2 . Si en el mercado se está negociando una opción con delta $0,4$ y gamma de $0,025$. ¿Qué operaciones debería hacer para lograr que la cartera sea delta y gamma neutral?

1. Ninguna operación.
2. Comprar 80 opciones.
3. Comprar 80 opciones y vender 32 acciones.
4. Vender 80 opciones y comprar 32 acciones.

d) Suponga que usted compró 4 Calls con un delta de $0,4$ cada uno. Si cada Call es sobre 100 acciones, ¿qué operación con acciones debería realizar para construir una cartera delta neutral?

1. Comprar 4 acciones.
2. Vender 40 acciones.
3. Comprar 160 acciones.
4. Vender 160 acciones.

e) Suponga que posee una cartera con opciones y acciones que es delta neutral y posee un gamma de $-2,5$. Si en el mercado se está negociando una opción con delta $0,5$ y gamma de $0,025$. ¿Qué operaciones debería hacer para lograr que la cartera sea delta y gamma neutral?

1. Ninguna operación.
2. Comprar 100 opciones.
3. Comprar 100 opciones y vender 50 acciones.
4. Vender 100 opciones y comprar 50 acciones.

Ejercicio 95

Si Ud tiene una cartera compuesta por una venta de call y una compra del activo subyacente:

- a) ¿Cuántos puts necesita operar (con el mismo strike y vencimiento) para que la cartera sea delta neutral? Indique si hay que comprar o vender esta cantidad de calls. Justifique.
- b) ¿Qué cambio necesitaría realizar para obtener una cartera gamma-neutral? Justifique.
- c) Con el sistema actual de retenciones móviles sobre exportaciones de Soja, la posibilidad de suba y/o baja de los precios internos esta acotada. Teniendo en cuenta el impacto de este fenómeno sobre la distribución de retornos, indique la forma teórica que debería tener la smile de volatilidad implícita en el mercado de opciones sobre soja.

Ejercicio 96

- a) Considere el mercado de opciones sobre Trigo. Si los inversores del mercado perciben que debido a las retenciones la suba de precio esta acotada. ¿Qué patrón de volatilidades implícitas debería observarse teóricamente? (Ayuda: vincule con la distribución futura de los rendimientos)
- b) Sabiendo que el “riesgo precio” de una posición delta-neutral esta medido por gamma, cual de las siguientes carteras delta-neutrales tendría mayor riesgo precio:
 1. Una cartera con opciones at-the-money que vencen en una semana.
 2. Una cartera con opciones deep-in-the-money que vencen en un mes.

- c) Suponga que posee una cartera con opciones compradas over the counter, y que en un mercado organizado se negocian opciones sobre el mismo subyacente. ¿Qué operación debería realizar en el mercado para neutralizar el impacto de cambios en la volatilidad implícita?
- d) Considere una cartera con un Call comprado, un Put vendido con igual strike que el Call y una unidad del activo subyacente vendida en descubierto. ¿Cuál es el delta de la cartera y como cambia este a medida que se modifica el precio del subyacente? Justifique.

Ejercicio 97

Considere el mercado de opciones sobre dólar, y asuma que el Banco Central interviene de manera tal que el tipo de cambio fluctué libremente pero dentro del rango 3.10 a 3.20. Si los inversores confían en que el Banco Central cumplirá con esa política. ¿Qué patrón de volatilidad implícitas debería observarse teóricamente?

- a) La volatilidad implícita ATM es la mas baja, y para strikes muy alejados del precio actual del dólar (en ambos sentidos) la volatilidad implícita se incrementa, ya que la distribución de los retornos posee colas pesadas por la intervención del Banco Central limitando la fluctuación.
- b) Para precios de ejercicios muy altos la volatilidad implícita es mayor por el riesgo de que la cotización del Peso Argentino se acerque a la del Real Brasileiro.
- c) La volatilidad implícita ATM es la mas alta, y para strikes muy alejados del precio actual del dólar (en ambos sentidos) la volatilidad implícita es menor, ya que la distribución de los retornos posee colas livianas por la intervención del Banco Central limitando la fluctuación.
- d) Debido a la desvalorización mundial del dólar, hay un riesgo de que el Peso se revalúe en relación con el dólar, generando mayor probabilidad para retornos excesivamente bajos. Siendo la distribución de precios sesgada hacia la izquierda, las volatilidades implícitas de strikes bajos deberían ser mayores a las de strikes altos.

Ejercicio 98

Considere el mercado de opciones sobre dólar, y asuma que los inversores del mercado perciben que habrá una devaluación que incrementara el tipo de cambio. ¿Qué patrón de volatilidades implícitas debería observarse teóricamente?

- a) Dado que la cola derecha es más pesada (los retornos altos positivos son más probables), las volatilidades implícitas de strikes altos serán mayores a las correspondientes a strikes bajos.
- b) Teniendo en cuenta que la cola izquierda es más pesada (los retornos muy negativos son más probables), las volatilidades implícitas de strikes bajos serán mayores que las correspondientes a strikes bajos.
- c) Como se trata de una divisa, siempre las volatilidades de strikes altos y bajos (opciones ITM y OTM) serán mayores a las de strikes medios (opciones ATM).
- d) Debido a la desvalorización mundial del dólar, hay un riesgo de que el Peso se revalúe en relación con el dólar, generando mayor probabilidad para retornos excesivamente bajos. Siendo la distribución de precios sesgada hacia la izquierda, las volatilidades implícitas de strikes bajos deberían ser mayores a las de strikes altos.

Ejercicio 99

Suponga que usted posee una cartera delta neutral con opciones call vendidas y acciones compradas. Entonces, dado que las variaciones en el precio prácticamente no modifican el valor de su cartera, un aumento de la volatilidad implícita:

- Lo favorece, dado que el vega de calls es negativo y al estar vendido en opciones su cartera tiene vega positivo (se favorece con incrementos de volatilidad implícita).
- Lo perjudica, dado que el vega de calls es positivo y al estar vendido en opciones su cartera tiene vega negativo (pierde valor con incrementos de volatilidad implícita).
- No lo afecta, ya que la cartera es delta neutral.
- Lo perjudica, dado que al estar vendido en opciones tiene gamma negativo.

Ejercicio 100

- Utilice la paridad Call-Put de opciones europeas sobre activos que no pagan dividendos para encontrar la relación entre:
 - Delta de un Call y Delta de un Put.
 - Vega de un Call y Vega de un Put.
 - Theta de un Put Europeo y Theta de un Call Europeo.
 - Gamma de un Put Europeo y Gamma de un Call Europeo.
- Una institución financiera tiene la siguiente cartera con opciones over the counter:

Tipo	Cantidad	Griegas (por unidad)		
		Delta	Gamma	Vega
Call	-1.000	0.5	2.2	1.8
Call	-500	0.8	0.6	0.2
Put	-2.000	-0.4	1.3	0.7
Call	-500	0.7	1.8	1.4

En un mercado se esta operando actualmente una opción negociable que posee un delta de 0.6, un gamma de 1.5 y un vega de 0.8. ¿Qué operación debería efectuarse en la opción negociable y/o en el subyacente para que ocurran los siguientes puntos?

- La cartera sea delta neutral
- La cartera sea delta neutral-gamma neutral
- La cartera sea delta neutral-vega neutral.

Ejercicio 101

Una inversora tiene una cartera de 100 millones de pesos cuya beta es de 1.1. Existe para ella la posibilidad de actuar en el mercado de futuros sobre el índice S&P 500 para los meses de Enero (vencimiento en 2 meses) y Marzo (vencimiento en 4 meses). La tasa de dividendos es del 3% (solo para el índice, la cartera no tiene dividendos) y la tasa libre de riesgo es de 5% anual.

- ¿Qué estrategia puede realizar la inversora en caso de desear, para los próximos tres meses, una cartera más agresiva con un Beta de 1.5?
- Si considera que en los próximos tres meses la situación del mercado será crítica ¿Qué estrategia debería realizar para poder asimilar su cartera a una libre de riesgo?

Nota: Cada contrato es por 250 veces el índice. El valor del índice es 1.200.

Ejercicio 102

Un inversor tiene una cartera con Beta 1.3. Su idea es asegurar que el valor de la misma (hoy de 50 millones de dólares) no sea inferior a los 45 millones al finalizar el próximo año. La tasa de interés libre de riesgo es de 5% anual y se considera que la tasa de dividendos (tanto del mercado como de la cartera de la que se tiene posesión) es del 3%. Se sabe que el índice S&P 500, representativo del mercado, tiene hoy un valor de 1800 y volatilidad del 20%.

- ¿Qué estrategia podría seguir en el mercado de opciones para asegurar la cartera? ¿Cuál sería el costo de esta operación?
- Ejemplifique el ejercicio del derivado ante un valor del índice 1500 dentro de un año.

Nota: Los contratos de opción sobre índice son por \$100 multiplicado por el valor del índice.

Ejercicio 103

Una inversora tiene una cartera valuada hoy, 03/07/2008, en 20 millones de dólares. La cartera esta bien diversificada y posee un Beta de 0.9. La inversora desea asegurar que el valor de la misma al 01/12/2008 no sea inferior a los 16 millones. El índice S&P 500, representativo del mercado, tiene hoy un valor de 1270 puntos y una volatilidad del 25%. La tasa de interés libre de riesgo es del 2% anual, la tasa de dividendos del índice se estima en 1.5% y la de la cartera que posee la inversora en 1%.

- ¿Qué estrategia podría seguir en el mercado de opciones para asegurar la cartera?
- ¿Cuál sería el costo de esta operación?
- Ejemplifique el funcionamiento de la cobertura mediante el ejercicio del derivado el 01/12/2008 cuando el índice cerro en 816 puntos.

Nota: Los contratos de opción sobre índice son por \$100 multiplicado por el valor del índice.

Ejercicio 104

Una inversora utiliza posiciones largas en opciones sobre índice (calls y puts) para realizar una cobertura “delta” para su cartera (diversificada) de acciones. ¿Cómo se vería impactada la cobertura si se produce un gran movimiento en el valor del índice? Explique.

Ejercicio 105

- Calcule el delta de un Call europeo at-the-money de 6 meses sobre una acción que no paga dividendo sabiendo que la tasa libre de riesgo es 10% anual y la volatilidad de la acción es 25% anual.
- ¿Qué significa que la theta de una posición en opciones sea de -0.1 cuando el tiempo se mide en años? Asumiendo que el precio de la acción y su volatilidad implícita se mantienen constantes, ¿Qué tipo de posición en opciones considera apropiada?
- Calcule el delta de un Put europeo at-the-money de 3 meses sobre una acción que no paga dividendo sabiendo que la tasa libre de riesgo es 2% anual y la volatilidad de la acción es 20% anual.

Ejercicio 106

- a) Una empresa realiza una cobertura delta (delta-hedging) para cubrir una cartera con posiciones short (ventas) en opciones Call y Put sobre dólar. ¿Cuál de los siguientes dos escenarios generaría el resultado más favorable?
 - a. Un tipo de cambio spot virtualmente constante.
 - b. Grandes movimientos en el tipo de cambio.
- b) Considere un contrato forward sobre un índice de acciones (dividend yield continua = q) y un contrato futuro sobre el mismo índice. ¿Tienen los dos contratos el mismo delta?

Ejercicio 107

- a) Explique porque hacer cobertura delta (delta-hedging) es más fácil para opciones asiáticas para opciones estándar.
- b) Una empresa realiza una cobertura delta (delta-hedging) para cubrir una cartera con posiciones long (compradas) en opciones Call y Put sobre dólar. ¿Cuál de los siguientes dos escenarios generaría el resultado más favorable?
 - a. Un tipo de cambio spot virtualmente constante.
 - b. Grandes movimientos en el tipo de cambio.

Ejercicio 108

Una compañía tiene el 15/03 un capital de \$500,000 y un beta en cartera igual a 1.2. El valor de los dividendos generados por la cartera es del 3% anual (al igual que el de mercado) y la tasa libre de riesgo es de 6%. En el mercado se negocian contratos derivados sobre el índice S&P 500 (una opción paga 100 veces el valor del índice y un futuro 250 veces el mismo valor). Las opciones tienen vencimiento el 15 de cada mes, los futuros el de cada mes. El valor del índice hoy es de 1,220.

- a) Explicar la cobertura estática a tomar si quiere eliminar el riesgo de su cartera por los próximos tres meses. ¿Cuál es el valor de la cartera si el valor del índice dentro de tres meses es de 1,100? (Suponga que el precio del futuro coincide con el precio teórico. La tasa libre de riesgo no tuvo modificaciones)
- b) Si el objetivo de la compañía es que su capital no sea inferior a \$475,000. Determinar la cobertura a tomar en el mercado de opciones.
- c) Determine la posición a tomar en el mercado de futuros para alcanzar el mismo objetivo que en b)
- d) Explique si esta cobertura es de tipo estática o dinámica. Justifique.

Ejercicio 109

Una cartera con Beta de 1.1 tiene hoy un valor de \$100,000. La tasa de dividendos que paga la cartera es del 5% (superior al 4% que paga el índice de mercado, hoy con valor 1,000). La volatilidad del índice de mercado es del 22% anual.

Para cubrirse frente a una caída de capital del 3% en los próximos 3 meses, la compañía toma una posición en contratos Put sobre el índice S&P 500 con strike 995.91 (un contrato paga 100 veces el valor del índice).

- a) ¿En qué cantidad de contratos opero?

- b) Si en lugar de actuar en contratos Put hubiera optado por tomar una posición libre de riesgo, ¿Cómo debería haber actuado?
- c) Explique por que se pudo haber optado por la opción b) y la principal diferencia en cuanto al modo de continuar la estrategia entre esta opción y la planteada en a).
- d) En el mercado existen contratos de futuros sobre el índice a 4 meses que pagan 250 veces su valor. ¿Puede tomarse la misma cobertura utilizando estos instrumentos?

Ejercicio 110

Responda las siguientes preguntas relacionadas con la administración de carteras de derivados utilizando “las griegas”. Tenga en cuenta que no necesita utilizar las formulas de calculo del modelo de Black-Scholes.

- a) Considere una cartera delta neutral, con gamma -500 y vega -800. Interprete conceptualmente el significado de cada griega de esta cartera (delta, gamma y vega).
- b) Considere la cartera del punto a). Si en el mercado se negocia un derivado con gamma 0.5, vega 2 y delta 0.6, ¿Cuántas unidades de este derivado y cuantas unidades de subyacente debería operar para lograr una cartera delta-vega neutral? (especifique claramente si debe comprar o vender cada instrumento).
- c) Utilizando el mismo derivado del punto anterior, ¿Qué cantidad de derivado y que cantidad de subyacente debería operar para que su cartera sea delta-gamma neutral? (especifique claramente si debe comprar o vender cada instrumento).
- d) Operando el derivado del punto b) y el subyacente de la cartera. ¿podría construir una cartera delta-gamma-vega neutral? Explique brevemente.

Ejercicio 111

- a) En el mercado se negocia un Put Europeo con vencimiento a 9 meses sobre acciones que no pagan dividendos. El inversor asume una volatilidad de 20%. La tasa libre de riesgo es del 5%. El instrumento da el derecho a vender una acción a \$45 siendo ese también el precio de la acción hoy. Determinar el valor de la prima.
- b) El lanzador de este contrato quiere eliminar el riesgo respecto a cambios en el precio de la acción. ¿Cómo debería operar para lograr una cobertura optima? ¿Qué consideraciones debería tener a futuro?

Ejercicio 112

La cartera de la compañía tiene hoy un valor de \$100,000. Quiere tomarse cobertura operando en el mercado de opciones de manera que la cartera no se encuentre por debajo de los \$95,000 dentro de seis meses. El valor del índice S&P 500 hoy es de 1,000 (cada contrato es por \$100 el valor del índice) y el Beta de la cartera es de 1.2. Sabiendo que la volatilidad del indice es del 30% y que la tasa de dividendos de la cartera de mercado es de un 3% mientras que la de la cartera de la compañía es de 4%, se pide:

- a) Especificar sobre que contratos y cantidad se debe operar.
- b) Mostrar como opera la cobertura si el rendimiento total de mercado luego de los seis meses fue -4%.

Ejercicio 113

Un agente es emisor de diez Puts sobre el S&P 500 y busca cubrir el riesgo originado por dicha emisión. Cada instrumento es un Put sobre el índice S&P 500 que paga 100 veces la diferencia entre 970 y el valor del índice al vencimiento (en 2 meses). Si la volatilidad anual del índice es de 20%, la tasa libre de riesgo es 5%, el valor del índice es 960 y la tasa de dividendos del 2% se pide:

- a) ¿Qué posición en futuros a seis meses debe tomar para tener la cobertura deseada? El futuro paga 250 veces el valor del índice.
- b) En el mercado se negocia otro derivado sobre el índice S&P 500 que tiene delta igual a 50, gamma igual a 20 y vega de 10. ¿Cómo debería actuar la compañía si quisiera tomar la misma cobertura que la planteada en a) pero con este nuevo instrumento?
- c) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.
 - a. El costo de la cobertura planteada en a) es independiente de la trayectoria seguida por el valor del índice.
 - b. La estrategia planteada en a) es una estrategia dinámica de cobertura.

Bibliografía

- Bessis, J. "Risk Management in Banking" 4th Ed. John Wiley & Sons, 2015
- Black, F., Derman, E., y Toy, W. (1990) "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options" Financial Analysts Journal, 1990, pp. 33-39.
- Bodie, Z., Kane, A. y J. Marcus. "Investments" 5th Ed. McGraw-Hill/Irwin, 2001.
- Brealey, R. A., Myers, S. C. y Allen, F., PRINCIPIOS DE FINANZAS CORPORATIVAS, 9a. Edición 2010, Mc-Graw Hill, México.
- Bluhm, C., L. Overbeck, and C. Wagner "An Introduction to Credit Risk Modelling" Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall/CRC, 2003.
- Crouhy, M., Galai, D. y R. Mark "The Essentials of Risk Management": McGrawHill, 2006
- Chance, D. Analysis of Derivatives for the CFA Program, (AIMR,2003).
- Copeland, Thomas E. y Weston, Fred J. "Financial Theory and Corporate Policy" 3rd Ed. Addison-Wesley, 1992.
- Fabozzi, Frank J. "FIXED INCOME ANALYSIS" 2nd Ed. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- Hull, John C. "Options, Futures & Other Derivatives" 7th Ed. Prentice Hall, 2009.
- Hull, John C. "Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones" 6ta Edición, Pearson Education, México, 2009.
- Hull, John C. "Risk Management and Financial Institutions" 3rd Ed. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 2012.
- Jorion, Philippe "Value at Risk" 3rd Ed. McGraw-Hill, 2007.
- Jorion, Philippe "Financial Risk Manager Handbook" 4th Ed. John Wiley & Sons, Inc. 2007
- Lin S. Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance. Wiley. Inglaterra. 2006
- Rebonato, R. "Interest Rate Option Models", Wiley, Chichester, 1998.
- JP Morgan (1996) Risk Metrics - Technical Document. 4th Edition
- Mina, J. y Xiao, J. "Return to Risk Metrics: The Evolution of a Standard" Risk Metric Group, 2001.
- Saunders, A. y L. Allen "Credit Risk Measurement", Wiley, 2002
- O. Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of financial economics, 5(2):177-188, 1977.